2. ÜNİTE

TÜME VARIM

2-1 TÜME VARIM İLKESİ VE YÖNTEMİ

2-2 TOPLAM SEMBOLÜ ($\sum$) VE ÖZELİKLERİ

2-3 ÇARPIM SEMBOLÜ ($\prod$) VE ÖZELİKLERİ

2-4 GENEL TERİMİN BULUNMASI

Araştırmalar

Ünitenin Özeti

Değerlendirme Soruları

BU ÜNİTENİN HEDEFLERİ

Bu üniteyi çalıştığınızda,

- Tüme varım ilke ve yöntemini kavrayacak,
- Bir ifadenin doğruluğunu tüme varım yöntemi ile ispatlayabilecek,
- Verilen bir toplamı (Σ) sembolü ile gösterebilecek,
- Verilen bir toplamı bulabilecek,
- Verilen bir çarpımı (Π) sembolü ile gösterebilecek,
- Verilen bir çarpımı bulabileceksiniz.

YUKARIDAKİ HEDEFLERİ KAZANMAK İÇİN NE YAPMALIYIZ?

- "Matematik 1" kitabından önerme ünitesini çalışınız.
- Konu içindeki problemleri ve alıştırmaları yanıtlayın.
- Ünite sonunda verilen araştırma ve değerlendirme sorularını yanıtlayın.

GİRİŞ

Nasıl doktora gittiğimiz zaman sorulan sorularla ve yapılan muayene ile hastalıkla ilgili tahmin ve varsayımlarda bulunuluyor ve bunu takiben kanıtların bulunabilmesi için röntgenler çektiriliyor ve/veya tahliller yaptırılıyorsa matematikte de incelemelerin ve buna bağlı olarak çıkarımların ispatlanması veya kanıtlanması gerekmektedir. Bir çıkarımın doğru olduğunu örnekler ile kanıtlayamayız. Fakat, yanlış olduğunu bir karşıt örnek ile ispatlayabiliriz. Bir çıkarımın doğru olduğunu ispatlamak için ispat yöntemlerine ihtiyaç vardır. Bu yöntemlerden bir tanesi de tüme varım yöntemidir.

BÖLÜM 2-1 TÜME VARIM İLKESİ VE YÖNTEMİ

Tüme varım ilkesini genel olarak şöyle ifade edebiliriz.

Tüme Varım İlkesi

1. Bir şeyin ilk defada çalıştığını göster.
2. Diğer zamanda da çalışacağını varsay.
3. Gelecek defa da çalışacağını göster.
4. Sonuç, her zaman çalışmaktadır.

Dikkat ederseniz, yukarıda verilen tüme varım ilkesi hiç bir matematiksel ifade içermemektedir. Yukarıda genel hatları ile verilen tüme varım ilkesi matematiksel olarak şöyle ifade edilebilir:

Tüme Varım İlkesi (Matematiksel)

Bir ifadenin,

1. $n=1$ için doğru olduğunu göster.
2. $n=k$ için doğru olduğunu kabul et.
3. $n=k+1$ için doğru olduğunu göster.
4. Sonuç, bütün doğal sayılar için ifade olunan fikir doğrudur.

ÖRNEK 1 ⇨ $\forall n \in N^+$

$$2+4+6+8+...+2n = n(n+1)$$

olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM ⇨ 1) $n=1$ için ifadenin doğru olduğunu gösterelim.

Tüme varım ilkesinde 3. kısımdaki $n=k+1$ için bir ifadenin doğru olduğu gösterilirken 2. kısımdaki $n=k$ için doğru olduğu varsayımı kesinlikle kullanılmalıdır.

İlk doğal sayı 1 olduğu için $n=1$ ile başlıyoruz. Sol taraftaki ilk terimi alalım ve sağ taraftaki n yerine 1 koyalım. O zaman,

$$2 = 1(1+1) \Rightarrow 2 = 1 \cdot 2$$

olur. O halde verilen eşitlik $n=1$ için doğrudur.

