ÜNİTE I

TÜREV

Türev
Soldan türev, sağdan türev
Türev kuralları
Ters fonksiyonun türevi
Bileşke fonksiyonun türevi
Parametrik fonksiyonlarda türev
Kapalı fonksiyonun türevi
Ardışık türevler
Trigonometrik fonksiyonların türevi
Ters trigonometrik fonksiyonların türevi
Loraritma ve üstel fonksiyonların türevi
Türevin limit sorularına uygulanışı L' Hospital kuralı
1. dereceden alınan türevin geometrik yorumu. (teğetin eğimi, normalin denklemi)
Türevin fiziksel anlamı (Hız ivme)
Özel tanımlı fonksiyonların türevi
Türevin uygulamaları
İkinci türevin geometrik anlamı
Maksimum ve minumum problemleri
Fonksiyonlarda asimptot bulma
Grafik çizimleri
Örnekler

BU BÖLÜMÜN AMAÇLARI

Bu bölümü çalıştığınızda (bitirdiğinizde);
* Türevin tanımını ve gösterilişini öğrenecek,
* Bir noktada türev almayı öğrenecek,
* Sağdan ve soldan türevleri kavrayacak,
* Türev kurallarını kavrayıp, örnek çözecek,
* Ters ve kapalı fonksiyonların türevlerini almayı öğrenecek,
* Bileşke fonksiyonun türevini almayı öğrenecek,
* Parametrik fonksiyonlarda türev almayı öğrenecek
* Ardışık türev almayı öğrenecek,
* Trigonometrik fonksiyonların türevlerini almayı öğrenecek,
* Ters trigonometrik fonksiyonların türevlerini almayı öğrenecek,
* Logaritma ve üstel fonksiyonların türevlerini almayı öğrenecek,
* L' Hospital kuralını kavrayıp limit problemlerinde $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ belirsizliğindeki durumlar için türevi kullanacak,
* Teğetin eğimini ve normalin denklemini türev yardımıyla bulmayı öğrenecek,
* Hız ve ivme problemlerinde türevden yararlanmayı öğrenecek,
* Özel tanımlı fonksiyonların türevlerini almayı öğrenecek,
* Her türevlenebilen fonksiyon sürekli mi yoksa aksi de doğru mu sorularının cevabını bulacak,
* Ekstremum değerin ne olduğunu öğrenecek, fonksiyonların ekstremum değerini bulacak,
* Fonksiyonun yerel maksimum veyerel minimum noktaları bulmayı öğrenecek,
* Rolle ve ortalama değer teoreminin türevde ne işe yaradığını öğrenip, bu teoremler sayesinde ilgili soruları çözmeyi öğrenecek,
* İkinci türevin geometrik anlamını kavrayacak, niçin ikinci türev gerekli sorusunun cevabını bulacak,
* Maximum ve minimum problemleri için türevin gerekliliğini anlayacak,
* Fonksiyonların asimptotlarını bulmayı öğrenecek,
* Çeşitli fonksiyonların grafik çizimlerini yapabileceksiniz.

BU BÖLÜMÜ NASIL ÇALIŞMALIYIZ?

* Türev konusundan önce, fonksiyon, limit ve süreklilik konularını iyi öğreniniz.
* Tanımları dikkatli okuyunuz.
* Verilen formülleri ezberleyiniz. Ezberlediğiniz formüllere yönelik örnekler çözünüz.
* Çözülen örnekleri yazarak çalışınız. Sonra kendiniz çözmeyi deneyiniz.
* Çözemezseniz mutlaka hatanızı bulunuz, tekrar çözmeye çalışınız.
* Bölüm sonundaki değerlendirme sorularını araştırarak çözünüz.

ÜNİTE I.

TÜREV

$a, b \in R$ olmak üzere, $f:[a,b] \rightarrow R$ fonksiyonunda; $x_0 \in (a,b)$ ve $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in R$ ise bu limite, f fonksiyonunun x_0 noktasındaki türevi denir ve $\dfrac{df}{dx}(x_0)$ ya da $f'(x_0)$ ile gösterilir.

Öyleyse, $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ dır. Diğer bir ifade ile,

$h \in R - \{0\}$ olmak üzere, $x = x_0 + h$ yazılırsa

$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ olduğundan,

$f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ olur.

Örnek: $f: R \rightarrow R$, $f(x) = x^2$ fonksiyonunun x_0 noktasındaki türevini, türev tanımını kullanarak bulunuz.

Çözüm

$f(x) = x^2$

$f(x_0) = x_0^2$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{(x - x_0)}$$

$$= \lim_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0 \text{ olur.}$$

Türevi $\dfrac{dy}{dx}$, y', $f'(x)$ gibi ifadelerden biriyle göstereceğiz.

SOLDAN TÜREV, SAĞDAN TÜREV

$f : A \rightarrow R$ fonksiyonunda $x_0 \in A$ olmak üzere $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in R$ limitine,

f fonksiyonun x_0 noktasındaki soldan türevi denir ve bu türev $f'(x_0^-)$ ile gösterilir.

$\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in R$ limitine, f fonksiyonun x_0 noktasındaki sağdan türevi denir ve bu türeve $f'(x_0^+)$ ile gösterilir.

Bir fonksiyonun, x_0 noktasında türevli olabilmesi için, x_0 noktasındaki sağdan ve soldan türevleri eşit olması gerekir.

Örnek: $f : R \rightarrow R$, $f(x) = |x-3|$ fonksiyonun $x_0 = 3$ noktasındaki sağdan ve soldan türevini, türev tanımını kullanarak bulunuz.

Çözüm : $f'(3^-) = \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{f(x) - f(3^-)}{x - 3^-} = \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{|x - 3| - 0}{x - 3} = \dfrac{-(x - 3)}{x - 3} = -1$

$f'(3^+) = \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{f(x) - f(3^+)}{x - 3^+} = \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{|x - 3| - 0}{x - 3} = \dfrac{(x - 3)}{x - 3} = 1$

f(x) fonksiyonunun $x_0 = 3$ noktasında limiti yoktur. Limiti olmayan fonksiyonun türevi de olmayacağından $x_0 = 3$ noktasında türevi yoktur.

TÜREV KURALLARI

f ve g türevlenebilen iki fonksiyon olsun.

1. $\mathbf{C \in R}$, $\mathbf{f(x) = C}$ **ise** $\mathbf{f'(x) = 0}$ yani, sabitin türevi her zaman sıfırdır.

Örnek : Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz.

a) $f(x) = 3$

b) $f(x) = -5$

c) $f(x) = \dfrac{1}{2}$

Çözüm

a) $f'(x) = 0$

b) $f'(x) = 0$

c) $f'(x) = 0$

2) $f(x) = x^n$, $n \in R$ olsun.

$f'(x) = n \, . \, x^{n-1}$ olarak yazılır.

Örnek :

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = \sqrt{x}$

c) $f(x) = \frac{1}{3} x^3$

Çözüm

a) $f'(x) = 2 \, . \, x^{2-1} = 2x^1 = 2x$

b) $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

$f'(x) = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2} - 1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

c) $f'(x) = \frac{1}{3} \, . \, 3x^{3-1} = x^2$

Çarpımın Türevi

3) $(f \, . \, g)' = f' . \; g + g' f$

Örnek : Aşağıdaki fonksiyonların türevini bulunuz.

a) $f(x) = 2x \, . \, (x^2 + 1)$

b) $f(x) = x^2 \, . \, (1 - x^3)$

Çözüm

a) $f'(x) = (2x)'(x^2 + 1) + (2x) . (x^2 + 1)'$

$= 2. (x^2 + 1) + 2x . (2x)$

$=2x^2 + 2 + 4x^2$

$= 6x^2 + 2$

b) $f'(x) = (x^2)' . (1 - x^3) + (x^2) . (1 - x^3)'$

$= (2x) . (1 - x^3) + x^2 (-3x^2)$

$=2x - 2x^4 - 3x^4 = 2x - 5x^4$

4) $(f^n)' = n . f^{n-1} . f'$

Örnek : Aşağıdaki fonksiyonların türevini bulunuz.

a) $f(x) = (2x -1)^3$

b) $f(x) = (x^2 - 2x)^5$

Çözüm

a) $f'(x) = 3 . (2x -1)^{3-1} . (2x -1)'$

$= 3 (2x -1)^2 . (2)$

$= 6 (2x-1)^2$

b) $f'(x) = 5 . (x^2 - 2x)^4 . (x^2 - 2x)'$

$= 5 . (x^2 - 2x)^4 . (2x - 2)$

Bu tip sorularda öğrenciler parantez içinin türevini almayı unutuyorlar, dikkat ediniz.

5) $(f + g)' = f' + g'$

$(f - g)' = f' - g'$

Örnek : Aşağıdaki fonksiyonların türevini bulunuz.

a) $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5$

b) $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 3x$

Çözüm

a) $f'(x) = 6x^2 - 8x$

b) $f'(x) = 3x^2 - \frac{1}{2} \cdot 2x - 3 = 3x^2 - x - 3$

Bölümün Türevi

6) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$ $\quad (g \neq 0)$

Örnek : Aşağıdaki fonksiyonların türevini bulunuz.

a) $f(x) = \frac{x - 1}{2x + 1}$

b) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x + 3}$

Çözüm

a) $f'(x) = \frac{(x - 1)' \cdot (2x + 1) - (x - 1) \cdot (2x + 1)'}{(2x + 1)^2}$

$= \frac{1 \cdot (2x + 1) - (x - 1) \cdot (2)}{(2x + 1)^2} = \frac{2x + 1 - 2x + 2}{(2x + 1)^2} = \frac{3}{(2x + 1)^2}$

b) $f'(x) = \frac{(x^2 - 1)'(2x + 3) - (x^2 - 1) \cdot (2x + 3)'}{(2x + 3)^2}$

$= \frac{2x(2x + 3) - (x^2 - 1)(2)}{(2x + 3)^2} = \frac{4x^2 + 6x - 2x^2 + 2}{(2x + 3)^2} = \frac{2x^2 + 6x + 2}{(2x + 3)^2}$

7) $\left(\sqrt[n]{f}\right)' = \frac{f'}{n \cdot \sqrt[n]{f^{n-1}}}$ **(Formül a)**

$\left(\sqrt{f}\right)' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$ **(Formül b)**

Örnek : Aşağıdaki fonksiyonların türevini bulunuz.

a) $f(x) = \sqrt{x}$

b) $f(x) = \sqrt{x^3}$

c) $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 1)}$

Çözüm : a) I. yol

$$a)\ f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

II. yol formül b den

$$a)\ f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{x'}{2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

b) I. yol

$$b)\ f(x) = \sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3\sqrt{x}}{2}$$

II. yol formül b den

$$b)\ f'(x) = \frac{(x^3)'}{2\sqrt{x^3}} = \frac{3x^2}{2x\sqrt{x}} = \frac{3x}{2\sqrt{x}} = \frac{3\sqrt{x}}{2}$$

c) I. yol

$$c)\ f(x) = \sqrt[3]{(x^2-1)} = (x^2-1)^{\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x^2-1)^{\frac{1}{3}-1}(x^2-1)' = \frac{1}{3}(x^2-1)^{-\frac{2}{3}}(2x) = \frac{2x}{3.\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$$

II. yol n = 3 formül a dan,

$$f'(x) = \frac{(x^2-1)'}{3.\sqrt[3]{(x^2-1)^{3-1}}} = \frac{2x}{3.\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$$

Yukarıdaki formül a ve b aynı ifadelerdir. Formül b, formül a nın özel hâlidir. Ancak öğrenciye tavsiyemiz formülsüz türev alma yoludur.

TERS FONKSİYONUN TÜREVİ

$A \subset R$, $B \subset R$ f: $A \to B$ fonksiyonu bire bir örten olsun. f fonksiyonu $x_0 \in A$ noktasında türevli ve $f'(x_0) \neq 0$ ise, $f^{-1}: B \to A$ fonksiyonuda x_0'ın f altındaki görüntüsü olan y_0 noktasında türevlidir ve

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \qquad f'(x_0) \neq 0'$$

şeklinde gösterilir.

Yukarıdaki tanımdan anlaşılacağı üzere, tanım ve değer kümesindeki belirli aralıklara göre fonksiyonun tersi mevcut olur.

Örnek : $f: R \to (-4, +\infty)$

$f(x) = y = x^2 - 4$ fonksiyonu veriliyor.

$(f^{-1})'(x)$ nedir?

Çözüm : I. yol : Fonksiyon 1:1 ve örten olduğundan önce tersini alalım, sonra da ifadeyi türevleyelim. Yani;

$$y = x^2 - 4$$
$$x = y^2 - 4$$
$$x + 4 = y^2$$
$$\sqrt{x+4} = y = f^{-1}(x)$$

$\left[f^{-1}(x)\right]' = \left(\sqrt{x+4}\right)$ olduğundan türevi,

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \left((x+4)^{\frac{1}{2}}\right)'$$
$$= \frac{1}{2}(x+4)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x+4)'$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x+4}}$$

II. yol : Yukarıdaki formüle göre;

$$y = x^2 - 4$$
$$x = \sqrt{y+4}$$

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y+4}}$ olduğundan,

$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+4}}$ olur.

BİLEŞKE FONKSİYONUN TÜREVİ

$y = f(u)$

$u = g(x)$ olduğunu kabul edelim.

$y = f[g(x)] = (fog)(x)$

olarak söylenir. $(fog)(x)$ fonksiyonun türevi

$(fog)'(x) = f'[g(x)] \cdot g'(x)$

şeklinde hesaplanır.

Örnek : $f, g : R \rightarrow R$

$f(x) = x^2 + 5,\ g(x) = 3x - 5$ ise

$(fog)'(x)$ değerini bulalım.

Çözüm : **<u>I. yol :</u>**

$(fog)'(x) = f'[g(x)] \cdot g'(x)$

$= (2x) \circ [3x - 5] \cdot 3$

$= 2(3x - 5) \cdot 3$

$= (6x - 10) \cdot 3 = 18x - 30$

<u>II. yol :</u> Fonksiyonun bileşkesi alınır, sonra türevlenir.

$(fog)(x) = f[g(x)] = (3x-5)^2 + 5 = 9x^2 - 30x + 30$

$(fog)'(x) = 18x - 30$

PARAMETRİK FONKSİYONLARDA TÜREV

t parametre (değişken) olmak üzere, parametrik fonksiyonlardan birinci türev

$$x = f(t) \quad \text{ve} \quad y = g(t) \quad \text{ise} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

Parametrik fonksiyonların ikinci mertebeden türevi ise $y = f(x)$ fonksiyonu, $y = f(t)$ ve $x = g(t)$ şeklinde x ve y parametrik fonksiyonlarla ifade edildiğinde her zaman y yi x türünden ifade edemediğimizden, art arda türev alma yöntemini uygulayamayız. Bu durumda aşağıdaki kuralı kullanırız.

$$\frac{dy}{dx} = z = \frac{y'_t}{x'_t} \quad \text{diyelim} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dx} = \frac{z'_t}{x'_t}$$

Örnek : $x = \sqrt{t}$, $y = t - t^2$ ise $\frac{dy}{dx} = ?$

Çözüm : y nin x e göre türevi direkt olarak alınamaz. Çünkü, x t ye bağlı; y de t ye bağlıdır.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{(t - t^2)'}{(\sqrt{t})'} = \frac{1 - 2t}{\frac{1}{2\sqrt{t}}} = 2\sqrt{t}\ (1 - 2t) = 2x\ (1 - 2x^2) \quad \text{dir.}$$

Örnek : $y = t^2 + 1$ ve $x = t^2 + 2t$ için $\frac{d^2y}{dx^2}$ değerini bulalım.

Çözüm : $\frac{dy}{dx} = \frac{2t}{2t+2} = z$ olsun.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{z'_t}{x'_t} = \frac{\left(\frac{2t}{2t+2}\right)'}{\left(t^2+2t\right)'} = \frac{\frac{2\ .\ (2t+2) - 2t\ .\ (2)}{(2t+2)^2}}{2t+2} = \frac{4}{(2t+2)^3}$$

KAPALI FONKSİYONUN TÜREVİ

F(x,y) = 0 şeklindeki bağıntılara kapalı fonksiyon denir. Türevi hesaplanırken birkaç yola başvurulabilir. Bunlar;

1) Eğer, y yalnız bırakılabiliniyorsa, türev alınır.

2) F(x,y)=0 bağıntısında her terimi x e ve y ye göre hesaplanarak $y' = \frac{dy}{dx}$ bulunur.

3) $y' = \frac{-F'_x}{F'_y}$ formülünden yararlanılır. Burada F'_x, F(x,y) bağıntısının x'e göre türevi (y sabit) F'_y, F(x,y) bağıntısının y ye göre türevi (x sabit)

Örnek : $x^2y^3 + 3xy - 2x + y - 5 = 0$ bağıntısı ile verilen fonksiyonun türevini bulalım.

Çözüm

$$F(x,y) = x^2y^3 + 3xy - 2x + y - 5 = 0$$

$F'_x = 2y^3x + 3y - 2$ (x e göre türev, y sabit)

$F'_y = 3x^2y^2 + 3x + 1$ (y ye göre türev, x sabit)

Buna göre,

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{2y^3x + 3y - 2}{3x^2y^2 + 3x + 1}$$

olarak bulunur.

Örnek : $x^3y^2 - xy^3 - 5x + 1 = 0$ kapalı ifadesinde $y' = \frac{dy}{dx}$ bulunuz.

Çözüm : $3x^2y^2 + 2x^3y \cdot y' - y^3 - 3xy^2y' - 5 = 0$

$$2x^3yy' - 3xy^2y' = -3x^2y^2 + y^3 + 5$$

$$y'(2x^3y - 3xy^2) = -3x^2y^2 + y^3 + 5$$

$$y' = \frac{-3x^2y^2 + y^3 + 5}{2x^3y - 3xy^2}$$

$\Rightarrow y' - \frac{F'_x}{F'_y}$ ile bu örnek çözülebilir.

x^3y^2 y ye göre türevi alındığında $2x^3yy'$ oluyor. Ancak, x^3y^2, x'e göre türevi alındığında $3x^2y^2$ oluyor. x ´ yazılmıyor.

Kapalı ifadelerde türev alınırken, örneğin;

$xy = 0$

$y + xy' = 0$

$xy' = -y$

$y' = \frac{-y}{x}$ dir.

ARDIŞIK TÜREVLER

f: A→R, x→y = f(x) fonksiyonunun

1. mertebeden türevi $y' = f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$

2. mertebeden türevi $y'' = f''(x) = \frac{d^2f(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df(x)}{dx}\right)$

ya da

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

Üçüncü mertebeden türevi $y''' = f'''(x) = \frac{d^3f(x)}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right)$

n. mertebeden türevi $y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^nf(x)}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}f(x)}{dx^{n-1}}\right)$

$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$ demek, önce y nin x e göre türevi al, bulunan sonucuda x e göre türevle.

