

TANIM :

$a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,
 $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ ifadesine reel katsayılı **POLİNOM** denir.

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ sayılarına **KATSAYILAR**, a_n 'e **BASİT KATSAYI** ve a_0 'a **SABİT TERİM** denir.
 $a_0, a_1 x, a_2 x^2, \dots, a_n x^n$ ifadelerine polinomun **TERİMLERİ** denir.

POLİNOMLARDA EŞİTLİK :

$P(x) = Q(x) \Leftrightarrow a_n = b_n, a_{n-1} = b_{n-1}, \dots, a_3 = b_3, a_2 = b_2, a_1 = b_1, a_0 = b_0$ dir.

POLİNOMLARDA BÖLME

$P(x)$ bölünen, $Q(x)$ bölen, $B(x)$ bölüm ve $K(x)$ kalan ise,

$P(x) = Q(x) \cdot B(x) + K(x)$ dir.

$K(x)$ in derecesi daima $Q(x)$ in derecesinden küçüktür. İki polinomun bölümünde, bölümün derecesi, bölünenin derecesi ile bölenin derecesi farkına eşittir.
 $d(B(x)) = d(P(x)) - d(Q(x))$

KALAN BULMA :

a) $P(x)$ polinomunun $x - a$ ile bölümünden kalan :

$P(x)$ polinomunun $x - a$ ile bölümünden kalan, $x - a = 0$ denkleminin kökü $P(x)$ polinomunda x yerine konularak bulunur.

Yani, **Kalan = $P(a)$** dir.

b) $P(x)$ polinomunun $x^n - a$ ile bölümünden kalan :

$P(x)$ polinomunun $x^n - a$ ile bölümünden kalan, polinomda her x^n yerine a yazılarak bulunur.

ÖRNEK 1:

Katsayılarının toplamı -2 olan bir $P(x)$ polinomunun $(x + 3)$ ile bölümünden kalan -10 dur.

Buna göre, $P(x)$ polinomunun $x^2 + 2x - 3$ ile bölümünden kalan aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $2x - 4$ B) $2x - 1$ C) $3x + 1$
 D) 20 E) -12

(ÖSS - 1999)

ÇÖZÜM 1:

$P(1) = -1, P(-3) = -10$ olarak verilmiş.

Kalan polinomuna $K(x) = ax + b$ dersek,

$K(1) = a + b = -2$

$K(-3) = a(-3) + b = -3a + b = -10$ dur.

$a + b = -2$ ve $-3a + b = -10$ denklemlerini çözmek için

$$\begin{array}{rcl} & -1 & \\ & \swarrow & \searrow \\ & a + b = -2 & \\ + & -3a + b = -10 & \\ \hline & -4a = -8 & \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(Her iki tarafı } -1 \text{ ile} \\ \text{çarpıyoruz)} \end{array}$$

$a = 2$ ve $a + b = -2$ denkleminde a yerine 2 yazarsak $b = -4$ bulunur.

$P(x)$ polinomunun $x^2 + 2x - 3$ ile bölümünden kalan

$K(x) = 2x - 4$ olur .

Yanıt: A

ÖRNEK 2:

$P(x)$ ve $Q(x)$ polinomları için

$$P(x + 2) = (x^3 - 2x - 3) \cdot Q(x) + x^2 + x + 1$$

bağıntısı sağlanmaktadır.

$Q(x)$ in sabit terimi 5 olduğuna göre, $P(x)$ polinomu $(x - 2)$ ile bölündüğünde kalan kaçtır?

- A) -16 B) -15 C) -14
D) 0 E) 1
(ÖSS - 1999)

ÇÖZÜM 2:

$Q(0) = 5$ verilmiş $P(2)$ soruluyor.

$P(x + 2)$ polinomunda x yerine 0 yazarsak

$$P(0 + 2) = (0 - 2 \cdot 0 - 3) Q(0) + 0^2 + 0 + 1$$

$$P(2) = (-3) Q(0) + 1$$

$$P(2) = -3(5) + 1 = -15 + 1 = -14 \text{ olarak bulunur.}$$

Yanıt: C

ÖRNEK 3:

$P(x)$ bir polinom ve

$$P(x - 1) + x^2 P(x + 1) = x^3 + 3x^2 + x + 1$$

$$P(2) = 4$$

olduğuna göre, $P(x)$ polinomunun sabit terimi kaçtır?