2) $n=k$ için ifadenin doğru olduğunu varsayalım.

$n=k$ olduğundan eşitlikte her n gördüğümüz yere k koyalım.

$$2+4+6+...+2k = k(k+1)$$

3) $n=k+1$ için ifadenin doğru olduğunu gösterelim.

$n=k+1$ olduğu için verilen eşitlikte her n gördüğümüz yere $k+1$ koyalım.

$$2+4+6+...+2(k+1) = (k+1)\left[(k+1)+1\right]$$

$$2+4+6+...+2(k+1) = (k+1)(k+2)$$

2. aşamadaki ifadeyi aksi kabul edilene kadar doğru kabul ettiğimiz için şimdi bu varsayım ile başlayalım.

$$2+4+6+...+2k = k(k+1)$$

Şimdi toplamın iki tarafına $2(k+1)$ ekleyelim.

$$2+4+6+...+2k+2(k+1) = k(k+1)+2(k+1)$$

Eşitliğin sağ tarafını $(k+1)$ ortak çarpan parantezine alırsak

$$2+4+6+...+2k+2(k+1) = (k+1)(k+2)$$

olur.

Bu eşitlik bize n yerine $k+1$ koyduğumuzda elde ettiğimiz eşitliği vermektedir.

4) Sonuç, ifade $n=1$ için doğrudur. "$n=k$ için doğru $\Rightarrow n=k+1$ için doğru" gerektirmesinden, ifade $n=1+1=2$ için doğru, aynı gerektirmeden $n=2+1=3$ için doğru ve $n=3+1=4$ için doğru,…Böylece, verilen ifadenin her $n \in N^+$ için doğru olduğu sonucuna varabiliriz.

ÖRNEK 2 ⇨ $\forall n \in N^+$ ve $n \geq 2$ için

$$2+3+...+n=\frac{(2n+1)}{8}$$

olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM ⇨ 1) $n=2$ için ifadenin doğru olduğunu gösterelim.

İlk doğal sayı 2 olduğu için $n=2$ ile başlıyoruz. Sol taraftaki ilk terimi alalım ve sağ taraftaki n yerine 2 koyalım.

$$2=\left(\frac{2\cdot 2+1}{8}\right) \Rightarrow 2 \neq \frac{5}{8}$$

$n=2$ için ifade doğru değildir.

Buna göre, verilen ifade tüme varım ilkesinin birinci şartını sağlamadığı için doğru değildir. Bir ifadenin doğru olmadığını bir örnek ile göstermek yeterli olduğu için diğer şartlara bakılmamaktadır.

Bu iki örnekten gördüğümüz gibi tüme varım ilkesi kullanılarak bir "ifade"nin doğru veya yanlış bir hüküm verdiği sonucuna varıyoruz. O zaman "ifade" terimi yerine "önerme" terimini kullanabiliriz ve bundan sonra "önerme" terimini kullanacağız.

"İfade" terimi yerine "önerme" terimi kullanılabilir. Neden?

Örneğin, ÖRNEK 1 de verilen $2+4+6+...+2n=n(n+1)$ ifadesini "önerme" fonksiyonu biçiminde şöyle gösterebiliriz.

$$\forall n \in N^+,\ P(n): 2+4+6+...+2n=n(n+1).$$

Söz konusu önerme $P(n)$ ise, $D=\{n \in N^+ \mid P(n) \text{ doğrudur }\}$ alt kümesi, P nin doğruluk kümesidir.

Tüme varım ilkesinden yararlanarak bir $P(n)$ önermesinin doğruluğunu tüme varım yöntemi dediğimiz aşağıda verilen prensibi kullanarak ispat edebiliriz.

Tüme Varım Yöntemi

$P(n)$ pozitif doğal sayılarla ilgili bir önerme, D de bu önermenin doğruluk kümesi, yani

$$D = \{ n \in N^{+} \mid P(n) \text{ doğrudur } \}$$

olsun. Eğer

1. $1 \in D$ için $P(1)$ önermesi doğru,
2. Her $k \in D$ için $P(k)$ doğru iken $P(k+1)$ önermesi de doğru ise, $P(n)$ önermesi her $n \in D$ için doğrudur.