Örnek : f: R -{0} →R

$f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun dördüncü mertebeden türevi

Çözüm

$f(x) = x^{-1}$

$f'(x) = -x^{-2}$

$f''(x) = 2x^{-3}$

$f'''(x) = -6x^{-4}$

$f^{IV}(x) = 24x^{-5} = \dfrac{24}{x^5}$

TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN TÜREVİ

1) $y = \sin f(x)$ **ise** $y' = f'(x) \cdot \cos f(x)$

Örnek : $y = \sin x^2$ ise $y' = 2x \cos x^2$

2) $y = \cos f(x)$ **ise** $y' = -f'(x) \sin f(x)$

Örnek : $y = \cos(2x^2 - 1)$ ise $y' = -(2x^2 - 1)' \cos(2x^2 - 1)$

$= -4x \cdot \cos(2x^2 - 1)$

3) $y = \tan f(x)$ **ise** $y' = f'(x) \cdot [1 + \tan^2 f(x)] = f'(x) \sec^2 f(x)$

Örnek : $y = \tan 3x^2$ ise $y' = 6x [1 + \tan^2 3x^2] = 6x \sec^2 3x^2$

4) $y = \cot f(x)$ **ise** $y' = -f'(x) \cdot [1 + \cot^2 f(x)] = -f'(x) \cdot \operatorname{cosec}^2 f(x)$

Örnek : $y = \cot(3x^4 - 1)$ ise $y' = -(3x^4 - 1)' \operatorname{cosec}^2 (3x^4 - 1)$

$= -12x^3 \operatorname{cosec}^2 (3x^4 - 1)$

5) $y = [\sin f(x)]^n$ **ise** $y' = n \cdot [\sin f(x)]^{n-1} \cdot [\sin f(x)]'$

Örnek : $y = \sin^2 3x$ ise $y' = ?$

$y = \sin^2 3x = (\sin 3x)^2$ olduğundan,

$y' = 2 \sin 3x \cdot (\sin 3x)'$

$= 2 \sin 3x \cdot 3 \cos 3x = 3 \cdot 2 \sin 3x \cdot \cos 3x = 3 \sin 6x$

6) $y = [\text{Cos } f(x)]^n$ ise $y' = n\,[\text{Cos } f(x)]^{n-1} . [\text{Cos } f(x)]'$

Örnek : $y = \text{Cos}^3\, x^2$ ise

$y = (\text{Cos } x^2)^3$ ise $y' = 3 . (\text{Cos } x^2)^{3-1} \cdot (\text{Cos } x^2)'$

$= 3\,(\text{Cos } x^2)^2 . (-2x \text{ Sin } x^2) = -6x \text{ Cos}^2\, x^2 . \text{Sin } x^2$

7) $y = [\tan f(x)]^n$ ise $y' = n\,[\tan f(x)]^{n-1} . [\tan f(x)]'$

Örnek : $y = \tan^3 2x$ ise $y' = 3 \tan^2 2x . (\tan 2x)'$

$= (3 \tan^2 2x) . 2 \text{ Sec}^2\, 2x = 6 \tan^2 2x . \text{Sec}^2\, 2x$

8) $y = [\text{Cot } f(x)]^n$ ise $y' = n . [\text{Cot } f(x)]^{n-1} . [\text{Cot } f(x)]'$

Örnek : $y = \text{Cot}^4\, x^2$ ise

$y = [\text{Cot } x^2]^4 = 4 . [\text{Cot } x^2]^3 . [\text{Cot } x^2]'$

$= 4 . [\text{Cot } x^2]^3 . [-2x \text{ Cosec}^2\, x^2]$

$= -8x \text{ Cot}^3\, x^2 . \text{Cosec}^2\, x^2$

TERS TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN TÜREVİ

1) y=Arcsinx Fonksiyonu

Arcsin f(x) = $\text{Sin}^{-1} f(x)$ dir.

$y = \text{Arcsin } x \Leftrightarrow x = \text{Sin } y \qquad -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2} \qquad -1 \le x \le 1$

$(\text{Arcsin } x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ genel olarak,

$$(\text{Arcsin } f(x))' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1 - [f(x)]^2}}$$

Örnek : $y = \text{Arcsin } x^2$ ise $\dfrac{dy}{dx} = ?$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{\sqrt{1 - x^4}}$$

2) y= Arccosx Fonksiyonu

$\text{Arccos } f(x) = \text{Cos}^{-1} f(x)$

$y = \text{Arccos } x \Leftrightarrow x = \text{Cos } y$

$0 \le y \le \pi, \quad -1 \le x \le 1$

$(\text{Arccos } x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ genel olarak,

$$(\text{Arccos } f(x))' = \frac{-f'(x)}{\sqrt{1 - [f(x)]^2}}$$

Örnek : y=Arccos (3x+1) ise $\dfrac{dy}{dx}$ =?

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3}{\sqrt{1-(3x+1)^2}}$$

3) y=Arctanx Fonksiyonu

$\text{Arc tan } f(x) = \tan^{-1} f(x)$

$y = \text{Arc tan } f(x) \Leftrightarrow x = \tan y$

$\dfrac{-\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}, \quad -\infty < x < \infty$

$(\text{Arc tan } x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$ genel olarak,

$$(\text{Arc tan } f(x))' = \frac{f'(x)}{1 + [f(x)]^2}$$

Örnek : $y = \text{Arc tan } (2x^3 - 1)$ ise $\dfrac{dy}{dx} = ?$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2x^3 - 1)'}{1 + (2x^3 - 1)^2} = \frac{6x^2}{1 + (2x^3 - 1)^2}$$

4) y=Arccotx Fonksiyonu

$\text{Arccot } f(x) = \text{Cot}^{-1} f(x)$

$y = \text{Arccot } f(x) \Leftrightarrow x = \text{Cot } y$

$0 < y < \pi, \quad -\infty < x < +\infty$

$(\text{Arccot } x)' = \dfrac{-1}{1 + x^2}$ genel olarak,

$$(\text{Arccot } f(x))' = \frac{-f'(x)}{1 + [f(x)]^2}$$

$y=Sec\ f(x)$ ve $y=Cosec\ f(x)$ fonksiyonların türevleri, bölme kuralından çıkartılır.

$Sec\ f(x) = \dfrac{1}{Cos\ f(x)}$ ve $Cosec\ f(x) = \dfrac{1}{Sin\ f(x)}$ olduğundan

Örneğin : $y = Sec\ x$

$$y = \frac{1}{Cos\ x} \Rightarrow y' = \frac{(1)'\ Cos\ x - 1\ .\ (Cos\ x)'}{(Cos\ x)^2}$$

$$= \frac{0\ .\ Cos\ x - 1\ (-Sin\ x)}{Cos^2 x} = \frac{Sin\ x}{Cos^2 x}$$

Örnek : $y = Arccot\ \sqrt{x}$ ise $\dfrac{dy}{dx} = ?$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(\sqrt{x})'}{1 + (\sqrt{x})^2} = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1 + x} = \frac{-1}{(2\sqrt{x})\ .\ (1 + x)}$$

LOGARİTMA VE ÜSTEL FONKSİYONLARIN TÜREVİ

$y = Log_e x = \ln x \Leftrightarrow x = e^y$ dir.

$n \in N^+$ olmak üzere, $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e = 2{,}7182...$ dir.

1) $(\ln f(x))' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$

Örnek : $y = (\ln x)$ ise $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x}$

$y = \ln x^2$ ise $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(x^2)'}{x^2} = \dfrac{2x}{x^2} = \dfrac{2}{x}$

2) $a \in R^+$ ve $a \neq 1$ olmak üzere

$$(\log_a f(x))' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Örnek : $y = \log_3 x^2$ ise $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\ln 3} \cdot \dfrac{(x^2)'}{x^2} = \dfrac{2x}{x^2 \ln 3} = \dfrac{2}{x \ln 3}$

Örnek : $y = \log_5(Sin\ x^2)$ ise $\dfrac{dy}{dx} = ?$

Çözüm : $\dfrac{1}{\ln 5} \cdot \dfrac{(Sin\ x^2)'}{Sin\ x^2} = \dfrac{2x\ Cos\ x^2}{\ln 5\ .\ Sin\ x^2} = \dfrac{2x}{\ln 5}\ .\ Cot\ x^2$

Üslü fonksiyonların türevi

1) $\left[e^{f(x)}\right]' = f'(x)\ e^{f(x)}$

Örnek : $y = e^{\mathrm{Sin}\,x}$ ise $\dfrac{dy}{dx} = ?$

$$\frac{dy}{dx} = (\mathrm{Sin}\ x)'\ e^{\mathrm{Sin}\,x} = \mathrm{Cos}\ x\ .\ e^{\mathrm{Sin}\,x}$$

2) $a \in R^+$ ve $a \neq 1$ olmak üzere,

$$\left(a^{f(x)}\right)' = f'(x)\ .\ a^{f(x)} \ln a$$

Örnek : $y = 2^{3x^2}$ ise $\dfrac{dy}{dx} = ?$

Çözüm : $\dfrac{dy}{dx} = (3x^2)'\ .\ 2^{3x^2}\ .\ \ln 2$

$= 6x\ .\ 2^{3x^2}\ .\ \ln 2$

3) $f(x) > 0$ ve $y = \left[f(x)\right]^{g(x)}$ ise,

$$\frac{dy}{dx} = y\ .\left(g(x)\ .\ \ln f(x)\right)'$$

Örnek : $y = x^{\mathrm{Cos}\,x}$ ise $y' = ?$

Çözüm : $y' = x^{\mathrm{Cos}\,x}\ .\ \left[\mathrm{Cos}\ x\ .\ \ln x\right]'$

$= x^{\mathrm{Cos}\,x}\left[-\mathrm{Sin}\ x\ .\ \ln x + \frac{1}{x}\ (\mathrm{Cos}\ x)\right]$

Şimdiye kadar türev alma kurallarını öğrendik. Aşağıdaki tabloda ilgili türev alma kuralı ve örnekleri verilmiştir. İnceleyiniz.

SORU	İLGİLİ FORMÜL	ÇÖZÜM
$f(x) = 30$ ise $f'(x) = ?$	$f(x) = C,\ C \in R$ ise $f'(x) = 0$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^2$ ise $f'(x) = ?$	$f(x) = x^n$ ise $f'(x) = nx^{n-1}$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x \cdot \text{Cos } x$ ise $f'(x) = ?$	$f(x) = u \cdot v$ ise $f'(x) = u' \cdot v + uv'$	$f'(x) = (x)' \text{Cos } x + (x)(\text{Cos } x)'$ $= \text{Cos } x - x \text{ Sin } x$
$f(x) = \dfrac{x}{\text{Sin } x}$	$f(x) = \dfrac{u}{v}$ ise $f'(x) = \dfrac{u'v - uv'}{u^2}$	$f'(x) = \dfrac{(x)' \text{Sin } x - x \cdot (\text{Sin } x)'}{\text{Sin}^2 x}$ $= \dfrac{\text{Sin } x - x \text{ Cos } x}{\text{Sin}^2 x}$
$f(x) = x^2,\ g(x) = x - 1$ ise $(gof)'(x) = ?$	$(gof)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$	$(gof)'(x) = 2x$
$x = t,\ y = t^2 - 1,\ \dfrac{dy}{dx} = ?$	$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$	$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2t}{1} = 2t = 2x$
$x^2y + y^2 + 2x = 0$ $\dfrac{dy}{dx} = ?$	Kapalı fonksiyonun türevine bak.	$2xy + x^2y' + 2yy' + 2 = 0$ $y' = -\dfrac{2xy + 2}{x^2 + 2y}$
$y = x^4$ ise $y^{IV}(x) = ?$	n. mertebeden türeve bak	$y' = 4x^3$ $y''' = 24x$ $y'' = 12x^2$ $y^{IV} = 24$
$y = \text{Sin}(\text{Cos } x)$ ise $y' = ?$	$y = \text{Sin } f(x)$ ise $y' = f'(x) \cdot \text{Cos } f(x)$	$y' = (\text{Cos } x)' \text{Cos}(\text{Cos } x)$ $= -\text{Sin } x \cdot \text{Cos}(\text{Cos } x)$
$y = \text{Cos}(\ln x)$ ise $y' = ?$	$y = \text{Cos } f(x)$ ise $y' = -f'(x) \text{ Sin } f(x)$ $y = \ln g(x)$ ise $y' = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$	$y' = -(\ln x)' \text{ Sin } \ln x = -\dfrac{1}{x} \text{ Sin}(\ln x)$
$y = \tan 5x$ ise $y' = ?$	$y = \tan f(x)$ ise $y' = f'(x) \cdot \text{Sec}^2 f(x)$	$y' = 5 \text{ Sec}^2 5x$
$y = \text{Cot } 5x^2$ ise $y' = ?$	$y = \text{Cot } f(x)$ ise $y' = -f'(x) \text{Cosec}^2 f(x)$	$y' = -10x \text{ Cosec}^2 5x^2$
$y = \text{arc Sin}(\text{Cos } x)$ ise $y' = ?$	$y = \text{arc Sin } f(x)$ ise $y' = \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1 - [f(x)]^2}}$	$y' = \dfrac{(\text{Cos } x)'}{\sqrt{1 - \text{Cos}^2 x}} = \dfrac{-\text{Sin } x}{\sqrt{1 - \text{Cos}^2 x}}$
$y = \text{arc Cos}(\ln x)$	$y = \text{arc Cos } f(x)$ ise $y' = \dfrac{-f'(x)}{\sqrt{1 - [f(x)]^2}}$	$y' = \dfrac{-(\ln x)'}{\sqrt{1 - (\ln x)^2}} = \dfrac{-\frac{1}{x}}{\sqrt{1 - (\ln x)^2}}$
$y = \text{arc tan } 2x$	$y' = \dfrac{1}{1 + [f(x)]^2}$	$y' = \dfrac{1}{1 + 4x^2}$
$y = \text{arc Cot } 3x$	$y' = -\dfrac{1}{1 + [f(x)]^2}$	$y' = -\dfrac{1}{1 + 9x^2}$

SORU	İLGİLİ FORMÜL	ÇÖZÜM
$y = \ln(x^2+2)$ ise $y' = ?$	$y = \ln f(x)$ ise $y' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$	$y' = \dfrac{(x^2+2)'}{x^2+2} = \dfrac{2x}{x^2+2}$
$y = \log_3 x^2$ ise $y' = ?$	$y = \log_a f(x)$ ise $y' = \dfrac{1}{\ln a} \cdot \dfrac{f'(x)}{f(x)}$	$y' = \dfrac{1}{\ln 3} \cdot \dfrac{2x}{x^2} = \dfrac{1}{\ln 3}\,\dfrac{2}{x} = \dfrac{2}{x\ln 3}$
$y = e^{\mathrm{Sin}\,x + \mathrm{Cos}\,x}$ ise $y' = ?$	$y = e^{f(x)}$ ise $y' = f'(x)\, e^{f(x)}$	$y' = (\mathrm{Sin}\,x + \mathrm{Cos}\,x)'\, e^{\mathrm{Sin}\,x + \mathrm{Cos}\,x}$ $= (\mathrm{Cos}\,x - \mathrm{Sin}\,x)\, e^{\mathrm{Sin}\,x + \mathrm{Cos}\,x}$
$y = 2^{x^2+3x}$ ise $y' = ?$	$a \in R^+$ ve $a \neq 1$ olmak üzere $y = a^{f(x)}$ ise $y' = f'(x) \,.\, a^{f(x)} \,.\, \mathrm{Ln}a$	$y' = (x^2 + 3x)' \,.\, 2^{x^2+3x} \,.\, \ln 2$ $= (2x+3) \,.\, 2^{x^2+3x} \,.\, \ln 2$
$y = x^{\mathrm{Sin}\,x}$ ise $y' = ?$	$y = f(x) > 0$ ise $y = [f(x)]^{g(x)}$ $y' = y \,.\, (g(x) \,.\, \ln f(x))'$	$y' = x^{\mathrm{Sin}\,x} \,.\, [\mathrm{Sin}\,x \,.\, \ln x]'$ $= x^{\mathrm{Sin}\,x} \,.\, \left[\mathrm{Cos}\,x \ln x + \dfrac{1}{x}\,\mathrm{Sin}\,x\right]$

TÜREVİN LİMİT SORULARINA UYGULANMASI

L' HOSPİTAL KURALI

Eğer $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ limitinde $\dfrac{0}{0}$ ya da $\dfrac{\infty}{\infty}$ belirsizliği varsa,

$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ olur.

Limit hesaplanırken $\frac{\infty}{\infty}$ ya da $\frac{0}{0}$ sonucu bulunursa pay ve paydanın türevi alınır. Eğer yine $\frac{\infty}{\infty}$ ya da $\frac{0}{0}$ sonucu bulunursa yine pay ve paydanın türevi alınır. Sonuç bir reel sayı çıkana dek işlem devam ettirilir.

Örnek : $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = ?$

Çözüm : $\dfrac{1^2 - 1}{1 - 1} = \dfrac{0}{0}$ belirsiz. O hâlde, pay ve paydanın türevini alalım.

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x}{1} = \lim_{x \to 1} 2x = 2 \,.\, 1 = 2$$

Örnek : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\text{Cos } x}{1 - \text{Sin } x} = ?$

Çözüm : $\dfrac{\text{Cos } \frac{\pi}{2}}{1 - \text{Sin } \frac{\pi}{2}} = \dfrac{0}{1 - 1} = \dfrac{0}{0}$ belirsiz. Pay ve paydanın türevini alalım. Yani,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(\text{Cos } x)'}{(1 - \text{Sin } x)'} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\text{Sin } x}{-\text{Cos } x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Sin } x}{\text{Cos } x} = \frac{\text{Sin } \frac{\pi}{2}}{\text{Cos } \frac{\pi}{2}} = \text{Tan } \frac{\pi}{2} = \infty$$

Örnek : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x - 1}{x^2} = ?$

Çözüm : $\dfrac{e^\infty - 1}{\infty^2} = \dfrac{\infty}{\infty}$ belirsiz. Pay ve paydanın türevini alalım.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{2x} = \dfrac{e^{+\infty}}{2 \,.\, \infty} = \dfrac{\infty}{\infty}$ Yine pay ve paydanın türevini alalım.

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{2} = \dfrac{e^\infty}{2} = \dfrac{+\infty}{2} = +\infty$

BİRİNCİ DERECEDEN ALINAN TÜREVİN GEOMETRİK YORUMU

Bir Fonksiyon Grafiğinin Bir Noktasındaki Teğetinin Eğimi

$f: [a, b] \to R$ fonksiyonu, $x_0 \in (a,b)$ olmak üzere x_0 noktasında türevlenebilir fonksiyon ise; f fonksiyonun grafiğinin $(x_0,f(x_0))$ noktasındaki teğetinin eğimi,

$m_t = f'(x_0)$ olarak hesaplanır. Teğetin denklemi ise,

$y - f(x_0) = f'(x_0) \,.\, (x-x_0)$ olur.

Teğete $(x_0, f(x_0))$ noktasında dik olan doğruya, f fonksiyonun grafiğinin $(x_0, f(x_0))$ noktasındaki normali denir. Öyleyse $(x_0, f(x_0))$ noktasnıdaki normalin eğimi,

$$M_N = -\frac{1}{f'(x_0)}$$

olarak hesaplanır. Normalin denklemi ise,

$$y-f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

olur.

Örnek : $8y = x^3 - 12x + 16$ eğrisinin (0, 2) noktasındaki teğet ve normal denklemlerii bulunuz. Bu eğrinin hangi noktasında teğetinin eğimi $\frac{9}{2}$ ye eşittir. Hangi noktadaki teğet x eksenine paraleldir?

Çözüm : $y = \frac{x^3 - 12x + 16}{8}$ olduğundan eğim, $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 12}{8}$

O hâlde, $x = 0$ için teğetin eğimi, $\frac{3 \cdot 0^2 - 12}{8} = -\frac{3}{2}$ dir.