- A) 2 B) 3 C) 4
D) 6 E) 8
(ÖSS - 2000)

ÇÖZÜM 3:

$x = 1$ için

$$P(1 - 1) + 1^2 \cdot P(1 + 1) = 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 1 + 1$$

$$P(0) + P(2) = 6$$

$$P(0) + 4 = 6 \Rightarrow P(0) = 2$$

$P(x)$ polinomunun sabit terimi

$$P(0) = 2 \text{ bulunur.}$$

Yanıt : A

ÖRNEK 4:

$P(x)$ bir polinom ve $x^3 + ax - 8 = (x - 2) P(x)$ olduğuna göre, $P(2)$ nin değeri kaçtır?

- A) 36 B) 32 C) 24
D) 12 E) 0
(ÖSS - 2000)

ÇÖZÜM 4:

Soru daha sonra iptal edildi.

$$x^3 + ax - 8 = (x - 2) \cdot P(x)$$

$$x = 2 \Rightarrow 8 + 2a - 8 = 0$$

$$2a = 0$$

$$a = 0$$

$$x^3 - 8 = (x - 2) \cdot P(x)$$

$$(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = (x - 2) \cdot P(x)$$

$$P(x) = x^2 + 2x + 4$$

$$P(2) = 2^2 + 2 \cdot 2 + 4$$

$$= 12$$

(Ancak eşitliğin her iki tarafı "0" olan farklı sayılarla sadeleştirilebileceği için soru ÖSYM tarafından iptal edildi.)

ÖRNEK 5:

$$\frac{10x - 5}{x^2 - 4x - 5} = \frac{A}{x - 5} + \frac{B}{x + 1}$$

olduğuna göre, $A - B$ farkı kaçtır?

- A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6
(ÖSS - 2001)

ÇÖZÜM 5:

$$\frac{10x - 5}{(x - 5)(x + 1)} = \frac{A}{x - 5} + \frac{B}{x + 1}$$

$10x - 5 = A(x + 1) + B(x - 5)$ elde edilir.

Polinom eşitliğinden aynı dereceli terimlerin katsayısı eşitlenirse;

$$10x - 5 = x \left(\frac{A + B}{10} \right) + \frac{A - 5B}{-5}$$

$$A + B = 10$$

$$A - 5B = -5$$

$$2A + 2B = 20$$

$$+ \quad A - 5B = -5$$

$$3(A - B) = 15 \quad \text{ise } A - B = 5 \text{ olur.}$$

Yanıt: D

ÖRNEK 6:

$P(x)$ polinomunun $(x + 2)$ ile bölümünden kalan 7, $(2x + 1)$ ile bölümünden kalan 1 ise $2x^2 + 5x + 2$ ile bölümünden kalan kaçtır?

- A) $4x - 1$ B) $-4x + 1$ C) $-4x - 1$
D) $2x - 2$ E) $x + 1$

(Kavram Dershaneleri Sorusu)

ÇÖZÜM 6:

$$P(-2) = 7 \quad \text{ve} \quad P\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$$

olarak verilmiş.

Kalan polinomuna $K(x) = ax + b$ dersek

$$K(-2) = -2a + b = 7$$

$$K\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{a}{2} + b = 1$$

Bu iki denklemi çözmek için ;

$$\begin{array}{rcl} -2a + b & = & 7 \\ \begin{array}{l} \xrightarrow{-1} \\ \hline \end{array} -\frac{a}{2} + b & = & 1 \xrightarrow{-1} \quad (\text{Her iki tarafı } -1 \text{ ile} \\ & & \text{çarpıyoruz)} \\ \hline -2a + b & = & 7 \\ + \quad \frac{a}{2} - b & = & -1 \quad (\text{Taraf tarafa toplarsak}) \\ \hline -\frac{3}{2}a & = & 6 \quad a = -4 \quad \text{ve} \end{array}$$

$-2a + b = 7$ denkleminde yerine yazarsak

$$8 + b = 7 \quad b = -1 \text{ bulunur.}$$

ve $P(x)$ polinomunun $2x^2 + 5x + 2$ ile bölümünden kalan $K(x) = -4x - 1$ olur.

Yanıt: C

ÖRNEK 7:

$P(x)$ polinomunun sabit terimi 10, katsayıları toplamı 7 ise $P(x)$ in $(x^2 - x)$ ile bölümünden kalan aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $10x - 3$ B) $3x + 7$ C) $-3x + 10$
D) $7x + 3$ E) $-3x - 7$

ÇÖZÜM 7:

Doğru seçenekte $K(0) = 10$ ve $K(1) = 7$ olmalıdır.