ÖRNEK 3 ⇨ $\forall n \in N^{+}$ için

$$P(n): 1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM ⇨ 1) $n=1$ için önerme doğru mu?

$$P(1): 1 = \frac{1(1+1)}{2} \Rightarrow P(1) \text{ doğrudur.}$$

2) $n=k$ için önermenin doğru olduğunu varsayalım. Bir başka ifadeyle,

$$P(k): 1+2+3+...+k = \frac{k(k+1)}{2}$$

doğru olsun.

3) Acaba, $P(k)$ önermesinin doğru olduğu varsayıldığında $P(k+1)$ önermesi doğru mu?

Önermenin $n=k+1$ için de doğru olacağını, yani

$$1+2+3+4+...+k+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

olduğunu gösterelim.

$$1+2+3+...+k = \frac{k(k+1)}{2}$$

eşitliğinin iki tarafına $(k+1)$ eklenirse

$$1+2+3+...+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

bulunur.

4) O halde, önerme $n=k+1$ için doğrudur. Yani $k\in D$ ise $k+1\in D$ dir. Demek oluyor ki verilen $P(n)$ önermesi $\forall n\in N^+$ için doğrudur.

$\forall n\in N^+$ için $P(n):1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$ önermesinin doğru olduğunu tüme varım yöntemi kullanmadan nasıl ispatlayabiliriz?

ALIŞTIRMA 1 ⇨ $\forall n\in N^+$ için

$$P(n):2+7+12+...+(5n-3)=\frac{n(5n-1)}{2}$$

olduğunu gösteriniz.

ÖRNEK 4 ⇨ $\forall n\in N^+$ için

$$P(n):1+3+5+...+(2n-1)=n^2$$

olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM ⇨ 1) $n=1$ için önerme doğru mu?

$P(1):1=1^2 \Rightarrow P(1)$ doğrudur.

2) $n=k$ için önermenin doğru olduğunu varsayalım. Bir başka ifadeyle,

$P(k):1+3+5+...+(2k-1)=k^2$ doğru olsun.

3) Önermenin $n=k+1$ içinde doğru olacağını, yani

$$1+3+5+...+\left(2(k+1)-1\right)=(k+1)^2$$

$$1+3+5+...+(2k+1)=(k+1)^2$$

olduğunu gösterelim.

$1+3+5+...+(2k-1)=k^2$ doğru varsayımından yola çıkalım. Eşitliğin her iki yanına $2k+1$ eklenirse,

$$1+3+5+...+(2k-1)+(2k+1)=k^2+(2k+1)$$
$$=(k+1)^2$$

bulunur.

4) $P(n)$ önermesi $n=k+1$ için doğrudur. Yani, $k\in D$ ise $k+1\in D$ dir. O halde, $P(n)$ önermesi $\forall n\in N^+$ için doğrudur $(D=N^+)$.

ÖRNEK 5 ⇨ $\forall n\in N^+$ için

$$P(n):1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM ⇨ 1) $n=1$ için $1^2=\frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}=\frac{2.3}{6}=1$ olup

$P(1)$ doğru, yani $1\in D$ dir.

2) $n=k$ için

$$1^2+2^2+3^2+...+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

doğru olsun.

3) $n=k+1$ için önermenin doğru olduğunu gösterelim. 2. aşamada elde ettiğimiz eşitliğin iki yanına $(k+1)^2$ eklenirse

$$1^2+2^2+3^2+...+k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$$

$$=\frac{(k+1)\left[k(2k+1)+6(k+1)\right]}{6}$$

$$=\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

bulunur. Böylece, $n=k+1$ için önermenin doğru olduğu görülür.

4) $P(n)$ önermesi $\forall n\in N^+$ için doğrudur $(D=N^+)$.