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0) \qquad \left(\begin{array}{cc} 0, & 2 \\ \downarrow & \downarrow \\ x_0 & f(x_0) \end{array} \right)$$

$$y - 2 = -\frac{3}{2}(x - 0)$$

$$y - 2 = -\frac{3}{2}x$$

$$2y + 3x = 4$$

bulunur. Normal, teğete dik olduğundan,

$$M_N = -\frac{1}{f'(x_0)} \text{ idi. O hâlde,}$$

$$M_N = -\frac{1}{-\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

Normalin denklemi;

$$y - f(x_0) = \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \text{ olduğundan,}$$

$$y - 2 = \frac{2}{3} \cdot (x - 0) \text{ buradan}$$

$$2x - 3y + 6 = 0 \text{ denklemi bulunur.}$$

$\frac{3x^2 - 12}{8} = \frac{9}{2}$ olduğu zaman,

$$6x^2 - 24 = 72$$

$$6x^2 = 96$$

$$x^2 = 16$$

$$x = \pm 4 \text{ olur.}$$

Bu değerleri $8y = x^3 - 12x + 16$ denkleminde yerine koyalım.

$x = -4$ için $\quad 8y = (-4)^3 - 12(-4) + 16$

$8y = -64 + 48 + 16$

$y = 0, \quad (-4, 0)$

$x = 4$ için $\quad 8y = (4)^3 - 12(4) + 16$

$8y = 64 - 48 + 16$

$8y = 32$

$y = 4, \quad (4,4)$

O hâlde, $(-4, 0)$ ve $(4, 4)$ noktalarında eğim $\frac{9}{2}$ dir.

Eğim sıfır olduğu yani, $3x^2 - 12 = 0$ olduğu zaman $x = \pm 2$ dir.

O hâlde, $x = \pm 2$ olduğu zaman x eksenine paralel olacaktır. Bu $x = \pm 2$ değerlerini $8y = x^3 - 12x + 16$ denkleminde yerine koyarsak,

$x = -2$ için $\quad 8y = (-2)^3 - 12(-2) + 16$

$8y = -8 + 24 + 16$

$8y = 32$

$y = 4$

$x = 2$ için $\quad 8y = (2)^3 - 12(2) + 16$

$8y = 8 - 24 + 16$

$y = 0$

O hâlde, $(2, 0)$ ve $(-2, 4)$ noktalarında teğet x eksenine paraleldir.

Örnek : $f(x) = x^2 + kx + 8$ fonksiyonun eğrisine, apsisi $x = -1$ olan noktasından çizilen teğet, x ekseni ile pozitif yönde 135° lik açı yaptığına göre $k = ?$

Çözüm : x = -1 noktasındaki teğetin eğimi $f'(-1)$ dir.

$$f(x) = x^2 + kx + 8$$

$$f'(x) = 2x + k$$

$$f'(-1) = -2 + k \qquad \text{(I)}$$

Çizilen teğet, x ekseni ile pozitif yönde 135° lik açı yapıyorsa m = Tan 135,
Tan 135 = -1 olduğundan m = -1. Bu değeri (I) de yerine yazarsak;

$$m = -2 + k \Rightarrow -1 = -2 + k \Rightarrow k = 1 \text{ olarak bulunur.}$$

Örnek : $f(x) = x^3 + kx^2 + x$ fonksiyon eğrisinin, apsisi x = 1 olan noktasındaki teğetin denklemi y + x + 2 = 0 olduğuna göre k nedir?

Çözüm : $f(x) = x^3 + kx^2 + x$

$$f'(x) = 3x^2 + 2kx + 1$$

$$f'(1) = 3 + 2k + 1$$

Bulunan bir değer, f(x) fonksiyonunda x = 1 noktasından çizilen teğetin eğimidir. Yani,

$$f'(1) = m = 4 + 2k$$

Bu teğetin denklemi y + x + 2 = 0

$$y = -x - 2 \qquad (\text{eğim } y = ax + b \text{ eğim } m = a)$$

O hâlde eğim -1 = m olduğundan,

$$f'(1) = m = 4 + 2k = -1$$

$$2k = -5$$

$$k = \frac{-5}{2} \qquad \text{olarak bulunur.}$$

TÜREVİN FİZİKSEL ANLAMI

Bir hareketlinin gittiği yol s = f(t) denklemi ile belli olduğuna göre

a) Hareketlinin t anındaki hızı

$$V_t = \frac{ds}{dt} = f'(t)$$

b) Hareketlinin t anındaki ivmesi

$$a_t = \frac{dv}{dt} = v'(t) = f''(t) \text{ olur.}$$

Örnek : Hareket denklemi $s = \frac{1}{2}t^2 - t$ olan hareketlinin harekete başladığı andan 6 sa-niye sonraki hızını ve ivmesini bulunuz. (Bu denklemde uzunluk metre, zaman saniye ile veriliyor.)

Çözüm

Hızı, $v(t) = f'(t) = t - 1$

$v(6) = 6 - 1 = 5$ m/sn

İvmesi, $a_t = f''(t) = 1$

$f''(6) = 1$ m/sn^2

Örnek : $a \in R$ olmak üzere, yol-zaman denklemi $s(t)=2at^3$ olan bir hareketlinin harekete başladıktan sonra 2 saniye sonraki hızı 24 m/sn olduğuna göre bu hareketlinin 6. saniyedeki aldığı ivmeyi bulalım.

Çözüm : $s'(t) = 6at^2$

$s'(2) = 24a = 24$

$a = 1$

ivme = $s''(t) = 12at$

$= 12 \cdot 1 \cdot 6$

$= 72$ m/sn^2

ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLARIN TÜREVİ

1) Parçalı Fonksiyonların Türevi

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & x < a \text{ ise} \\ h(x), & x \geq a \text{ ise} \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} g'(x), & x < a \text{ ise} \\ h'(x), & x \geq a \text{ ise} \end{cases}$$

Ancak bu fonksiyonların $x = x_0$ noktasından türevli olabilmesi için sağdan ve soldan türevlerinin eşit olması gerekir.

Örnek : $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1, & x < 2 \quad \text{ise} \\ \frac{1}{x}, & x \geq 2 \quad \text{ise} \end{cases}$

$x = 2$ noktasındaki türevini bulunuz.

Çözüm : $x < 2$ için $f'(x) = 6x$ öyleyse, $f'(2^-) = 6 \cdot 2 = 12$

$x \geq 2$ için $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ öyleyse, $f'(2^+) = -\frac{1}{4}$

$12 \neq -\frac{1}{4}$

olduğundan, $x = 2$ noktasında fonksiyonun türevi yoktur.

2) Mutlak Değer Fonksiyonu

Mutlak değer fonksiyonun türevi alınırken mutlak değerin tanımına dikkat edilir. Yani;

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \quad \text{ise} \\ -f(x), & f(x) < 0 \quad \text{ise} \end{cases}$$

Örnek : $f(x) = | x^2 - 6x + 5 |$ ise $f'(4) = ?$, $f'(10) = ?$, $f'(1) = ?$

Çözüm <u>1. yol</u> : Önce fonksiyonu parçalı fonksiyon hâline getirelim.

$x^2 - 6x + 5 = 0$

$(x - 5)(x - 1) = 0$

$x = 5$, $x = 1$

x	$-\infty$	1		5	$+\infty$
$x^2 - 6x + 5$	+	0	-	0	+

$$f'(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 5, & x \leq 1 \quad \text{ise} \\ -x^2 + 6x - 5, & 1 < x < 5 \quad \text{ise} \\ x^2 - 6x + 5, & x \geq 5 \quad \text{ise} \end{cases}$$

Bu durumda,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 6 \ , & x \leq 1 \quad \text{ise} \\ -2x + 6 \ , & 1 < x < 5 \quad \text{ise} \\ 2x - 6 \ , & x \geq 5 \quad \text{ise} \end{cases}$$

$f'(4) = -2 \,.\, 4 + 6 = -2$

$f'(10) = 2 \,.\, 10 - 6 = 14$

$x = 1$ noktası kritik nokta olduğundan,

$$\left.\begin{aligned} f'(1^-) &= 2 \,.\, 1 - 6 = -4 \\ f'(1^+) &= -2 \,.\, (1) + 6 = 4 \end{aligned}\right\} \ x = 1 \text{ noktasında türev yok.}$$

II. yol : $\mathbf{y = |f(x)|}$ **türevi**

$$\mathbf{y' = f'(x) \,.\, \frac{|f(x)|}{f(x)}}$$

Bu durumda,

$$f'(x) = (x^2-6x+5)' \,.\, \frac{|x^2-6x+5|}{x^2-6x+5}$$

$$f'(x) = (2x-6) \,.\, \frac{|x^2-6x+5|}{x^2-6x+5}$$

Örneğin $x=4$ için $x^2-6x+5 < 0$ olduğundan

$$|x^2-6x+5| = -(x^2-6x+5)$$

dolayısıyla

$$\frac{|x^2-6x+5|}{x^2-6x+5} = -1$$

$$f'(4) = (2.4-6) \,.\, (-1) = -2$$

$x^2-6x+5 = (x-5)\,(x-1)$ olduğundan

$x=1$ ve $x=5$ noktalara kritik nokta. O hâlde bu noktalarda türev yok.

Tam Kısım Fonksiyonun Türevi

Eğer, x değeri tam kısmın içini tamsayı yapmıyorsa türev vardır ve türevi sıfırdır.

Örnek : $f(x) = [|3x|]$ $\quad f'(2) = ?$ $\quad f'\left(\frac{1}{2}\right) = ?$

Çözüm : $f'(2) = [|3 . 2|] = 6$ türevi yoktur.

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = [|\,3 . \frac{1}{2}\,|] = [|\,\frac{3}{2}\,|] \quad \text{türev vardır.}$$

$$f'(x) = 0$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

İşaret Fonksiyonun Türevi

İşaret fonksiyonun içini sıfır yapan x değerleri için türev yoktur. x değeri işaret fonksiyonun içini sıfır yapmıyorsa türevi vardır ve türevi sıfırdır.

Örnek : $f(x) = \text{Sgn}\,(2x + 1)$ ise $f'\left(\frac{1}{2}\right)$

$$2 . \frac{1}{2} + 1 = 2 \neq 0$$

$$f'(x) = 0$$

TÜREVİN UYGULAMALARI

Türevlenebilirlik ve Süreklilik

<u>Teorem :</u> $f : [a,b] \rightarrow R$ fonksiyonu $x_0 \in (a,b)$ noktasında türevlenebilir ise ($f'(x_0) \in R$), f fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir.

Bu teoremin karşıtı doğru değildir.

Örnek : $f(x) = |x-1|$ fonksiyonu $x = 1$ noktasında sürekli midir? Türevli midir?

Çözüm : $f(x) = |x - 1| = \begin{cases} x - 1, & x \geq 1 \text{ ise} \\ -x + 1, & x < 1 \text{ ise} \end{cases}$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 1^+} (x - 1) = 0 \\ &\lim_{x\to 1^-} (-x + 1) = 0 \\ &f(1) = |1 - 1| = 0 \end{aligned}\right\} \lim_{x\to 1} f(x) = f(1) \quad \text{olduğundan süreklidir.}$$

Ancak, $x = 1$ noktasında türevli değildir. Çünkü,

$$f'(x) = \begin{cases} +1, & x \geq 1 \text{ ise} \\ -1, & x < 1 \text{ ise} \end{cases}$$

$x = 1$ kritik nokta olduğu için,

$$\left.\begin{aligned} &f'(1^+) = +1 \\ &f'(1^-) = -1 \end{aligned}\right\} f'(1^+) \neq f'(1^-)$$

O hâlde, $x = x_0$ noktasında sürekli fonksiyon $x = x_0$ noktasında türevlenemeyebilir.

Sonuç : $f:[a,b] \to R$ fonksiyonu $x_0 \in (a,b)$ noktasında süreksiz ise f fonksiyonu x_0 noktasında türevlenemez.

$f : [a, b] \to R$ bir fonksiyonu sürekliyse, [a, b] aralığında fonksiyonun aldığı maksimum ve minimum değerlere fonksiyonun ekstremum değerleri denir.

Teorem : $f:[a,b] \to R$ fonksiyonu sürekli ve her $x \in (a,b)$ için türevi olan bir fonksiyon olsun.

a) Eğer her $x \in (a,b)$ için $f'(x) \leq 0$ ise f fonksiyonu monoton azalan, $f'(x) < 0$ ise azalan fonksiyondur.

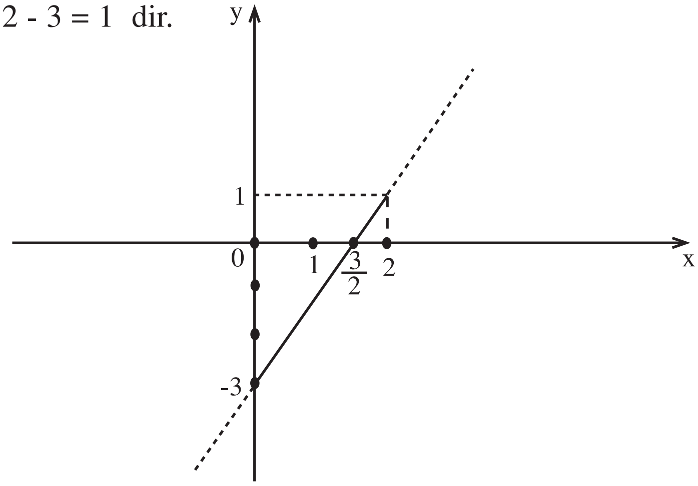
b) Eğer her $x \in (a,b)$ için $f'(x) \geq 0$ ise f fonksiyonu monoton artan, $f'(x) > 0$ ise artan fonksiyondur.

Örnek : 1- $f(x) = 2x - 3$ fonksiyonunun $[0, 2]$ aralığındaki ekstremum değerlerini inceleyiniz.

$f'(x) = 2$ dir. $f'(x) > 0 \Rightarrow$ fonksiyon artandır.

min $f(x) = f(0) = 2 \cdot 0 - 3 = -3$ dür.

max $f(x) = f(2) = 2 \cdot 2 - 3 = 1$ dir.



2. $f(x) = (x - 1)^2 - 1$ fonksiyonunun $[0, 4]$ aralığında ekstremum değerlerini hesaplayınız.

$f'(x) = 2(x - 1)$ fonksiyonu $[0, 1)$ aralığında azalan $(1, 4]$ aralığında artandır.

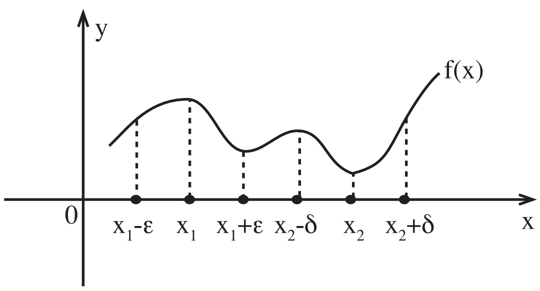
$f(1) = (1 - 1)^2 - 1 = -1$ dir. $f(x)$ in $[0,4]$ aralığındaki minimum değeridir.

$f(4) = (4 - 1)^2 - 1 = 8$ dir. $f(x)$ in $[0,4]$ aralığındaki maksimum değeridir.

Yerel Maksimum, Yerel Minimum

$f(x)$ fonksiyonu bir $(x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon)$ aralığı içinde en küçük değerini x_1 noktasında alıyorsa fonksiyonun x_1 noktasında yerel minimumu vardır. En büyük değerini x_1 noktasında alıyorsa fonksiyonun x_1 noktasında yerel maksimumu vardır.

Yerel minimum veya maksimumun varlığı için bir $\varepsilon > 0$ sayısının bulunması yeterlidir.



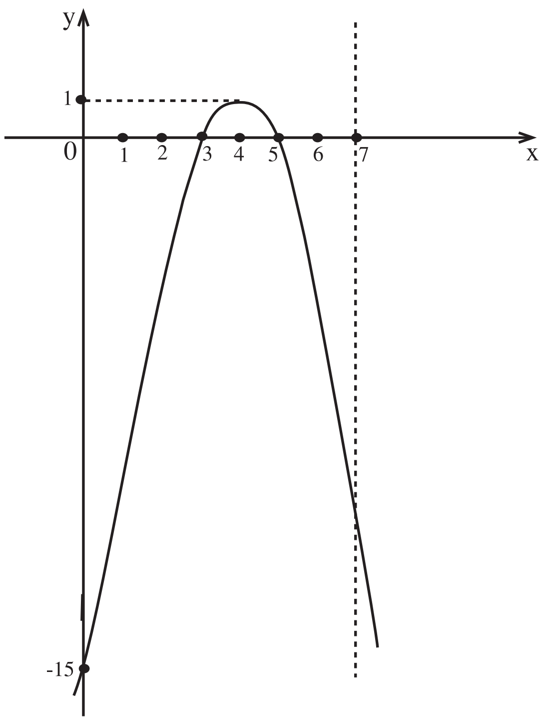
Bir fonksiyonun yerel maksimum ve yerel minimum noktalarına fonksiyonun ektremum noktaları denir.

Teorem : f:[a,b] → R fonksiyonu sürekli ve her x ∈ (a,b) için türevi olan bir fonksiyon olsun.

Eğer x_0∈(a,b) noktası f fonksiyonunun bir yerel ektremum noktası ise $f'(x_0)=0$

Örnek 1: $f(x) = -x^2 + 8x - 15$ fonksiyonunun [0, 7] aralığında sürekli ve türevli olduğu biliniyor. Fonksiyonun maksimum ve minimum değerlerini bulunuz.

$$f(x) = -x^2 + 8x - 15 = -(x-4)^2 + 1$$



Max f(4) = 1 dir.

Min f(0) = -15 dir.

Şekilde x = 4 noktasında bir maksimuma sahip olduğundan

$$f'(x) = -2x + 8 \Rightarrow f'(4) = -2 \cdot 4 + 8 = -8 + 8 = 0 \quad \text{dır.}$$

Örnek 2: f(x) = 2x + 1 fonksiyonu [2, 3] aralında sürekli, (2, 3) aralığında türevlidir. Fakat fonksiyon bu aralık içinde hiçbir noktada türevi sıfır değildir. Çünkü (2, 3) aralığında fonksiyon ekstremuma sahip değildir.

Teorem : (Rolle Teoremi)

f(x), [a, b] de sürekli, (a, b) de türevli bir fonksiyon olsun. f(a) = f(b) ise, bu fonksiyonun türevi (a, b) aralığında en az bir x_1 noktasında sıfır değerini alır.

Örnek : $f(x) = x^2 + 4x + 3$ olsun. $x_1 \in (-5, 1)$ için $f'(x_1) = 0$ Rolle teoremini kullanarak gösterelim.

Çözüm : $f(-5) = (-5)^2 + 4(-5) + 3 = 8$; $f(1) = 1^2 + 4 . 1 + 3 = 8$ olduğundan

$\exists x \in (-5,1)$ için $f'(x_1) = 0$ olur.

$f'(x) = 2x + 4 = 0 \Rightarrow x = -2 \in (-5, 1)$ ve $f'(-2) = -2 . 2 + 4 = 0$ dır.

Örnek : $f(x) = x - [| x |]$ fonksiyonuna [3, 4] aralığında Rolle Teoremi kullanılamadığını gösterelim.

Çözüm : $f(3) = 3 - [| (3) |] = 3 - 3 = 0$, $f(4) = 4 - [(4)] = 4 - 4 = 0$

Fonksiyon (3, 4) te türevlidir. Fakat fonksiyon (3, 4) te sürekli olmasına rağmen [3, 4] de sürekli değildir.