C şıkkını deneyelim.

$$K(x) = -3x + 10$$

$$K(0) = -3 \cdot 0 + 10 = 10$$

$$K(1) = -3 \cdot 1 + 10 = 7$$

sonuçlarına ulaşıldığından

Yanıt: C

ÖRNEK 8:

$$\frac{P(2x + 3) + ax - 2}{Q(x + 1)} = 4x + 3 \quad \text{ifadesi veriliyor.}$$

P(x) in (x - 1) ile bölümünden kalan 5, Q(x) in x ile bölümünden kalan -2 ise a kaçtır?

- A) -2 B) -1 C) 0
D) 1 E) 3

(Kavram Dersaneleri Sorusu)

ÇÖZÜM 8:

$$x - 1 = 0 \quad \text{ise} \quad P(1) = 5$$

$$x = 0 \quad \text{ise} \quad Q(0) = -2$$

$$\frac{P(2x + 3) + ax - 2}{Q(x + 1)} = 4x + 3$$

eşitliğinde x gördüğümüz yere -1 yazarsak

$$\frac{P(2 \cdot (-1) + 3) + a \cdot (-1) - 2}{Q(-1 + 1)} = 4 \cdot (-1) + 3$$

$$\frac{P(1) - a - 2}{Q(0)} = -1 \Rightarrow \frac{5 - a - 2}{-2} = -1$$

a = 1 bulunur.

Yanıt:D

ÖRNEK 9:

$2x^3 + mx^2 - 2x + 3m + 1 = Q(x - 1)$ eşitliğini sağlayan Q(x) polinomunun sabit terimi 5 ise katsayılar toplamı kaçtır?

- A) 7 B) 9 C) 10
D) 12 E) 20

(Kavram Dersaneleri Sorusu)

ÇÖZÜM 9:

Sabit terim 5 ise $Q(0) = 5$ tir.

Katsayılar toplamı yani $Q(1)$ sorulmaktadır.

$2x^3 + mx^2 - 2x + 3m + 1 = Q(x-1)$ eşitliğinde x gördüğümüz yere 1 yazarsak

$$2 \cdot 1^3 + m \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 3m + 1 = Q(1-1)$$

$$2 + m - 2 + 3m + 1 = Q(0)$$

$$4m + 1 = 5$$

$$4m = 4$$

$$m = 1$$

$$m = 1 \quad \text{için} \quad 2x^3 + x^2 - 2x + 4 = Q(x - 1)$$

$$x = 2 \quad \text{için} \quad 2 \cdot 2^3 + 2^2 - 2 \cdot 2 + 4 = Q(2 - 1)$$

$$16 + 4 - 4 + 4 = Q(1)$$

$$20 = Q(0)$$

Yanıt: E

ÖRNEK 10:

$P(x) = (x + a)^7 \cdot (x - 2)^3$ polinomunun katsayıları toplamı -128 olduğuna göre $P(x)$ in x ile bölümünden kalan kaçtır?

- A) 16 B) 12 C) -4
D) -8 E) -16

(Kavram Dershaneleri Sorusu)

ÇÖZÜM 10:

Katsayılar toplamı : $P(1) = -128$

$$x = 1 \text{ için } P(1) = (1 + a)^7 \cdot (1 - 2)^3 = -128$$

$$(1 + a)^7 \cdot (-1)^3 = -128$$

$$(1 + a)^7 = 128$$

$$(1 + a)^7 = 2^7$$

$$a = 1$$

$$P(x) = (x + 1)^7 \cdot (x - 2)^3$$

$$x = 0 \text{ için } P(0) = (0 + 1)^7 \cdot (0 - 2)^3$$

$$P(0) = 1 \cdot -8 = -8$$

Yanıt: D

ÖRNEK 11:

$$\frac{4x + (x + 1) \cdot Q(x + 1)}{P(x - 1)} = x^2 - x - 2$$

bağıntısı veriliyor.

$Q(x)$ in bir çarpanı $(x - 2)$ olduğuna göre

$P(x)$ 'in sabit terimi kaçtır?

- A) -4 B) -2 C) 2
D) 4 E) 6

(Kavram Dershaneleri Sorusu)

ÇÖZÜM 11:

$Q(x)$ in bir çarpanı $x - 2$ olduğuna göre

$Q(2) = 0$ dır.

$$\frac{4x + (x + 1) \cdot Q(x + 1)}{P(x - 1)} = x^2 - x - 2$$

ifadesinde x gördüğümüz yere 1 yazarsak

$$\frac{4 \cdot 1 + (1 + 1) \cdot Q(1 + 1)}{P(1 - 1)} = 1^2 - 1 - 2$$

$$\frac{4 + 2 Q(2)}{P(0)} = 1 - 1 - 2$$

$$4 + \underbrace{2 Q(2)}_0 = -2P(0)$$

$$4 = -2 P(0)$$

$$P(0) = -2$$

Yanıt: B

ÖRNEK 12:

$$(x - 2) P(x) = x^3 - 2x^2 + ax - 6 \text{ ise}$$

P(x) polinomunun (x - 1) ile bölümünden kalan kaçtır?