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} \left(x - [| 4 |]\right) = \lim_{x\to 4^-} (x - 3) = 1$$

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} \left(x - [| 4 |]\right) = \lim_{x\to 4^+} (x - 4) = 0$$

Fonksiyon $x = 4$ noktasında sürekli değildir. Fonksiyona bu aralıkta Rolle Teoremi uygulanamaz.

Teorem : (Ortalama Değer Teoremi)

$f(x)$ fonksiyonu [a, b] de sürekli ve (a, b) de türevli ise

$$\exists x_1 \in (a, b) \text{ için } f'(x_1) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ dır.}$$

Örnek : 1- $y = 2x^2 - 3x - 7$ fonksiyonunda [2,4] aralığında ortalama değer teoremini uygulayalım.

Çözüm : f(x) fonksiyonu $(-\infty, \infty)$ aralığında sürekli ve türevlidir.

$$f(2) = 2 \,.\, 2^2 - 3 \,.\, 2 - 7 = -5$$

$$f(4) = 2 \,.\, 4^2 - 3 \,.\, 4 - 7 = 13$$

$$f'(x_1) = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{13 + 5}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

$f'(x_1) = 4x - 3 = 9$ ise $4x = 12 \Rightarrow x = 3$ tür. $3 \in (2, 4)$ olur.

Örnek : 2- $f(x) = \text{Sin}\,(\pi x) + \frac{1}{2}x$ fonksiyonuna $[-3, 2]$ aralığında ortalama değer teoremini uygulayınız.

$$f(a) = f(-3) = \text{Sin}\,(-3\pi) + \left(\frac{-3}{2}\right) = -\text{Sin}\,3\pi - \frac{3}{2} = 0 - \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$f(b) = f(2) = \text{Sin}\,(2\pi) + \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}} = 0 + 1 = 1$$

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(2) - f(-3)}{2 - (-3)} = \frac{1 + \frac{3}{2}}{5} = \frac{\cancel{5}}{2} \times \frac{1}{\cancel{5}} = \frac{1}{2}$$

$$f'(x_0) = \pi\,\text{Cos}\,\pi x + \cancel{\frac{1}{2}} = \cancel{\frac{1}{2}} \Rightarrow \text{Cos}\,\pi x = 0 \Rightarrow$$

$$\text{Cos}\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) = \text{Cos}\,\pi x \Rightarrow \pi x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \frac{1}{2} + k$$

$k = -3, -2, -1, 0, 1$

$$x_1 = \frac{1}{2} - 3 = -\frac{5}{2}, \quad x_2 = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}, \quad x_3 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}, \quad x_4 = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2},$$

$x_5 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$ değerleri elde edilir.

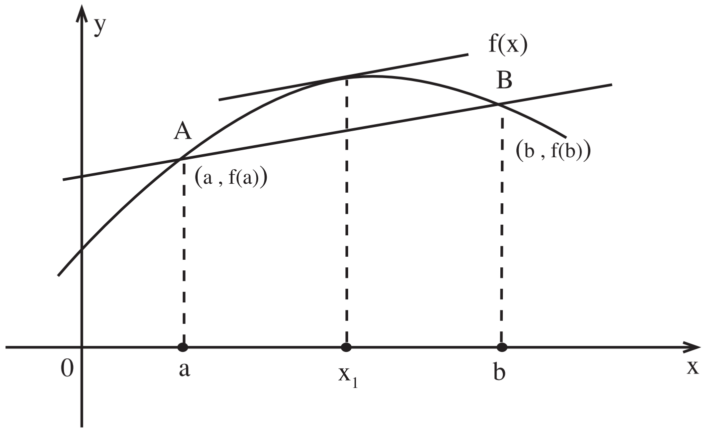
$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in (-3, 2)$ aralığında ortalama değer teoremini sağlayan beş tane nokta vardır.

Ortalama Değer Teoreminin Geometrik Anlamı

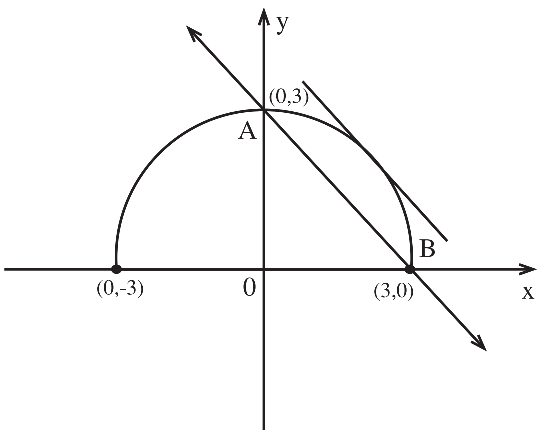
f(x) in iki noktası A (a, f(a)) ve B(b, f(b)) olsun.

$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, AB doğrusunun eğimidir. $\exists x_1 \in (a, b)$ için

$f'(x_1) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ demek, f(x) eğrisine A ile B arasındaki en az bir x_1 noktasından AB ye paralel bir teğet çizilebilir.



Örnek : $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ yarım çemberinde A(0, 3), B (3, 0) verilsin. Eğri üzerindeki bir noktadan AB doğrusuna paralel bir teğet çizmek mümkün müdür? Öyleyse, teğetin denklemini yazınız.



$$f(x) = \sqrt{9 - x^2} \Rightarrow y^2 + x^2 = 9$$

AB doğrusuna paralel teğetin değme noktasının apsisi (0, 3) aralığında ortalama değerini aldığı noktadır. f(x) fonksiyonu [0, 3] de sürekli ve (0, 3) de türevli olduğundan Ortalama Değer Teoremini uygulayabiliriz.

$f(3) = 0$ ve $f(0) = 3$

$$f'(x) = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{0 - 3}{3 - 0} = -1 \Rightarrow f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{9 - x^2}} \Rightarrow -\frac{x}{\sqrt{9 - x^2}} = -1 \Rightarrow$$

$$\sqrt{9 - x^2} = x \Rightarrow 9 - x^2 = x^2 \Rightarrow 2x^2 = 9 \Rightarrow x^2 = \frac{9}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$-\frac{3}{\sqrt{2}} \notin (0, 3) \wedge \frac{3}{\sqrt{2}} \in (0, 3) \Rightarrow x_0 = \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow y_0 = \frac{3}{\sqrt{2}}$ dir. Çizilen teğetin eğimi AB doğrusunun eğimine eşit olup $m = -1$ dir.

$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - \frac{3\sqrt{2}}{2} = -1\left(x - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow y = -x + 3\sqrt{2}$ bulunur.

ÖRNEKLER

Örnek 1- $y = e^{(x-3)^2}$ fonksiyonuna (2, 4) da Rolle Teoremini uygulayınız.

Çözüm : f(x) fonksiyonu [2, 4] aralığında sürekli, (2, 4) aralığında türevlidir.

$$\left.\begin{array}{l} f(2) = e^{(2-3)^2} = e^{(-1)^2} = e^1 = e \\ f(4) = e^{(4-3)^2} = e^{(1)^2} = e^1 = e \end{array}\right\} \Rightarrow f(2) = f(4)$$ olduğundan Rolle Teoremi gerçeklenir.

$f'(x) = 2(x - 3) \cdot e^{(x-3)^2} = 0 \Rightarrow (e^{(x-3)^2} = 0$ olamaz$)$, $2(x - 3) = 0$

$\Rightarrow x = 3 \in (2, 4)$ için $f'(3) = 0$ dır.

Örnek : 2- $f(x) = x^2 + 7x + 3$ fonksiyonuna (1, 7) aralığında Ortalama Değer Teoremini uygulayınız.

Çözüm : $f(1) = 1^2 + 7 \cdot 1 + 3 = 11$

$f(7) = 7^2 + 7 \cdot 7 + 3 = 101$

$$f'(x) = \frac{f(7) - f(1)}{7 - 1} = \frac{101 - 11}{6} = \frac{90}{6} = 15$$

$f'(x) = 2x + 7 = 15 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4 \in (1, 7)$ için

Örnek : 3- $f(x) = x^3 + 6x$ fonksiyonuna (2, 4) aralığında Ortalama Değer Teoremini uygulayınız.

Çözüm : $f(2) = 2^3 + 6 \cdot 2 = 8 + 12 = 20$

$f(4) = 4^3 + 6 \cdot 4 = 64 + 24 = 88$

$$f'(x) = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{88 - 20}{2} = 34$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6 = 34 \Rightarrow 3x^2 = 28 \Rightarrow x^2 = \frac{28}{3} \Rightarrow$$

$$x = \pm\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \pm 2\sqrt{\frac{7}{3}}, \qquad x_1 = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}} \in (2, 4), \qquad x_2 = \frac{-2\sqrt{7}}{\sqrt{3}} \notin (2, 4) \text{ dür.}$$

Örnek : 4- $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun (p, q) aralığında Ortalama Değer Teoremini sağlayan x değerinin $x = \frac{p+q}{2}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm : $f(p) = ap^2 + bp + c$

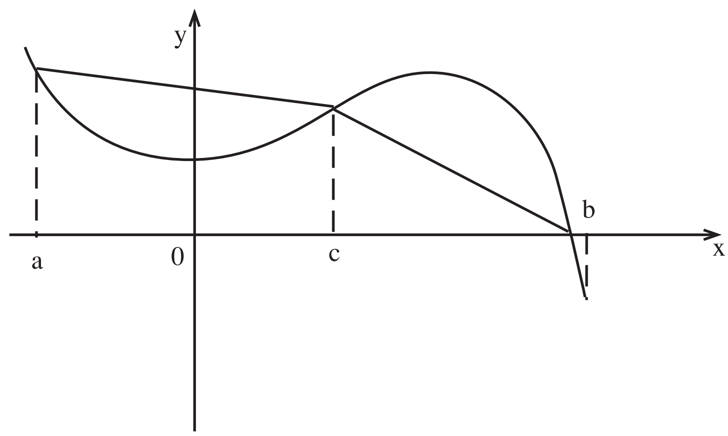
$$f(q) = aq^2 + bq + c$$

$$f'(x) = \frac{f(q) - f(p)}{q - p} = \frac{a(q^2 - p^2) + b(q - p)}{q - p} = a(q + p) + b$$

$$f'(x) = 2\cancel{a}x + \cancel{b} = \cancel{a}(q + p) + \cancel{b} \Rightarrow x = \frac{q + p}{2} \text{ bulunur.}$$

İKİNCİ TÜREVİN GEOMETRİK ANLAMI

f: [a, b] → R fonksiyonu sürekli, türevi olan bir fonksiyon olsun. Eğer fonksiyonun grafiği üzerinde alınan her hangi iki noktayı birleştiren kiriş daima grafiğin üzerinde kalıyorsa, f fonksiyonuna yukarı bükey veya konveks eğer kiriş daima grafiğin altında kalıyorsa f fonksiyonuna aşağı bükey veya konkav denir.

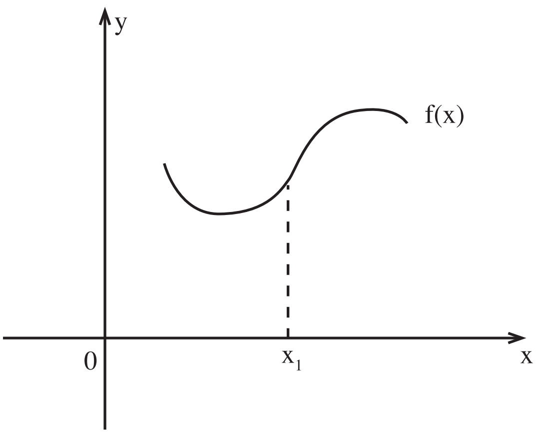


Şekilde f fonksiyonu (a, c) aralığında yukarı bükey (c, b) aralığında aşağı bükeydir.

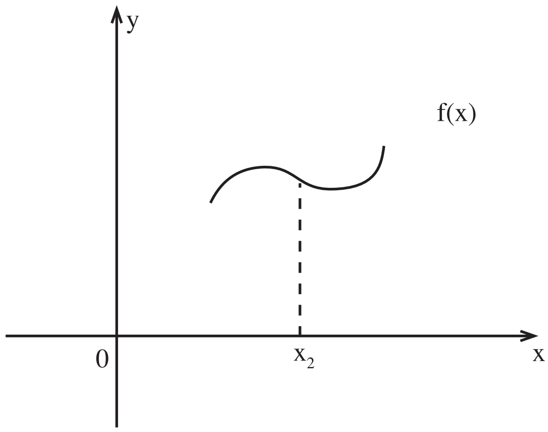
a) $f'(x_0) = 0$ ve $f''(x_0) < 0$ ise f fonksiyonu x_0 noktasında $f(x_0)$ yerel maksimum değerini alır.

b) $f'(x_0) = 0$ ve $f''(x_0) > 0$ ise f fonksiyonu x_0 noktasında $f(x_0)$ yerel minimum değerini alır.

Eğrinin konvekslikten konkavlığa veya konkavlıktan konveksliğe geçtiği noktaya dönüm noktası denir.



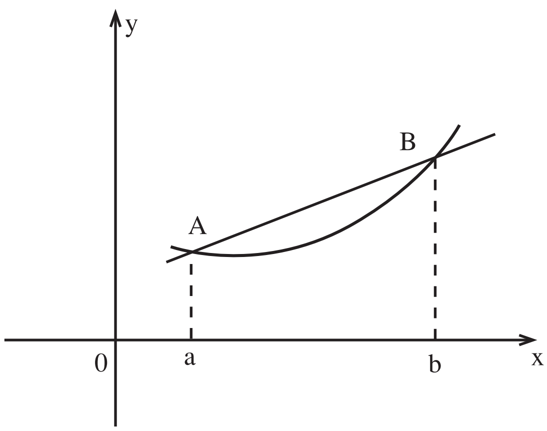
Eğrilik konvekslikten konkavlığa geçmektedir. $x=x_1$ D.N. dır.



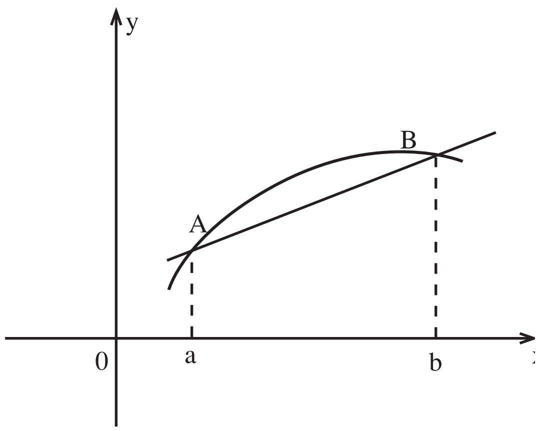
Eğrilik konkavlıktan konveksliğe geçmektedir. $x=x_2$ D.N. dır.

İkinci türevin pozitif olduğu aralıkta f(x) in grafiğinde eğrilik yukarıya doğru veya konvekstir.

İkinci türevin negatif olduğu aralıkta f(x) in grafiğinde eğrilik aşağıya doğru veya konkavdır.



Konveks



Konkav

Örnekler : 1- $y = (x - 2)^2 + 3$ fonksiyonunun $x = 2$ noktasında minimum değerini aldığını gösteriniz.

Çözüm : $y' = 2(x - 2)$; $y' = 0 \Rightarrow 2(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow$

$f''(x) = 2 > 0$ olduğundan **yerel minimum** vardır.

2- $f(x) = x^2 + 2x - 2$ fonksiyonunun $x = -1$ de maksimum veya minimumunun bulunup, bulunmadığını araştırınız.

Çözüm : $f' = 2x + 2$; $f'(x) = 0 \Rightarrow 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow$

$f''(x) = 2 > 0$ olduğundan **yerel minimum** vardır.

3- $f(x) = -(x - 2)^4$ fonksiyonunun $x = 2$ de **dönüm noktasının** bulunup bulunmadığını araştırınız.

Çözüm : $f'(x) = -4(x - 2)^3$; $f'(x) = 0 \Rightarrow -4(x - 2)^3 = 0 \Rightarrow x = 2,$

$f''(x) = -12(x - 2) \Rightarrow f''(2) = -12(2 - 2) = 0 \Rightarrow$

$f(x)$ in $x = 2$ de dönüm noktası vardır.

4- $f(x) = x^3 - 7x^2 - 3x + 2$ fonksiyonunun konkav ve konveks olduğu bölgeleri bulunuz.

Çözüm : $f'(x) = 3x^2 - 14x - 3$

$f''(x) = 6x - 14 \Rightarrow f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 14 = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{3}$

x	$-\infty$	$\frac{7}{3}$	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
	Konkav	**D.N.**	**Konveks**

5- $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ fonksiyonunun ekstremum noktalarını bulunuz.

Çözüm : $f'(x) = 3x^2 + 6x$; $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow 3x(x + 2) = 0$

$x_1 = 0, \ x_2 = -2$

$f(0) = -1, \ f(-2) = (-2)^3 + 3\,(-2)^2 - 1 = -8 + 12 - 1 = -9 + 12 = 3$

$f''(x) = 6x + 6$

$f''(0) = 6 \,.\, 0 + 6 = 6 > 0$ olduğundan x=0 da minimum değerini alır.

$f''(-2) = 6 \,.\, (-2) + 6 = -12 + 6 = -6 < 0$ olduğundan x=-2 de maksimum değerini alır.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$
			max.		**min.**		

6- $f(x) = x^3 + 6x^2 - 4$ fonksiyonunun eksrtemum noktalarını maksimum ve mini-mum değerini bulunuz.

Çözüm : $f'(x) = 3x^2 + 12x$; $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x(x + 4) = 0 \Rightarrow$

$x_1 = 0, x_2 = -4$

$y_1 = -4, y_2 = 28$

$f''(x) = 6x + 12$

$f''(0) = 12 > 0$ olduğundan x=0 da minimum değerini alır.

$f''(-4) = -12 < 0$ olduğundan x=-4 te maksimum değerini alır.

x	$-\infty$		-4		0		$+\infty$
y'		+		-		+	
y	$-\infty$	$\nearrow$	28	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$
			max.		**min.**		

MAKSİMUM VE MİNİMUM PROBLEMLERİNE AİT ÖRNEKLER

Örnekler : 1- Çarpımları 1 olan pozitif iki sayının toplamının minimum olması için bu iki sayı ne olmalıdır?

Çözüm :

Sayılara x, z dersek $x \,.\, z = 1$

$y = x + z$ dir.

$x \,.\, z = 1 \Rightarrow \frac{1}{x} = z$ dir. $y = x + \frac{1}{x}$ olur. $y' = 1 - \frac{1}{x^2}$ dir.

$y' = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x_1 = 1,\ x_1 = -1$ sayılar pozitif olacağından

$x = 1$ dir. $x \,.\, z = 1$ den $z = 1$ dir.

$y = x + z \Rightarrow y = 1 + 1 = 2$ olarak bulunur.

$y' = \frac{x^2 - 1}{x^2}$ ise $y'' = \frac{2}{x^3} \Rightarrow x = 1$ için $y'' = \frac{2}{1^3} = 2 > 0$

olduğundan minimum olur.

2- Toplamları iki ve çarpımları maksimum olan pozitif iki sayıyı bulunuz.

Çözüm : Sayılar: x ve z olsun. $x + z = 2$ ve $y = z \,.\, x$ maksimum olmalıdır.

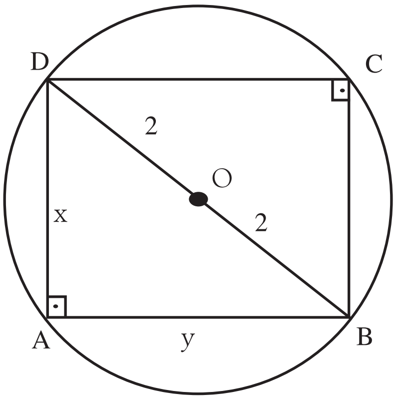
$z = 2 - x \Rightarrow y = x(2 - x) = -x^2 + 2x \Rightarrow y' = -2x + 2 \Rightarrow$

$-2(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 1$ dir. $x + z = 2 \Rightarrow z = 1$ dir. $y = 1 \,.\, 1 = 1$ bulunur.

$y'' = -2 < 0$ dır. $x = 1$ için maksimumu vardır.

3- $x^2 + y^2 = 4$ çemberi içine bir dikdörtgen yerleştirilmek isteniyor. Dikdörtgenin çevresinin maksimum olması için dikdörtgenin kenar uzunlukları ne olmalıdır?

Çözüm :



Çemberde böyle bir dikdörtgenin köşegenleri merkezden geçer.

$x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow r^2 = 4 \Rightarrow r = 2$ dir.

$\widehat{DAB}$ dik üçgeninde Pisagor Teoremi $x^2 + y^2 = 4^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 16$

Çevresi : $z = 2(x + y)$ dir. $y = \sqrt{16 - x^2}$ olur.

$$z = 2\left(x + \sqrt{16 - x^2}\right) \Rightarrow z' = 2 - \frac{2x}{\sqrt{16 - x^2}} \Rightarrow z' = 0 \Rightarrow$$

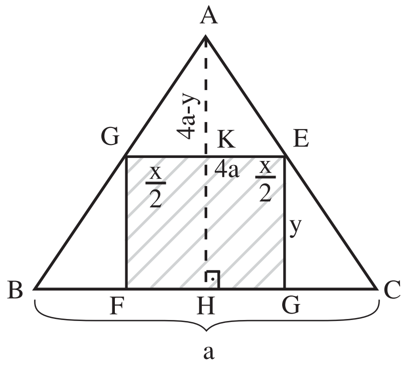
$$\frac{2x}{\sqrt{16 - x^2}} = 2 \Rightarrow x = \sqrt{16 - x^2} \Rightarrow 16 - x^2 = x^2 \Rightarrow 2x^2 = 16 \Rightarrow x^2 = 8$$

$$\Rightarrow x = 2\sqrt{2} \Rightarrow y = \sqrt{16 - 8} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \quad \text{dir.}$$

Maksimum çevre : $z = 2(x + y) = \left(2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\right)2 = 8\sqrt{2}$ dir.

4- $|AB| = |AC|$ olan bir üçgende $|BC| = a$ dır. A köşesinden a kenarına indirilen dikme 4a dır. Bu üçgenin içine bir dikdörtgen yerleştiriliyor. Bu dikdörtgenin alanının maksimum olması için kenarları ne olmalıdır, a cinsinden bulunuz.

Çözüm :



$|AB| = |AC|, \ |BC| = a$ ve $|AH| = 4a$

Dikdörtgenin kenar uzunluklarına x ve y diyelim.

$A\widehat{GK} \sim A\widehat{BH}$ dir.

$\dfrac{\frac{x}{2}}{\frac{a}{2}} = \dfrac{4a - y}{4a} \Rightarrow x = a - \dfrac{y}{4}$

$S = x \cdot y = \left(a - \dfrac{y}{4}\right) \cdot y = ay - \dfrac{y^2}{4}$

$S = ay - \dfrac{y^2}{4} \Rightarrow \dfrac{ds}{dy} = S'(y) = a - \dfrac{1}{4} \cdot 2 \cdot y = a - \dfrac{y}{2}$

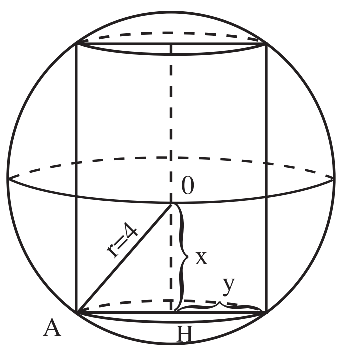
$\dfrac{ds}{dy} = 0 \Rightarrow y = 2a$ ve $x = a - \dfrac{2a}{4} = a - \dfrac{a}{2} = \dfrac{a}{2}$

$y = 2a, \ x = \dfrac{a}{2}$ olmalıdır.

$S''(y) = -\dfrac{1}{2} < 0$ olduğundan $x = \dfrac{a}{2}$, $y = 2a$ için S' alanı maksimum olur.

5- Yarıçapı 4 olan küre içine yerleştirilen maksimum hacimli dönel silindirin hacmini bulunuz.

Çözüm :



$|AH| = y$, $|OH| = x$ olsun. $\widehat{OAH}$ dik üçgeninde Pisagor bağıntısından $x^2 + y^2 = 16$ dır.

Silindirin hacmi : $V = \pi y^2 . (2x) \Rightarrow V = \pi . (16 - x^2) . 2x$

$V = 16\pi . 2x - 2\pi x^3 \Rightarrow V = 32\pi x - 2\pi x^3$

$V'(x) = 32\pi - 6\pi x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{32}{6} = \frac{16}{3} \Rightarrow x = \pm \frac{4\sqrt{3}}{3}$

$\left(-\frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ alınmaz}\right)$ $x = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ tür. $\Rightarrow y^2 = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3} \Rightarrow y = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow y = 4 . \sqrt{\frac{2}{3}}$ dür.

$V = \pi . \frac{32}{3} . 2 . \frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{256\sqrt{3}\,\pi}{9}$ bulunur.

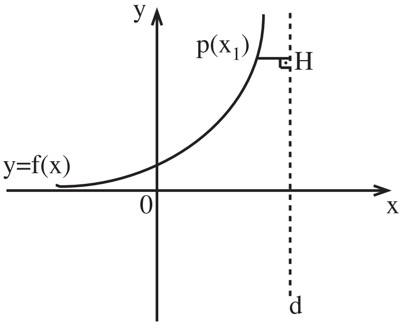
$V''(x) = -12\pi x \Rightarrow V''\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right) = -\overset{4}{\cancel{12}} . \pi . \frac{4\sqrt{3}}{\cancel{3}_{1}} = -16\sqrt{3}\pi < 0$

olduğundan hacim maksimum olur.

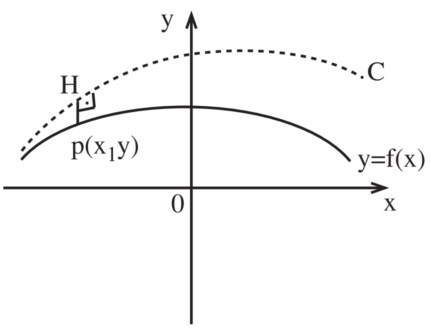
FONKSİYONLARDA ASİMPTOT BULMA

y=f(x) fonksiyonunun grafiği üzerindeki değişken bir p(x,y) noktası alalım. Eğer, eğrinin en az bir kolu sonsuza uzanıyorsa ve p noktasının d doğrusuna veya c eğrisine olan uzaklığı sıfıra yaklaşıyorsa, alınan d doğrusuna veya c eğrisine, y=f(x) fonksiyonun asimptotu denir.

Aşağıdaki şekillerde yukarıdaki tanım açık olarak görülmektedir.



d doğrusu y=f(x)in doğru asimptotudur



c eğrisi y=f(x) eğrisinin eğri asimptotudur

Düşey Asimptotun Bulunması

$y=\dfrac{p(x)}{Q(x)}$ şeklindeki rasyonel fonksiyonlarda, $Q(x)=0$ denkleminin $x=a$ kökü için $p(a)\neq 0$ oluyorsa, denklemi $x=a$ olan doğruya bu fonksiyonun düşey asimtotu denir.

Örnek : $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$ fonksiyonunun düşey asimptotunu bulalım.

Çözüm : $x - 1 = 0$

$x = 1, \quad 2 . 1 +1 = 3 \neq 0$ olduğundan

$x = 1$ doğrusu düşey asimptotdur.

Yatay Asimptotun Bulunması

y=f(x) fonksiyonu için, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b \in R$ veya $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b \in R$ ise, denklemi y=b olan doğruya, y=f(x) fonksiyonun yatay asimptotu denir.

Örnek : $f(x) = \dfrac{5x^2+4x-1}{3x^2+2x+1}$ fonksiyonunun yatay asimptotunu bulalım.

Çözüm : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x^2+4x-1}{3x^2+2x+1} = \dfrac{5}{3}$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{5x^2+4x-1}{3x^2+2x+1} = \frac{5}{3}$$

o hâlde $y=\dfrac{5}{3}$ olan doğru f(x) fonksiyonun yatay asimptotudur.

Örnek : $f(x) = \dfrac{x^2+1}{3x-1}$ fonksiyonun yatay asimptotunun olup olmadığını araştıralım.

Çözüm :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{3x-1} = +\infty \notin R$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{3x-1} = -\infty \notin R$$

f(x) fonksiyonunun yatay asimptotu yoktur.

Eğik ve Eğri Asimptotların Bulunması

Bir y = f(x) fonksiyonu için $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ oluyorsa, fonksiyonun eğik veya eğri asimptotu vardır. Rasyonel fonksiyonlarda eğik veya eğri asimptotu bulmak için pay paydaya bölünür. Bulunan bölüm, fonksiyonun eğik veya eğri asimptotudur.

Eğer, bölüm birinci dereceden polinom fonksiyonu ise eğik, en az ikinci dereceden polinom fonksiyonu ise eğri asimptotudur.

Örnek : $f(x) = \dfrac{x^2+3x-2}{x+1}$ fonksiyonunun eğik asimptotunu bulalım.

Çözüm :

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2+3x-2}{x+1} = \infty$$

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 3x - 2 & x+1 \\ \cline{2-2} \underline{- \ \pm x^2 \pm x \quad} & x+2 \\ +2x - 2 & \\ \underline{- \ \pm 2x \pm 2 \quad} & \\ -4 & \end{array}$$

$$\frac{x^2+3x-2}{x+1} = x+2 - \frac{4}{x+1}$$

Burada, g(x) = x+2 birinci dereceden olduğu için g(x) eğik asimptotdur.

Örnek : $f(x) = \dfrac{x^3+3x^2-5}{x+1}$ fonksiyonunun eğik ya da eğri asimptotunun var olup olmadığını belirleyiniz.

Çözüm : $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+3x^2-5}{x+1} = \infty$

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 3x^2 - 5 & x+1 \\ \cline{2-2} -\ \pm x^3 \pm x^2 & x^2+2x \\ \hline 2x^2 - 5 & \\ -\ \pm 2x^2 \pm 2x & \\ \hline -2x - 5 & \end{array}$$

$$\frac{x^3+3x^2-5}{x+1} = x^2 + 2x - \frac{2x+5}{x+1}$$

Burada $g(x) = x^2+2x$ ikinci dereceden olduğu için $g(x)$ eğri asimptot vardır.

Örnekler :

1- $f(x) = \dfrac{x-2}{x-3}$ fonksiyonunun asimptotlarını bulunuz.

a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x-2}{x-3} = 1$ yatay asimptotdur.

b) $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$ düşey asimptotdur.

2- $f(x) = \dfrac{(x-2)^3}{x-1}$ fonksiyonunun asimptotlarını bulunuz.

a) $y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{(x-2)^3}{x-1} = \infty$ yatay asimptotu yoktur.

b) $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ düşey asimptotdur.

c) $\dfrac{(x-2)^3}{x-1} = x^2 - 5x + 7 - \dfrac{1}{x-1} \Rightarrow y = x^2 - 5x + 7$ fonksiyonun eğri asimptotudur.

GRAFİK ÇİZİMLERİ

Bir fonksiyonun grafiğini çizerken yapılacak işlemler:

1. Fonksiyonun tanım aralığı bulunur.

2. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$ hesaplanır.

3. Varsa asimptotları bulunur.

4. Varsa eksenlerin kestiği noktalar bulunur.

5. Ekstremum noktaları bulunur.

6. Bulunan değerler bir tabloda gösterilir.

7. Tablodan yararlanılarak grafik çizilir.

Polinom Fonksiyonların Grafiği

Örnekler: 1 - $y = x^4 - 2x^2 + 1$ fonksiyonunun değişimini inceleyiniz, grafiğini çiziniz.

Çözüm

1) Fonksiyon $(-\infty , +\infty)$ tanımlıdır. (Çünkü polinom fonksiyondur.)

2) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$ dur.

3) Asimptot yoktur.

4) $x = 0$ için $y = 1$

$y = 0$ için $x^4 - 2x^2 + 1 = 0 \Rightarrow (x^2 - 1)^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

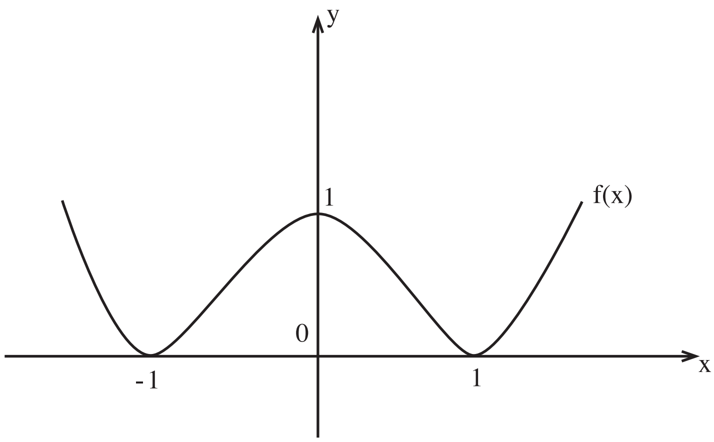
5) $y' = 4x^3 - 4x \Rightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x(4x^2 - 4) = 0 \Rightarrow$

$x_1 = 0$ ve $4x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x_2 = 1,\ \ x_3 = -1$ dir. Şimdi 2. türevi alıp, sıfıra eşitleyelim.

6)

x	-∞	-1			0			1	+∞
y´	-	0	+	+	0	-	-	0	+
y	+∞ ↘	0	↗	↗	1	↘	↘	0	↗ +∞
		min.			**max.**			**min.**	

Tablonun Okunması : Fonksiyon (- ∞,+∞) bölgesinden gelerek (-1,0) noktasın uğrar ve (0,1) noktasına ulaşır. Buradan (1,0) noktasından kıvrılarak (∞,∞) doğru ilerler. Grafik;



2- $y = x^3 + 2x^2 - x - 2$ fonksiyonunun değişimini inceleyiniz. Grafiğini çiziniz.

Çözüm

1) Fonksiyon (-∞, +∞) aralığında tanımlıdır.

2) $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ dur.

3) Asimptot yoktur.

4) $x = 0$ için $y = -2$

$y = 0$ için $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x^2 (x + 2) - (x + 2) = 0 \Rightarrow$

$(x + 2)(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = -2, \ x_2 = -1 \quad x_3 = 1$

5) $y' = 3x^2 + 4x - 1 \Rightarrow \; y' = 0$ için $3x^2 + 4x - 1 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 4 \,.\, 3}}{6} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{7}}{6} = \frac{-2 \pm \sqrt{7}}{3} \Rightarrow x_1 = \frac{-2 - \sqrt{7}}{3},\; x_2 = \frac{-2 + \sqrt{7}}{3}$$

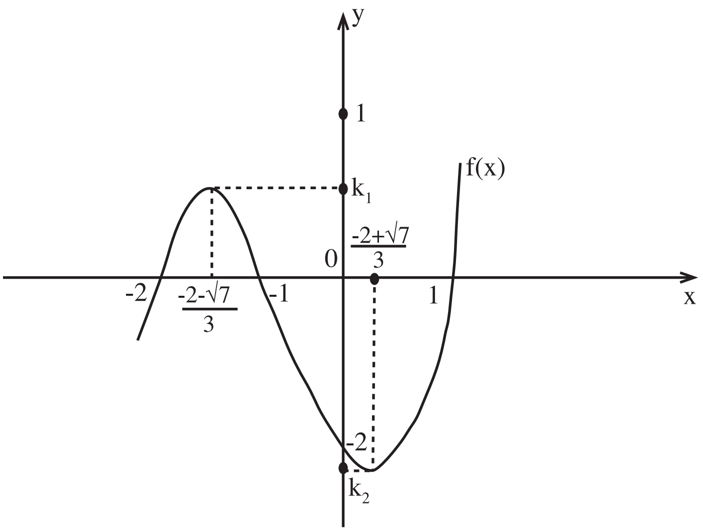
$$y_1 = f(x_1) = \left(\frac{-2 - \sqrt{7}}{3}\right) = k_1, \quad y_2 = f(x_2) = f\left(\frac{-2 + \sqrt{7}}{3}\right) = k_2$$

6)

x	$-\infty$		-2		$\frac{-2-\sqrt{7}}{3}$		-1		0		$\frac{-2+\sqrt{7}}{3}$		1		$+\infty$
y'		+	+	+	0	-	-	-	-		0	+		+	
y	$-\infty$	↗	0	↗	k_1	↘	0	↘	-2	↘	k_2	↗	0	↗	$+\infty$

Tablonun Okunması : (- ∞,-∞) dan başlayan fonksiyon (-2,0) noktasından geçer ve $\left(\frac{-2-\sqrt{7}}{3}, k_1\right)$ noktasında maksimum değerini aldıktan sonra (-1,0) noktasına uğrar. Fonksiyon (0,-2) noktalarına uğradıktan sonra $\left(\frac{-2+\sqrt{7}}{3}, k_2\right)$ noktasında minimum değerini alır ve (1,0) noktasına uğrayarak (∞, ∞) yönüne doğru ilerler.

7)



İrrasyonel Fonksiyonların Grafiği

$y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ biçimindeki bir fonksiyonun grafiği çizilirken aşağıdaki durumlar dikkate alınmalıdır.

a) $ax^2 + bx + c \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm bölgesi fonksiyonun tanım kümesidir.

b) $a > 0$ ise $y = \mp\sqrt{a}\left|x + \frac{b}{2a}\right|$ eğik asimptot

$a < 0$ ise eğik asimtot yok.

c) $y' = 0$ dan yerel ekstremum noktaları bulunur.

Örnekler : 1- $y = \sqrt{x^2 - 3x} + 2$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

1) $x^2 - 3x \geq 0 \Rightarrow x(x - 3) \geq 0 \Rightarrow x(x - 3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 3$

x	$-\infty$	0		3		$+\infty$
x	-	0	+		+	
x-3	-		-	0	+	
$x(x-3) \geq 0$	+		-		+	

fonksiyon tanımsız

Tanım kümesi : $(-\infty, 0] \cup [3, \infty)$ dur.

2) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\sqrt{x^2 - 3x} + 2\right) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} |x| \sqrt{1 - \frac{3}{x}} + 2 = \pm\infty$

3) $y = \sqrt{ax^2 \pm bx + c}$ formundaki bir fonksiyonun asimptotu $y = \left|x \pm \frac{b}{2a}\right|$ formundadır.

$y = \sqrt{x^2 - 3x} + 2 \Rightarrow y = \left|x - \frac{3}{2}\right| + 2 \Rightarrow$

$y_1 = \left(x - \frac{3}{2}\right) + 2 = x + \frac{1}{2}$

$y_2 = -\left(x - \frac{3}{2}\right) + 2 = -x + \frac{7}{2}$ doğruları fonksiyonun eğik asimptotlarıdır.