- A) 4 B) 3 C) 2
D) 1 E) -1

(Kavram Dershaneleri Sorusu)

ÇÖZÜM 12:

a'yı bulmak için x gördüğümüz yere 2 yazarsak

$$(2 - 2) P(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 + a \cdot 2 - 6$$

$$0 \cdot P(2) = 8 - 2 \cdot 4 + 2a - 6$$

$$0 = 8 - 8 + 2a - 6$$

$$6 = 2a$$

$$a = 3 \text{ bulunur.}$$

$$a = 3 \text{ ise } (x - 2) P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 6$$

P(x) in (x - 1) ile bölümünden kalan yani

P(1) sorulduğuna göre x yerine 1 yazmalayız.

$$(1 - 2) P(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 6$$

$$-P(1) = 1 - 2 + 3 - 6$$

$$-P(1) = -4$$

$$P(1) = 4 \text{ tür.}$$

Yanıt: A

ÖRNEK 13:

$$P(3x + 1) = 3ax^3 - 4x - 5 \text{ polinomu veriliyor.}$$

P(x) polinomunun çarpanlarından biri x+2 ise a kaçtır?

- A) -1 B) $-\frac{1}{2}$ C) $-\frac{1}{3}$
D) $\frac{1}{3}$ E) 1

(Kavram Dershaneleri Sorusu)

ÇÖZÜM 13 :

P(x) 'in çarpanlarından birisi x + 2 ise

P(x) x + 2 ile bölünür. Yani P(-2) = 0 'dır.

$$P(3x+1) = 3ax^3 - 4x - 5$$

$$3x + 1 = -2 \text{ ise } x = -1$$

x = -1 için

$$P(3 \cdot (-1) + 1) = 3 \cdot a \cdot (-1)^3 - 4 \cdot (-1) - 5$$

$$P(-2) = -3a + 4 - 5 = 0$$

$$-3a = 1$$

$$a = -\frac{1}{3}$$

Yanıt: C

ÖRNEK 14:

$$\frac{3x-1}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} \text{ eşitliği veriliyor.}$$

Buna göre $\frac{A}{B}$ kaçtır?

- A) $\frac{2}{7}$ B) $\frac{2}{3}$ C) 1
D) $\frac{7}{3}$ E) $\frac{7}{2}$

(Kavram Dersaneleri Sorusu)

ÇÖZÜM 14:

$$\frac{3x-1}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

$3x-1 = A(x+2) + B(x-1)$ elde edilir.

Polinom eşitliğinden aynı dereceli terimlerin katsayıları eşitlenirse

$$\begin{array}{r} A+B=3 \\ + \quad 2A-B=-1 \\ \hline 3A=2 \end{array}$$

$$A = \frac{2}{3} \Rightarrow A+B=3 \text{ denkleminde}$$

A gördüğümüz yere $\frac{2}{3}$ yazalım.

$$\frac{2}{3} + B = 3 \quad B = 3 - \frac{2}{3} = \frac{7}{3} \text{ bulunur.}$$

$$\frac{A}{B} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{7}{3}} = \frac{2}{7}$$

Yanıt: A

ÖRNEK 15:

$$\frac{2x+3}{2x^2-x-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{2x+1} \text{ ise}$$

A + B aşağıdakilerden hangisidir?

- A) $-\frac{1}{3}$ B) $-\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{6}$
D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{3}$

(Kavram Dersaneleri Sorusu)

ÇÖZÜM 15:

$$\frac{2x+3}{2x^2-x-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{2x+1}$$

$2x+3 = A(2x+1) + B(x-1)$ elde edilir.

Polinom eşitliğinden aynı dereceli terimlerin katsayıları eşitlenirse

$$\begin{array}{r} 2A+B=2 \\ + \quad A-B=3 \\ \hline 3A=5 \end{array}$$

$$A = \frac{5}{3} \Rightarrow A-B=3 \text{ denkleminde}$$

A gördüğümüz yere $\frac{5}{3}$ yazalım $\frac{5}{3} - B = 3$

$$B = \frac{5}{3} - 3 \quad B = \frac{4}{3} \text{ bulunur.}$$

$$A+B = \frac{5}{3} - \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$$

Yanıt: E