4) $x = 0$ için $y = 2$

$y = 0$ için

$f(0) = 2$; $f(3) = 2$ dir.

5) $f'(x) = y' = \dfrac{2x - 3}{2 \cdot \sqrt{x^2 - 3x}} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{3}{2}$

tanım bölgeleri dışında kalır.

$x > 3$ için $f'(x) > 0$ dır.

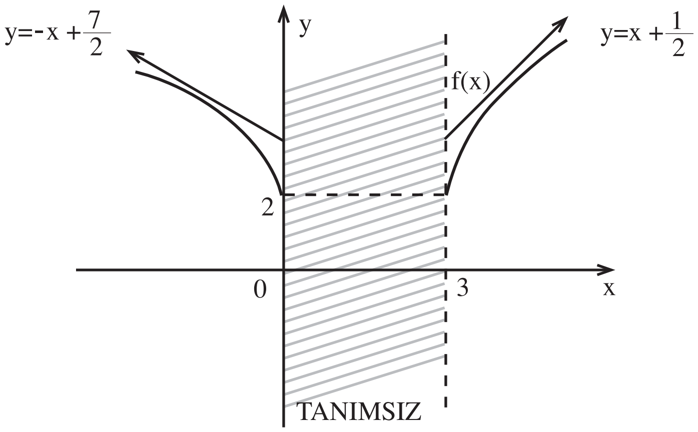
$x = 0$ ve $x = 3$ için $f'(x)$ tanımsızdır.

6)

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
y´	+		0	-	0	+	
y	$+\infty$		2	TANIMSIZ	2		$+\infty$

Tablonun Okunması : Fonksiyon (0,3) aralığında tanımsız.
$x=-\infty$ dan başlayarak $y=+\infty$ doğru $(-\infty,0]$ aralığında eğri çizerek ilerler.
$x=+\infty$ dan başlayarak $y=+\infty$ doğru $(3,+\infty)$ aralığında eğri çizerek ilerler.
Bu arada $y= -x + \frac{7}{2}$ ve $y= x + \frac{1}{2}$ asimptotlarını dikkate almak gerekir.

7)



2- $y = \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$ fonksiyonunun değişimini inceleyiniz, grafiğini çiziniz.

Çözüm : 1) $y = \sqrt{-x^2 + 4x - 3} = \sqrt{1 - (x - 2)^2} = \sqrt{-(x-3) \cdot (x-1)}$

$1 - (x - 2)^2 \geq 0 \Rightarrow 1 - (x - 2)^2 = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 = 1 \Rightarrow x - 2 = \pm 1 \Rightarrow$

$x_1 = 1, \quad x_2 = 3$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$-(x - 3)$		+		+	0	-	
$x - 1$		-	0	+		+	
f(x)		fonksiyon tanımsız		+		fonksiyon tanımsız	

$1 \leq x \leq 3$

Tanım aralığı : [1, 3] dür.

2) Tanım bölgesi sınırlı olduğundan $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$ hesaplanamaz.

3) Tanım bölgesi sınırlı olduğundan asimptot yoktur. (a < 0 olduğundan)

4) $x = 1$ için $y = 0$ dır.

$x = 3$ için $y = 0$ dır.

$x = 2$ için $y = 1$ dir.

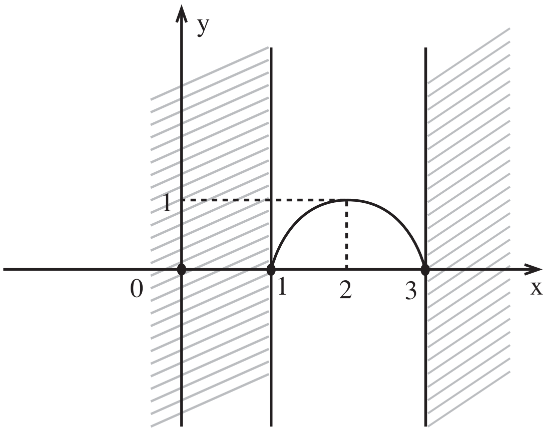
5) $f'(x) = \dfrac{-2x + 4}{2\sqrt{-x^2 + 4x - 3}} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2$ dir. (x=2 için y=1 dir)

6)

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
y´		+		+	0	-		-	
y		+	0	↗	1	↘	0		

Tablonun Okunması : x=1 ve x=3 doğruları arasında sınırlıdır. Çünkü tanım kümesi, $1 \leq x \leq 3$ idi. x=2 için y=1 noktası eğrinin maksimum noktasıdır.

7)



Rasyonel Fonksiyonların Grafikleri

1- $y = \dfrac{x - 2}{x + 1}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

1) $x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ dir.

$f : (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty) \to R$

$x + 1 \neq 0$

$x \neq -1$

Tanım kümesi : $R - \{-1\}$

$(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

2) $y = \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x - 2}{x + 1} = 1$ dir. Yani $y = 1$ doğrusu yatay asimptotdur.

3) $x = -1$ de düşey asimptot vardır. (Düşey asimtot paydayı sıfır yapan değer)

4) $x = 0$ için $y = -2$

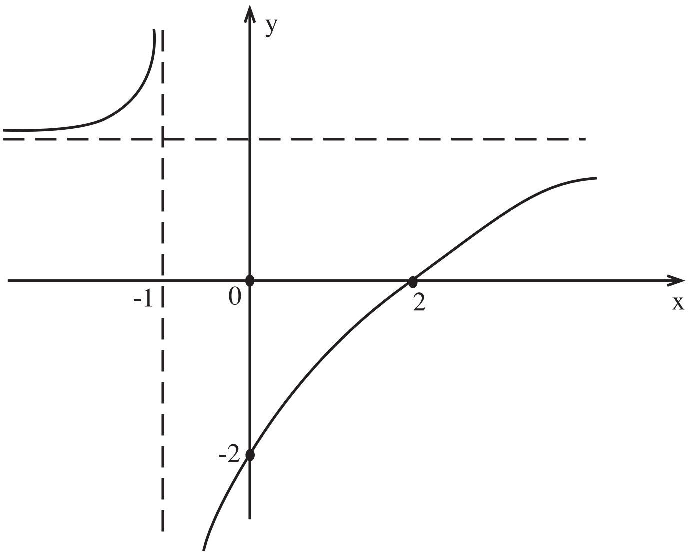
$y = 0$ için $x = 2$ dir.

$0 = \dfrac{x - 2}{x + 1} \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

5) $y' = \dfrac{1 \,.\, (x + 1) - 1 \,.\, (x - 2)}{(x + 1)^2} = \dfrac{3}{(x+1)^2} > 0$

6)

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
y'		+	0 ‖	+		+		+	
y	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-2	↗	0	↗	1



2- $y = \dfrac{(x - 1)\ (x - 2)}{x - 3}$ fonksiyonunun değişimini inceleyiniz, grafiğini çiziniz.

1) $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$ de fonksiyon tanımsızdır. Tanım kümesi : $R - \{3\}$

2) Asimptotlar:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{(x - 1)\ (x - 2)}{x - 3} = \pm\infty$$

$$y = \frac{(x - 1)\ (x - 2)}{x - 3} = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 3} = x + \frac{2}{x - 3} \Rightarrow y = x$$ doğrusu eğik asimptotdur.

Tabloda gösterilmez.

$$\begin{array}{l|l} x^2 - 3x + 2 & \underline{\ x - 3\ } \\ \underline{\pm x^2 \pm 3x} & \ \ x \\ \quad\ 2 & \end{array}$$

$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$ doğrusu düşey asimptotdur.

3) $x = 0$ için $y = -\dfrac{2}{3}$

$y = 0$ için $x_1 = 1,\ x_2 = 2$ dir.

4) $y' = \dfrac{\left[1 \,.\, (x-2) + (x-1)\right]\,(x-3) - 1 \,.\, (x-1)(x-2)}{(x-3)^2} = \dfrac{x^2 - 6x + 7}{(x-3)^2}$; $y' = 0 \Rightarrow$

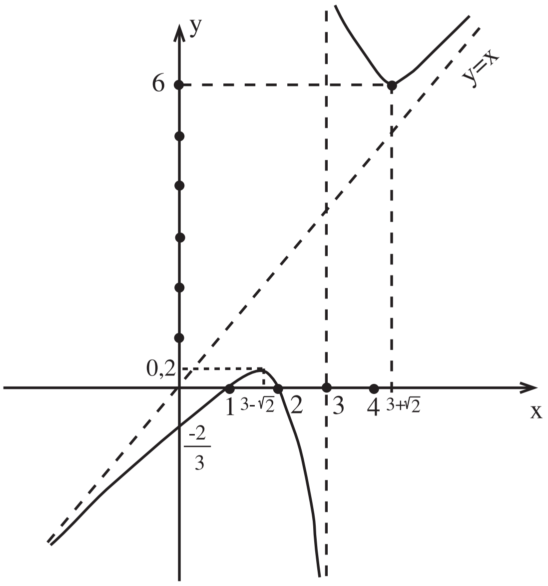
$x^2 - 6x + 7 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{2}}{1} = 3 \pm \sqrt{2} \Rightarrow x_1 = 3 + \sqrt{2},\ x_2 = 3 - \sqrt{2}$

$y_1 \cong 6, \quad y_2 \cong 0{,}2$

5)

x	$-\infty$		0		1		$3-\sqrt{2}$		2		3		$3+\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		+		+		+	0	-		-	‖	-	0	+	
y	$-\infty$	↗	$-\frac{2}{3}$	↗	0	↗	0,2	↘	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	6	↗	∞
							max.						**min.**		

6)



3- $y = \dfrac{(x-2)^3}{x-1}$ fonksiyonunun değişimini inceleyiniz, grafiğini çiziniz.

1) $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ de fonksiyon tanımsızdır.

$f : R - \{1\} \to R$

2) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{(x-2)^3}{x-1} = \infty$

3) $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ de düşey asimptot vardır.

$$\frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x - 1}$$

$$\begin{array}{l|l}
x^3 - 6x^2 + 12x - 8 & x - 1 \\ \cline{2-2}
\mp x^3 \pm x^3 & x^2 - 5x + 7 \\ \cline{1-1}
-5x^2 + 12x & \\
\pm 5x^2 \pm 5x & \\ \cline{1-1}
7x - 8 & \\
\mp 7x \pm -7 & \\ \cline{1-1}
-1 &
\end{array}$$

Eğri asimptot

$$\frac{(x-2)^3}{x-1} = x^2 - 5x + 7 - \frac{1}{x-1} \Rightarrow y = x^2 - 5x + 7 \text{ eğri asimptotdur.}$$

$y = (x - \frac{5}{2})^2 + \frac{3}{4}$ parabol eğridir.

4) $x = 0$ için $y = 8$

$y = 0$ için $(x - 2)^3 = 0 \Rightarrow x = 2$ dir.

5) $y' = \dfrac{3(x-2)^2 . (x-1) - 1 . (x-2)^3}{(x-1)^2} \Rightarrow y' = 0$ için $(x - 2)^2 [\, 3(x - 1) - (x - 2)\,] \Rightarrow$

$(x - 2)^2 (2x - 1) = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2, \; x_2 = \frac{1}{2},$

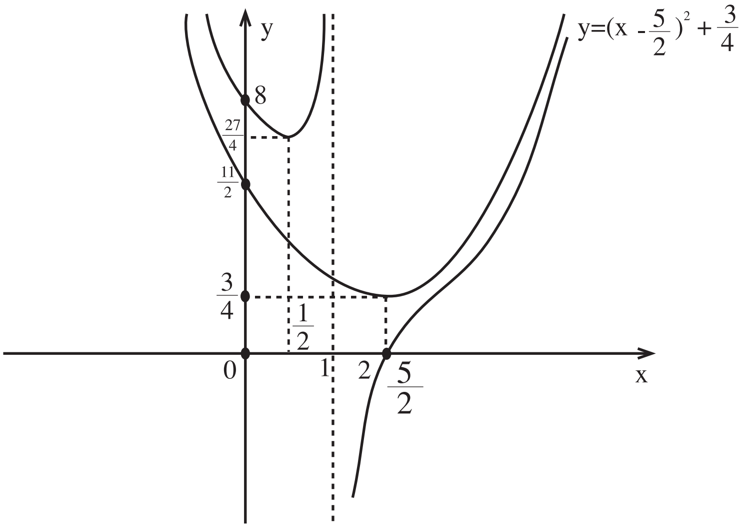
$y' = \dfrac{(x-2)^2 . (2x-1)}{(x-1)^2}$ $\qquad y_1 = 0, \; y_2 = \frac{27}{4},$

6)

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1			2		$+\infty$
y'	-			-	0	+	‖	+		0	+	
y	$+\infty$	↘	8	↘	$\frac{27}{4}$ **min.**	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗		0 **D.N.**	↗	$+\infty$

Tablonun Okunması : x=-∞, y=+∞ başlayan fonksiyon (0,8) noktasına uğrayarak $\left(\frac{1}{2}, \frac{27}{4}\right)$ noktasında minimum değeri aldıktan sonra $(1^-,+\infty)$ doğru ilerler. Sonra fonksiyon $(1^+,-\infty)$ dan gelerek (2,0) dönüm noktasından kıvrılarak (∞,∞) doğru ilerler. Bu arada tabloda olmayan x=1 düşey asimptodu ve $y=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$ eğri asimptodu grafikte unutmamak gerekir.

7)



4- $y = \dfrac{x^4}{x^2-1}$ fonksiyonunun değişimini inceleyiniz, grafiğini çiziniz.

Çözüm

1) $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow x_1 = 1, \quad x_2 = -1$ dir.

$f : R - \{-1, 1\} \to R$

2) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^4}{x^2-1} = \infty$

3) $x_1 = 1, \ x_2 = -1$ de düşey asimptotu vardır.

$\dfrac{x^4}{x^2-1} = x^2 + 1 + \dfrac{1}{x^2-1} \Rightarrow y = x^2 + 1$ fonksiyonunun eğri asimptotudur.

4) $x = 0$ için $y = 0$ dır.

$y = 0$ için $x = 0$ dır.

5) $y' = \dfrac{4x^3 \cdot (x^2 - 1) - 2x \cdot x^4}{(x^2 - 1)^2} = \dfrac{\cancel{4x^5} - 4x^3 - \cancel{2x^5}}{(x^2 - 1)^2} = \dfrac{2x^3\,(x^2 - 2)}{(x^2 - 1)^2}$

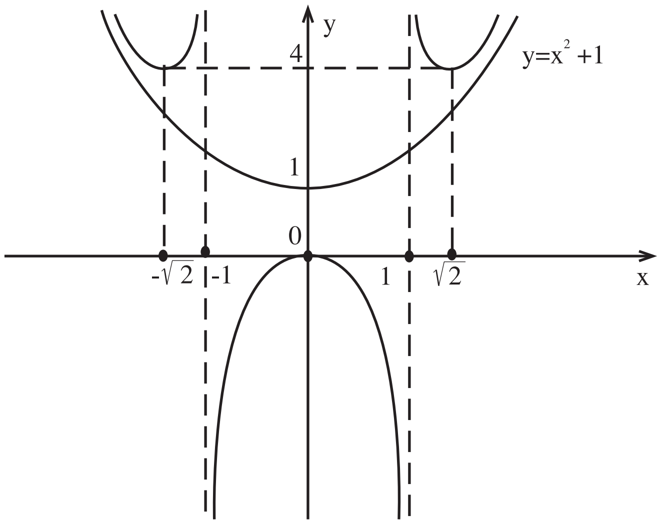
$y' = 0 \Rightarrow 2x^3\,(x^2 - 2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0\,,\; x_2 = \sqrt{2},\; x_3 = -\sqrt{2}$

$y_1 = 0\,,\; y_2 = 4,\quad y_3 = 4$

6)

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		-1		0		1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		-	0	+	0 / 0	+	0	-	0 / 0	-	0	+	
y	$+\infty$	↘	4	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

7)



5- $y = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$ fonksiyonunun değişimini inceleyiniz, grafiğini çiziniz.

Çözüm

1) $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x_1 = 1,\; x_2 = -1$ noktalarında fonksiyon tanımsızdır.

$f : R - \{1, -1\} \rightarrow R$

2) $y = \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2x}{x^2 - 1} = 0$ dır. x - ekseni yatay asimptotttur.

$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = -1$ de düşey asimptot vardır.

3) $x = 0 \Rightarrow y = 0$ ve $y = 0$ için $x = 0$ dır.

4) $y' = \dfrac{2(x^2 - 1) - 4x^2}{(x^2 - 1)^2} = \dfrac{-2x^2 - 2}{(x^2 - 1)^2} = \dfrac{-2(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2}$

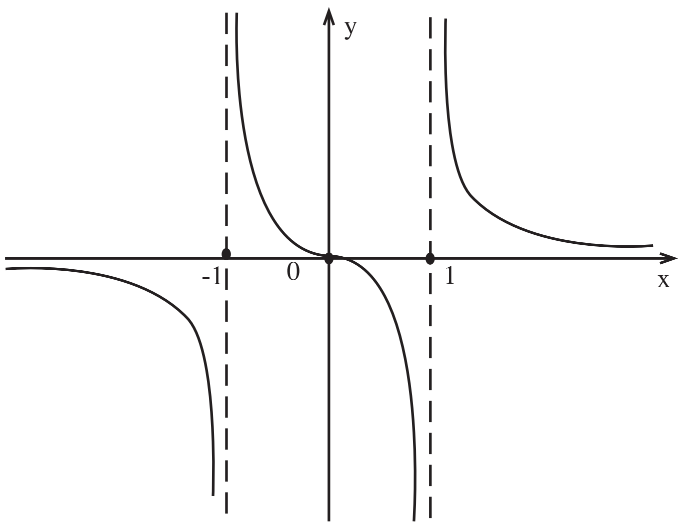
$y' = 0 \Rightarrow -2(x^2 + 1) = 0 \Rightarrow x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow$ Reel kök yoktur.

$y' < 0$ dır.

5)

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		-	‖	-		-	‖	-	
y	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

6)



Trigonometrik Fonksiyonların Grafikleri

Trigonometrik fonksiyonların grafikleri çizilirken aşağıdaki durumlar dikkate alınır:

a) Önce periyod bulunur. Periyod genişliğinde bir aralıkta değişim incelenip grafik çizilir. Öbür periyod genişliğinde ardışık aralıklarla ilk çizilen grafik tekrarlanır.

b) Fonksiyon kesirli ise düşey asimtot bulunur.

c) Eksenleri kestiği noktalar bulunur.

d) Türev alınır. Yerel ekstramum noktaları hesaplanır.

e) Değişim tablosu yapılarak grafik çizilir.

Trigonometrik denklemlerin çözüm kümelerini bulmayı öğrenmeden grafik çizmeye geçmeyin.

1- $y = 1 + \text{Cos } 2x$ in grafiğini çiziniz.

1) Cos 2x in periyodu $\frac{2\pi}{2} = \pi$ O hâlde, $[0,\pi]$ aralığında grafiğini çizmek yeterlidir.

2) Aralık sınırlı olduğu için asimptot hesaplanmaz.

3) Eksenler kestiği noktalar.

$x = 0$ için $f(0) = 1 + \text{Cos } 2 \,.\, 0 = 1 + 1 = 2$

$x = \pi$ için $f(\pi) = 1 + \text{Cos } 2\pi = 1 + 1 = 2$

$y = 0$ için $1 + \text{Cos } 2x = 0 \Rightarrow \text{Cos } 2x = -1 \Rightarrow \text{Cos } 2x = \text{Cos } (\pi + 2k\pi)$

$\Rightarrow 2x = \pi + 2k\pi,\ k = 0$ için $x = \frac{\pi}{2}$

4) $f'(x) = -2 \text{ Sin } 2x;\ f'(x) = 0 \Rightarrow -2 \text{ Sin } 2x = 0 \Rightarrow \text{Sin } 2x = 0 \Rightarrow \text{Sin } 2x = \text{Sin } (k\pi)$

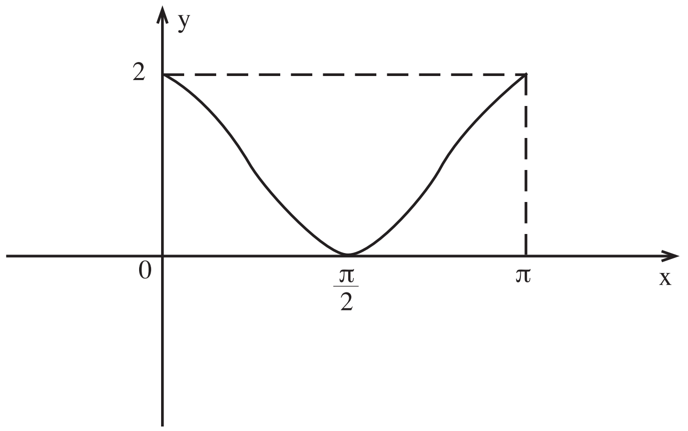
$\Rightarrow 2x = k\pi$ ise $x = \frac{k\pi}{2}$

$k_1 = 0$ için $x_1 = 0$, $k_2 = 1$ için $x_2 = \frac{\pi}{2}$, $k_3 = 2$ için $x_3 = \pi$

5)

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
y´	0	$-$	0	$+$	0
y	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	2

6)



2- $y = \dfrac{\text{Sin } x - 1}{2 \text{ Sin } x + 1}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Sin x - 1 periyodu $= \dfrac{2\pi}{1} = 2\pi = T_1$

2Sin x + 1 periyodu $= \dfrac{2\pi}{1} = 2\pi = T_2$

1) Fonksiyonun periyodu $(T_1, T_2)_{ekok} = 2\pi$

Grafiği $[0, 2\pi]$ arasında çizmek yeterlidir.

2) $2 \text{ Sin } x + 1 = 0 \Rightarrow 2 \text{ Sin } x = -1 \Rightarrow$

$\text{Sin } x = -\dfrac{1}{2} = \text{Sin } (\pi + \dfrac{\pi}{6}) = \text{Sin } (\dfrac{7\pi}{6})$

$Ç = \left\{ x \mid x = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi \;\; v \;\; x = (\pi - \dfrac{7\pi}{6}) + 2k\pi, k \in z \right\}$

k = 0 için

$x_1 = \dfrac{7\pi}{6}$

$x_2 = \dfrac{-\pi}{6} = 2p - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{11\pi}{6}$

$x_1 = \dfrac{11\pi}{6}$ ve $x_2 = \dfrac{7\pi}{6}$ da düşey asimptot vardır.

3) $x = 0$ için $y = -1$

$y = 0$ için $\text{Sin } x - 1 = 0 \Rightarrow \text{Sin } x = 1 \Rightarrow \text{Sin } x = \text{Sin}\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$ dir.

$x = \pi$ için $y = -1$

$x = 2\pi$ için $y = -1$ dir.

4) $$y' = \frac{\text{Cos } x \,.\, (2 \text{ Sin } x + 1) - 2 \text{ Cos } x \,.\, (\text{Sin } x - 1)}{(2 \text{ Sin } x + 1)^2} = \frac{3 \text{ Cos } x}{(2 \text{ Sin } x + 1)^2}$$

$y' = 0 \Rightarrow 3 \text{ Cos } x = 0 \Rightarrow \text{Cos } x = 0 \Rightarrow \text{Cos } x = \text{Cos}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$

$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ dir.

$k_1 = 0$ için $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $k_2 = 1$ için $x_2 = \frac{3\pi}{2}$

$y_1 = 0$, $y_2 = 2$ dir.

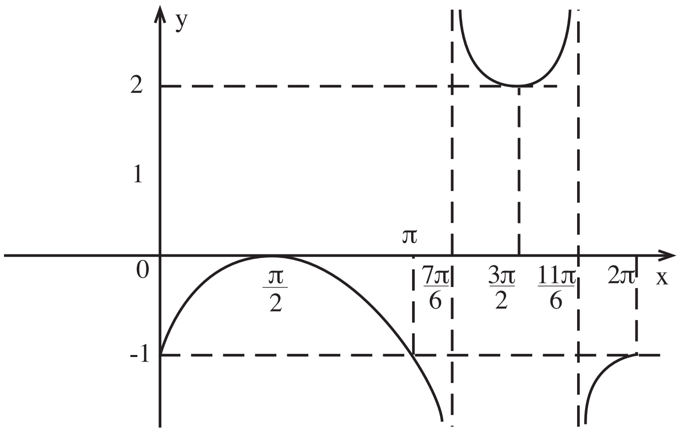
O hâlde $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ ve $\left(\frac{3\pi}{2},2\right)$ noktalarında maksimum ve minimum vardır.

5)

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{11\pi}{6}$		2π
y'		+	0	-	|	-	$\parallel$	-	0	+	$\parallel$	+	
y	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$ | $-\infty$	$\nearrow$	-1
			max.						**min.**				

Tablonun Okunması : (0,1) noktasından başlayan fonksiyon $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ maksimum noktasına uğrayarak $(\pi,-1)$ noktasından geçer ve $x=\frac{7\pi}{6}$ düşey asimptoduna yaklaşır. Sonra $\left(\frac{7\pi}{6}, +\infty\right)$ dan başlayan fonksiyon ($x=\frac{7\pi}{6}$ düşey asimptodun pozitif yönünden) $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\right)$ minimum noktasından geçerek $\left(\frac{11\pi}{6}, +\infty\right)$ doğru yaklaşır. Burada $x=\frac{11\pi}{6}$ düşey asimptotdur. Daha sonra $\left(\frac{11\pi}{6}, -\infty\right)$ bölgesinden başlayan fonksiyon $x=\frac{11\pi}{6}$, düşey asimptodu da negatif yönde teğet çizerek $(2\pi, -1)$ noktasından geçerek eğri çizer.

6)



ÖRNEKLER

Türev kurallarından yararlanarak aşağıdaki ifadelerin tanımlı olduğu yerlerde, türevlerini bulunuz.

1- $y = x^3 . \sqrt{x}$

Çözüm : Çarpımın türevini hatırlayalım ve, $y' = (x^3)' \sqrt{x} + x^3 . (\sqrt{x})'$

$$= 3x^2 . \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} x^3 = \underset{(2\sqrt{x})}{\frac{3x^2\sqrt{x}}{1}} + \underset{(1)}{\frac{x^3}{2\sqrt{x}}} = \frac{6x^3 + x^3}{2\sqrt{x}} = \frac{7x^3}{2\sqrt{x}}$$

2- $y = (x - 1)\sqrt[3]{x}$

Çözüm : $y' = (x - 1)' . (\sqrt[3]{x}) + (\sqrt[3]{x})' (x - 1)$

$$= 1 . \sqrt[3]{x}) + \frac{x - 1}{3\sqrt[3]{x^2}} = \underset{(3\sqrt[3]{x^2})}{\frac{\sqrt[3]{x}}{1}} + \underset{(1)}{\frac{x - 1}{3\sqrt[3]{x^2}}} = \frac{3\sqrt[3]{x^3} + x - 1}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{4x - 1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

Not: Yukarıda $\sqrt[3]{x}$ in türevinin $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ olduğunu görünüz.

3- $y = \frac{x^2 - 1}{1 + 2x}$

Çözüm : Bölümün türevini hatırlayalım ve;

$$y' = \frac{(x^2 - 1)' . (1 + 2x) - (1 + 2x)' (x^2 - 1)}{(1 + 2x)^2} = \frac{(2x) . (1 + 2x) - (2) (x^2 - 1)}{(1 + 2x)^2}$$

$$= \frac{2x + 4x^2 - 2x^2 + 2}{(1 + 2x)^2} = \frac{2x^2 + 2x + 2}{(1 + 2x)^2}$$

4- $f(x) = x . |x|$ ise $f'(2) = ?$

Çözüm : Önce verilen ifadeyi parçalı fonksiyon olarak yapmakta fayda var.

$$x|x| = \begin{cases} x . x, & x \geq 0 \text{ ise} \\ -x(x), & x < 0 \text{ ise} \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x, & x \geq 0 \\ -2x, & x < 0 \end{cases}$$

$f'(2) = 2 . 2 = 4$

5- f: R → R, $f(x) = mx^3$ fonksiyonun $x_0 = 1$ noktasındaki teğeti yatayla 60° lik açı yaptığına göre m nin değeri nedir?

Çözüm : $f(x) = mx^3$

$f'(x) = 3mx^2$

$x_0 = 1$ ise $m_t = f'(1) = 3m(1)^2$

$\sqrt{3} = 3m$

$m = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Teğetin eğimi,

$m_t = \tan 60° = \sqrt{3}$

6- $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + mx$ fonksiyonun üzerindeki $x_0 = -3$ noktasındaki teğeti OX ekseninin pozitif yönüyle 135° lik açı yaptığına göre m = ?

Çözüm : $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + mx$

$m_t = f'(x) = x + m \Rightarrow f'(x_0) = -3 + m$

$-1 = -3 + m$

$m = 2$

m_t = Tan 135 = -Tan 45° = -1

Tan 135 = -Tan 45 niçin eşit oluyor. Trigonometri bilgilerinizi gözden geçirin.

7- $f(x) = kx^3 + (k-1)x^2 + k - 2$ $(k \in R)$ fonksiyonunun $x_0 = 2$ noktasındaki teğeti $4x + 3y = 0$ doğrusuna dik olduğuna göre k = ?

Çözüm : $f(x) = kx^3 + (k-1)x^2 + k - 2$

$f'(x) = 3kx^2 + 2(k-1)x$

$m_t = f'(2) = 3k(4) + 2(k-1)2$

$m_t = f'(2) = 16k - 4$

$\dfrac{3}{4} = 16k - 4$

$k = \dfrac{19}{64}$

$t \perp d$: d: $4x + 3y = 0$

$m_d = \dfrac{-a}{b} = \dfrac{-4}{3}$

diklik şartına göre

$m_t = \dfrac{3}{4}$

(Çünkü $m_d \cdot m_t = -1$ idi.)

8- $y = x^2 + 4x - 6$ fonksiyonun $x_0 = 2$ noktasındasi teğetinin denklemi nedir?

Çözüm : $x_0 = 2$

$y_0 = 2^2 + 4(2) - 6$

$y_0 = 4 + 8 - 6 = 6$

$y = x^2 + 4x - 6$

$y' = 2x + 4$

$m_t = 2(2) + 4 = 8$

teğet denklemi

$$y - y_0 = m_t (x - x_0)$$

olduğundan, yukarıda bulunanları yerine yazarsak,

$$y - 6 = 8 (x - 2)$$

$$y = 8x - 10$$

9- $y = \sqrt{x}$ ise $y''' = ?$

Çözüm : $y = x^{\frac{1}{2}}$

$$y' = \frac{1}{2} x^{\frac{-1}{2}}$$

$$y'' = \frac{-1}{4} x^{\frac{-3}{2}}$$

$$y''' = \frac{3}{8} x^{\frac{-5}{2}} = \frac{3}{8\sqrt{x^5}}$$

10- $y = \dfrac{2x}{1 + x}$ ise $y''' = ?$

Çözüm : $y' = \dfrac{2(1 + x) - 1\,(2x)}{(1 + x)^2}$

o hâlde $y' = \dfrac{2 + 2x - 2x}{(1 + x)^2} = \dfrac{2}{(1 + x)^2} = 2\,(1 + x)^{-2}$

$$y'' = -4\,(1 + x)^{-2 - 1}\,(1 + x)'$$

$$y'' = -4\,(1 + x)^{-3}$$

$$y''' = +12\,(1 + x)^{-4}\,(1 + x)'$$

$$= +12\,(1 + x)^{-4} = \frac{12}{(1 + x)^4}$$

11- $y = x^2 . \text{Sin } x$ ise $y' = ?$

Çözüm : $y' = (x^2)' \text{Sin } x + x^2 (\text{Sin } x)'$

$= 2x \text{ Sin } x + x^2 \text{ Cos } x$

Yukarıda çarpımın türevini nasıl uygulandığı ve Sin x in türevinin Cos x olduğuna dikkat ediniz.

12- $y = \text{Sec } x$ ise $y' = ?$

Çözüm : $y = \text{Sec } x = \dfrac{1}{\text{Cos } x} \Rightarrow y' = \dfrac{0 - (-\text{Sin } x)(1)}{(\text{Cos } x)^2} = \dfrac{\text{Sin } x}{(\text{Cos } x)^2} = \dfrac{\text{Sin } x}{\text{Cos } x} \dfrac{1}{\text{Cos } x}$

$= \text{Tan } x . \text{Sec } x$

Sec x in türevini almak için $\dfrac{1}{\text{Cos } x}$ *yazdık. Ayrıca bölümün türevini kullanarak sonuca gittik.*

13- $y = x^3 \text{ Cos } x$

Çözüm : $y' = (3x^2) \text{ Cos } x + (-\text{Sin } x)\, x^3 = x^2 (3 \text{ Cos } x - x \text{ Sin } x)$

14- $f(x) = \dfrac{\text{Sin } x}{x}$ ise $f'(\frac{\pi}{2}) = ?$

Çözüm : $f'(x) = \dfrac{(\text{Cos } x)\, x - 1 . \text{Sin } x}{x^2} = \dfrac{x\text{Cos } x - \text{Sin } x}{x^2}$

$\text{Cos } \frac{\pi}{2} = 0$

$\text{Sin } \frac{\pi}{2} = 1$

$x = \frac{\pi}{2}$ için

$$f'(\tfrac{\pi}{2}) = \dfrac{\frac{\pi}{2} \text{Cos } \frac{\pi}{2} - \text{Sin } \frac{\pi}{2}}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} = \dfrac{0 - 1}{\frac{\pi^2}{4}} = \dfrac{-4}{\pi^2}$$

15- $y = \text{Cot } x, \quad x = t^{\frac{3}{2}}$ ise $\dfrac{dy}{dt} = ?$

Çözüm : $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dy}{dx} \cdot \dfrac{dx}{dt} =$

$= - \text{Cosec}^2 x \cdot \dfrac{3}{2} t^{\frac{1}{2}}$

$= - \dfrac{3}{2} \text{Cosec}^2 x \cdot t^{\frac{1}{2}} = \dfrac{-3}{2} \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot \text{Cosec}^2 x$

Yukarıda değişken değiştirme metodu kullanılarak türev alınmıştır. Çünkü y, x e bağlı, x de t ye bağlıdır.

16- $y = \sqrt{u}, \quad u = \text{Cos } 3x$ ise $\dfrac{dy}{dx}$ i bulalım.

Çözüm : $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} (-\text{Sin } 3x) = \dfrac{-3 \text{ Sin } 3x}{2\sqrt{u}}$

$= \dfrac{-3 \text{ Sin } 3x}{2\sqrt{\text{Cos } 3x}}$

Yukarıda değişken değiştirme metodu kullanıldı.

17- $x \cdot y = (x + y)^2$ kapalı fonksiyonu veriliyor $\dfrac{dy}{dx} = ?$

Çözüm : $\dfrac{d}{dx} (xy) = \dfrac{d}{dx} (x + y)^2$

$(1 \cdot y + xy') = 2(x + y)(1 + y')$

$y + xy' = 2(x + y) + 2(x + y) \cdot y'$

$xy' - 2(x + y) \cdot y' = 2(x + y) - y$

$y'(-x - 2y) = 2x + y$

$y' = \dfrac{2x + y}{-x - 2y} = - \dfrac{2x + y}{x + 2y}$

$\dfrac{dy}{dx} = - \dfrac{2x + y}{x + 2y}$

(x e ve y ye göre türev alınıyor.)
(Dağıtma işlemine dikkat edin.)
(y´ lerin eşitliğin sol tarafına aldık. Çünkü y´ yalnız bırakılmalı.)

18- $x^2y^3 - 2xy^2 + 6 = 0$ kapalı fonksiyonuna göre $\dfrac{dy}{dx} = ?$

Çözüm : $(2xy^3 + 3x^2y^2y') - 2\,(1 \,.\, y^2 + 2yy' \,.\, x) = 0$

$2xy^3 + 3y^2x^2y' - 2y^2 - 4xy \,.\, y' = 0$

$(3y^2x^2 - 4xy)\, y' = 2y^2 - 2xy^3$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y^2 - 2xy^3}{3y^2x^2 - 4xy}$

$\Rightarrow$ *(x e ve y ye göre türevler ayrı ayrı alındı.) (y´ lere bağlanan ifadeleri eşitliğin sol tarafına alarak yalnız bıraktık.)*

19- $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$ kapalı fonksiyonuna göre $\dfrac{dy}{dx} = ?$

Çözüm : $3x^2 + 4y^2 = 12$

$\Rightarrow$ *(Payda eşitledik, içler dışlar çarpımı yaptık.)*

$\dfrac{d}{dx}(3x^2) + \dfrac{d}{dy}(4y^2) = \dfrac{d}{dx}(12)$

$6x + 8yy' = 0$

$3x + 4yy' = 0$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-3x}{4y}$

20- $y = \ln(\ln x)$ ise $\dfrac{dy}{dx} = ?$

Çözüm : $y' = \dfrac{(\ln x)'}{\ln x} = \dfrac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \dfrac{1}{x\ln x}$

$\Rightarrow$ *(ln f(x) in türevi* $= \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ *dir.*

21- $y = \log_2 (5x^2)$ ise $\dfrac{dy}{dx} = ?$

Çözüm : $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(5x^2)' \cdot \log_2 e}{(5x^2)} = \dfrac{10x}{5x^2} \log_2 e = \dfrac{2 \log_2 e}{x}$

$\Rightarrow$ *Log a f(x) in türevi* $= \dfrac{f'(x)}{f(x)} \, Log_a^e$ *dir.*

22- $y = e^{x^2}$ ise $\dfrac{dy}{dx} = ?$

Çözüm : $\dfrac{dy}{dx} = (x^2)' \, e^{x^2} = 2xe^{x^2}$

$\Rightarrow$ $e^{f(x)}$ *in türevi* $f'(x) \, e^{f(x)}$ *dir.*

23- $y = e^{\cos x^2}$ ise $\dfrac{dy}{dx} = ?$

Çözüm : $\dfrac{dy}{dx} = (\cos \ x^2)' \, e^{\cos x^2}$

$= -2x \sin x^2 \, e^{\cos x^2}$

24- $y = e^{\ln x^2}$ ise $y' = ?$

Çözüm : $y = e^{\ln x^2} = (\ln x^2)' \, e^{\ln x^2}$

$= \dfrac{2x}{x^2} \cdot x^2 = 2x$

Not : $e^{\ln x} = x$

$e^{\ln x^2} = x^2$

25- $\dfrac{x - y}{x - 2y} = 2$ fonksiyonuna üzerindeki (3, 1) noktasından çizilen teğet ve normalin denklemlerini bulunuz.

Çözüm : $x_0 = 3$

$y_0 = 1$

$$\frac{x - y}{x - 2y} = 2$$
$$x - y = 2x - 4y$$
$$3y = x$$
$$y = \frac{x}{3} = \frac{1}{3}x$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}$$
$$m_t = \frac{1}{3}$$
$m_t \cdot M_N = -1$ olduğundan
$$M_N = -3$$

Teğetin denklemi

$$y - y_0 = m_t\ (x - x_0)$$
$$y - 1 = \frac{1}{3}(x - 3)$$
$$3y - x = 0$$

Normalin denklemi

$$y - y_0 = M_N\ (x - x_0)$$
$$y - 1 = -3\ (x - 3)$$
$$y = -3x + 10$$

26- $f(x) = -x^3 + 3x + 1$ fonksiyonun artan veya azalan olduğu, aralıkları belirtiniz; varsa ekstremum noktalarını bulunuz.

Çözüm : $f'(x) = -3x^2 + 3$

$$= -3x^2 + 3 = 0$$
$$-3x^2 = -3$$
$$x^2 = 1$$
$$x = \pm 1$$
$$f(-1) = -(-1)^3 + 3(-1) + 1$$
$$= +1 - 3 + 1 = -1$$
$$f(1) = -(1)^3 + 3(1) + 1$$
$$= 3$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$		Azalan ↘	-1 min.	Artan ↗	3 max.	Azalan ↘	

27- $f(x) = \dfrac{2 - x}{3x + 2}$ fonksiyonunun artan veya azalan olduğu aralıkları belirtiniz; varsa ekstremum noktalarını bulunuz.

Rasyonel fonksiyonlarda ekstremum noktalarını bulmak için paydayı sıfır yapan değer aranır.

Çözüm : $3x + 2 = 0$

$x = -\dfrac{2}{3}$

$$f'(x) = \frac{(-1)(3x+2) - (3)(2-x)}{(3x+2)^2} = \frac{-3x - 2 - 6 + 3x}{(3x+2)^2} = \frac{-8}{(3x+2)^2} < 0$$

fonksiyon daima azalan çünkü,

$f'(x) < 0$ dır.

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	-	
$f(x)$	$-\frac{1}{3}$	↘	-	↘	$-\frac{1}{3}$

28- $f(x) = 8x^4 - 16x^2$ fonksiyonun iç bükeylik yönünü inceleyiniz, varsa bükülme noktalarını bulunuz.

Çözüm : $y = 8x^4 - 16x^2$ ise $y' = 32x^3 - 32x$

$y'' = 96x^2 - 32$

$y'' = 0$ dan,

$96x^2 - 32 = 0$

$96x^2 = 32$

$x^2 = \dfrac{32}{96} = \dfrac{1}{3}$

$x_1 = -\sqrt{\dfrac{1}{3}}$ ve $x_2 = \sqrt{\dfrac{1}{3}}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
y''		+	0	-	0	+	
y							
			D.N.		D.N.		

29- $y = \dfrac{1}{x - 1}$ fonksiyonun asimptotlarını bulunuz.

Çözüm : Paydası : $x - 1 = 0$

$x = 1$ düşey asimptot

$$\lim_{y \to \pm\infty} y = \lim_{y \to \pm\infty} \frac{1}{x - 1} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Yatay asimtot $y = 0$

30- $y = \dfrac{x^3 + 1}{x + 2}$ fonksiyonun asimptotlarını bulunuz.

Çözüm : Paydası : $x + 2 = 0$

$x = -2$ düşey asimptot

$$\lim_{y \to \pm\infty} y = \lim_{y \to \pm\infty} \frac{x^3 + 1}{x + 2} = +\infty$$

$$\frac{x^3 + 1}{x + 2} = x^2 - 2x + 4 - \frac{7}{x + 2}$$

$y = x^2 - 2x + 4$ eğri asimptot.

$$\begin{array}{l|l}
x^3 + 1 & x + 2 \\ \cline{2-2}
\mp x^3 \mp 2x^2 & x^2 - 2x + 4 \\ \cline{1-1}
-2x^2 + 1 & \\
\pm 2x^2 \pm 4x & \\ \cline{1-1}
4x + 1 & \\
\mp 4x \mp 8 & \\ \cline{1-1}
-7 &
\end{array}$$

Polinom bölmesini hatırlayınız.

31- $y = x + \dfrac{1}{x}$ fonksiyonun asimptot denklemini bulunuz.

Çözüm : $y = \dfrac{x^2 + 1}{x}$

Payda $x = 0$ düşey asimptot

$\lim_{y \to \pm\infty} y \quad y = \infty$

$y = x$ eğik asimptot

$$\begin{array}{r|l}
x^2 + 1 & x \\ \cline{2-2}
- \; x^2 \quad & x \\ \cline{1-1}
0 \quad +1 &
\end{array}$$

32- $y = -x^2 + 6x - 5$ fonksiyonun grafiğini çiziniz.

Çözüm : 1) Polinom şeklinde fonksiyon olduğundan tanım kümesi R dir.

2) $\lim\limits_{y \to -\infty} y = -(-\infty)^2 = -\infty$

$\lim\limits_{y \to +\infty} y = -(\infty)^2 = -\infty$

3) $x = 0$ için $y = -5$

4) $y = 0$ için $x_1 = 5$

$x_2 = 1$

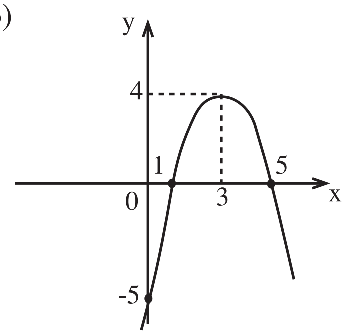
5) $y' = -2x + 6$

$-2x + 6 = 0$

$x = 3$

x	$-\infty$	0	1	3	5	$+\infty$
y´	+	+	+	0	-	-
y	$-\infty$ ↗	-5 ↗	0 ↘	4 ↘	0 ↘	$-\infty$
				max.		

6)



33- $y = x^3 - x^2 + 4x$ fonksiyonun grafiğini çiziniz.

Çözüm :

1) Tanım kümesi R

2) $\lim\limits_{y \to -\infty} y = -(-\infty)^3 = -\infty$

$\lim\limits_{y \to +\infty} y = -(\infty)^3 = \infty$

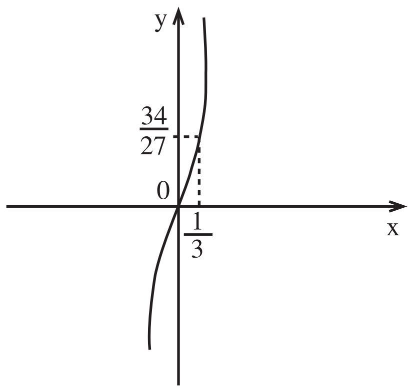
3) $x = 0$ için $y = 0$

$y = 0$ için $x^3 - x^2 + 4x = 0$

$x(x^2 - x + 4) = 0$

$x = 0$ $\quad x^2 - x + 4 = 0$ Reel kök yok

4) $y' = 3x^2 - 2x + 4 = 0$ ise reel kök yok.



5)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'	+	+	+	+	+
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

6) $y'' = 6x - 2 = 0$ ise $x = \frac{1}{3}$

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
y''	+	0	+
y	$-\infty$	**D.N.**	$+\infty$

34- $y = \dfrac{x - 1}{x + 1}$ fonksiyonun grafiğini çiziniz.

Çözüm

1) Payda $x + 1 = 0$ $\quad x = -1$

Tanım kümesi $R - \{-1\}$

2) $x = -1$ için $y = \infty$ $\quad x = -1$ düşey asimptot

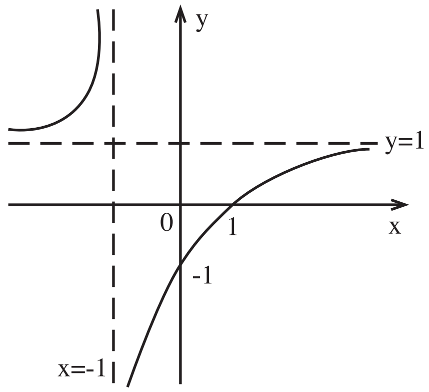
3) $\lim\limits_{y \to \pm\infty} y = 1$ $\quad y = 1$ yatay asimtot.

4) $x = 0$ için $y = -1$

$y = 0$ için $x = 1$

5) $y' = \dfrac{2}{(x + 1)^2} > 0$

x	$-\infty$		-1	0	1	$+\infty$
y'		+	‖	+	+	+
y	$+1$		$+\infty$ $-\infty$	-1	0	$+1$



35- $y = \dfrac{3x - 2}{x - 1}$ fonksiyonun grafiğini çiziniz.

Çözüm :

1) $x = 1$ Tanım kümesi : R-{1}

2) $x = 1$ düşey asimptot.

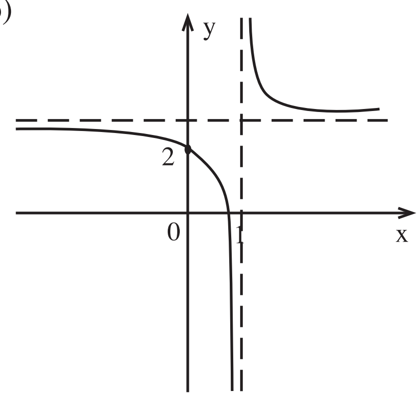
3) $\lim\limits_{y \to \pm\infty} y = 3$ yatay asimtot.

4) $y = 0$ için $x = \dfrac{2}{3}$

5) $y' = \dfrac{-1}{(x - 1)^2} < 0$

x	$-\infty$	0	$\frac{2}{3}$	1	$+\infty$
y´	-	-	-	‖	-
y	3 ↘	2 ↘	0 ↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘ +3

6)



36- $y = \dfrac{x^2 - x}{x - 2}$ fonksiyonun grafiğini çiziniz.

Çözüm

1) Payda $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

Tanım kümesi $R- \{2\}$

2) $x = 2$ düşey asimptot.

3) $\lim\limits_{y \to \pm\infty} y = \pm\infty$

4)

$$\begin{array}{r|l} x^2 - x & x - 2 \\ \hline \mp x^2 \pm 2x & x + 1 \\ \hline x & \\ - x \pm 2 & \\ \hline 2 & \end{array}$$

$y = x + 1$ eğik asimptot.

5) $x = 0$ için $y = \dfrac{0}{-2} = 0$

$y = 0$ için $x = 0$ ve $x = 1$

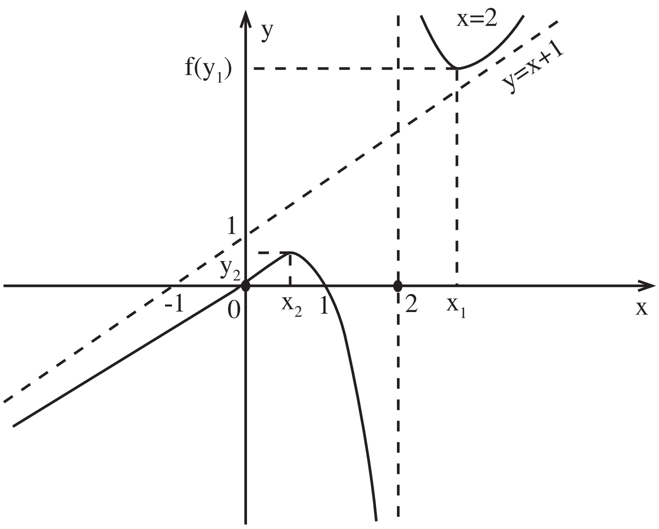
6) $y' = \dfrac{x^2 - 4x + 2}{(x - 2)^2} = 0$

$x^2 - 4x + 2 = 0$

$x_1 = 2 + \sqrt{2}$

$x_2 = 2 - \sqrt{2}$

x	$-\infty$		0		x_2		1		2		x_1		$+\infty$
y'	$+$		$+$		0		$-$		$\|$	$-$	0		$+$
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	y_2	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty \,\|\, +\infty$	$\searrow$	y_1	$\nearrow$	$+\infty$



ÖZET

Türevin tanımı yapılarak bir noktadaki türev ifade edildi.

Sağdan ve soldan türev tanımlandı.

Türev kuralları verildi.

Ters, parametrik ifadelerde türev ve kapalı fonksiyonların türevleri verildi.

Ardışık türevler tanıtıldı.

Trigonometrik fonksiyonların türevi tanıtıldı.

Ters trigonometrik fonksiyonların türevi tanıtıldı.

Logaritma ve üstel fonksiyonların türevi tanıtıldı.

L'Hospital kuralı tanıtıldı.

Teğetin eğimi ve normalin denklemi tanıtıldı.

Hız, ivme gibi ifadelerin türevle ilişkisi verildi.

Özel tanımlı fonksiyonların türevi tanıtıldı.

Türevlenebilirlik ve sürekli olması verildi.

Estremum değer ifadesi tanıtıldı.

Yerel maksimum ve yerel minimum noktaları açıklandı.

Rolle ve ortalama değer teoreminin tanımları yapıldı, ne işe yaradığı örneklerle gösterildi.

İkinci türevin geometrik anlamı verildi.

İkinci türev yardımıyla eğrinin konveks ve konkav olduğu aralıkları bulma verildi.

Maksimum ve minimum problemlerinin türev yardımıyla çözülmesi gösterildi.

Fonksiyonlarda asimptot bulma gösterildi.

Grafik çizimleri gösterildi.

DEĞERLENDİRME TESTİ (1)

1) $f(x) = |x^3 - 8| - x^2$ olduğuna göre $f''(-1)$'in eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) -8 B) -4 C) 2 D) 4

2) $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 7)$ fonksiyonun türevi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\dfrac{2x - 2}{x^2 - 2x + 7}$

B) $\dfrac{x - 2}{x^2 - 2x + 7}$

C) $2x - 2$

D) $\dfrac{x^2 - 2x}{\ln(x^2 - 2x)}$

3) $f(x) = \operatorname{Cos} x$ fonksiyonu ve $[0, \frac{\pi}{2}]$ aralığı veriliyor.

$f'(u) = \dfrac{f(\frac{\pi}{2}) - f(0)}{\frac{\pi}{2}}$ şartını sağlayan u sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

A) Arc Sin π

B) Arc Cos $\frac{2}{\pi}$

C) Arc Sin $\frac{2}{\pi}$

D) Arc Sec $\frac{2}{\pi}$

4) $\left.\begin{array}{l} x = t^3 + 3t \\ y = t^3 - 3t \end{array}\right\}$ olursa $t = 1$ için $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ nin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{3}$

5) $y = \dfrac{x^2 - ax - 8}{x - b}$ fonksiyonun gösterdiği eğrinin y eksinini 8 de kesmesi ve y=x-1 doğrusunu eğik asimtot kabul etmesi için a nın değeri aşağıdakilerden hangisi olmalıdır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3

6) $y = \dfrac{ax + 2}{bx + c}$ eğrisinin yatay ve düşey asimptotlarının kesim noktası (-2, 3) olduğuna göre $\frac{a}{c}$ nin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{3}{2}$ B) 2 C) 3 D) 4

7) y = 2 ve x = 3 doğrularını asimptot kabul eden ve y ekesenini -2 noktasında kesen eğrinin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y = \dfrac{2x + 3}{x + 5}$ B) $y = \dfrac{2x + 6}{x + 3}$

C) $y = \dfrac{2x + 6}{x - 3}$ D) $y = \dfrac{x - 3}{x + 6}$

8) $y = x^3 + bx^2 + cx - 1$ fonksiyonunda apsisi x = 1 olan nokta dönüm noktasıdır. Fonksiyonun bu noktadaki teğetinin eğimi (+1) olduğuna göre c'nin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A)1 B) 2 C) 3 D) 4

9) $f(x) = mx^2 + (m + 1)x + m - 1$ fonksiyonun $x = \frac{-3}{4}$ de bir minimumu olduğuna göre m kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

DEĞERLENDİRME TESTİNİN ÇÖZÜMLERİ (1)

1) $x=-1$ de $|x^3-8| = -x^3+8$

$f(x) = -x^3+8-x^2$

$f'(x) = -3x^2+0-2x$

$f''(x) = -6x-2$

$f''(-1) = -6 \cdot (-1) - 2$

$= +6-2$

$= 4$

Doğru cevap D

2) $f'(x) = \dfrac{2x-2}{x^2-2x+7}$

Doğru cevap A

3) $f'(x) = -\operatorname{Sin} x$

$$f'(u) = -\operatorname{Sin} u = \frac{\operatorname{Cos}\frac{\pi}{2} - \operatorname{Cos} 0}{\frac{\pi}{2}} = \frac{0-1}{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi} \Rightarrow -\operatorname{Sin} u = \frac{-2}{\pi} \Rightarrow \operatorname{Sin} u = \frac{2}{\pi}$$

$u = \operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{2}{\pi}\right)$ bulunur.

Doğru cevap C

4) $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2-3}{3t^2+3} = \frac{t^2-1}{t^2+1} = z \text{ olsun.}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dx} = \frac{\frac{dz}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t\,(t^2+1) - 2t\,(t^2-1}{3(t^2+1)^3} = \frac{4t}{3(t^2+1)^3}$$

$t=1$ için $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ nin değeri $\dfrac{4 \cdot 1}{3(t^2+1)^3} = \dfrac{4}{3 \cdot 2^3} = \dfrac{4}{24} = \dfrac{1}{6}$ dir.

Doğru cevap A

5) $x = 0$ için $y = 8$ olmalıdır. Buradan b= 1 bulunur.

$y = x-1$ doğrusunu eğik asimptot kabul etmesi için

$$(x-1) + \frac{k}{x-1} = \frac{x^2 - ax - 8}{x-1}$$

$$\frac{x^2-2x+1+k}{x-1} = \frac{x^2-ax-8}{x-1}$$

$x^2 - 2x + 1 + k = x^2 - ax - 8$ ise $a = 2$ olmalıdır.

Doğru cevap C

6) $y = \lim\limits_{y \to \pm\infty} \frac{ax + 2}{bx + c} = \frac{a}{b}$ yatay asimptot.

$x = -\frac{c}{b}$ düşey asimptottur.

$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{a}{b} = 3 \Rightarrow a = 3b \\ x = -\frac{c}{b} = -2 \Rightarrow c = 2b \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{3\cancel{b}}{2\cancel{b}} = \frac{3}{2} \text{ dir.}$$

Doğru cevap A

7) $y = \frac{2x + 6}{x - 3}$ dır.

$x-3=0$ ise $x=3$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x+6}{x-3} = 2$$

$x = 0$ için

$$y = \frac{2 \,.\, 0 + 6}{0 - 3} = \frac{6}{-3}$$

$= -2$

Doğru cevap C

8) $y' = 3x^2 + 2bx + c = m$

$$y'' = 6x + 2b = 0 \Rightarrow x = -\frac{2b}{6} = -\frac{b}{3} \Rightarrow 1 = -\frac{b}{3} \Rightarrow b = -3$$

$$m = 3 \,.\, 1^2 + 2 \,.\, b \,.\, 1^2 + c = 3 + 2b + c$$

$1 = 3 + 2 \,.\, (-3) + c \Rightarrow c = 4$ bulunur.

Doğru cevap D

9) $f'(x) = 2mx + (m + 1) = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{m+1}{2m} \Rightarrow -\dfrac{3}{4} = -\dfrac{m+1}{2m}$

$f''(x) = 2m > 0$ olmalıdır. $\quad 6m = 4m + 4$

$f''(-\dfrac{3}{4}) = 2 \,.\, 2 = 4 > 0$ dır. $\quad 2m = 4 \Rightarrow m = 2$

Doğru cevap B