ALIŞTIRMA 2 ⇔ Şimdi de siz $\forall n \in N^{+}$ için

(A) $1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + (2n-1)^2 = \dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

(B) $2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + ... + (2n)^2 = \dfrac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$

olduğunu gösteriniz.

ÖRNEK 6 ⇔ $\forall n \in N^{+}$ için

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM ⇔ 1) $n = 1$ için önerme doğru mu?

$$P(1): 1 = \left[\frac{1(1+1)}{2}\right]^2 = 1 \Rightarrow P(1) \text{ doğrudur.}$$

2) $n = k$ için önermenin doğru olduğunu varsayalım. Bir başka ifadeyle,

$$P(k): 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + k^3 = \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2$$

doğru olsun.

3) Önermenin $n = k+1$ için de doğru olacağını, yani

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + (k+1)^3 = \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2$$

olduğunu gösterelim.

$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + k^3 = \left[\dfrac{k(k+1)}{2}\right]^2$ doğru varsayımından yola çıkalım.

Eşitliğin her iki yanına $(k+1)^3$ eklenirse,

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + k^3 + (k+1)^3 = \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2 + (k+1)^3$$

$$= \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4}$$

$$= \frac{(k+1)^2(k^2 + 4k + 4)}{4}$$

$$= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} = \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2$$

4) $P(n)$ önermesi $n=k+1$ için doğrudur. Yani, $k\in D$ ise $k+1\in D$ dir. O halde, $P(n)$ önermesi $\forall n\in N^+$ için doğrudur $(D=N^+)$.

ALIŞTIRMA 3 ⇨ $\forall n\in N^+$ için

$$\sum_{k=1}^{n}k^4=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

olduğunu gösteriniz.

ÖRNEK 7 ⇨ $\forall n\geq 4$ ve $n\in N^+$ için, $P(n): n! > 2^n$ olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM ⇨ 1) $n=4$ için önerme doğru mu?

$P(4): 4! > 2^4 \Rightarrow 24 > 16 \Rightarrow P(4)$ doğrudur.

2) $n=k$ için önermenin doğru olduğunu varsayalım. Bir başka ifadeyle,

$$P(k): k! > 2^k$$

doğru olsun.

3) Önermenin $n=k+1$ için de doğru olacağını, yani

$$P(k+1): (k+1)! > 2^{k+1}$$

olduğunu gösterelim.

$$P(k+1): (k+1)\cdot k! > 2^k\cdot 2$$

$n! > 2^n$ ve $n\geq 4$ olduğu için $(n+1) > 2$ dir. Öyle ise,

$$(k+1)k! > 2^k\cdot 2 \text{ dir.}$$

4) Sonuç olarak, $P(n)$ önermesi $n=k+1$ için doğrudur. Yani, $k\in D$ ise $k+1\in D$ dir. O halde $P(n)$ önermesi $\forall n\geq 4$ için doğrudur.

ALIŞTIRMA 4 ⇨ $\forall n\in N^+$ ve $n\geq 5$ olmak üzere

$$3^{n-1} < n!$$

olduğunu gösteriniz.

ÖRNEK 8 ⇨ $r\neq 1$ ve $\forall n\in N^+$ için

$$1+r+r^2+...+r^{n-1}=\frac{1-r^n}{1-r}$$

olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM ⇨ 1) $n=1$ için, $1=\dfrac{1-r^1}{1-r}=1$ olduğundan ifade $n=1$ için doğrudur.

2) $\forall k \in N^+$ için

$$1+r+r^2+...+r^{k-1}=\frac{1-r^k}{1-r}$$

doğru olsun.

3) $n=k+1$ için eşitliğin doğru olduğunu gösterelim.

$1+r+r^2+...+r^{k-1}=\dfrac{1-r^k}{1-r}$ eşitliğinin iki yanına r^k yı ekleyelim.

$$\begin{aligned}1+r+r^2+...+r^{k-1}+r^k &= \frac{1-r^k}{1-r}+r^k \\ &= \frac{1-r^k+r^k(1-r)}{1-r} \\ &= \frac{1-r^k+r^k-r^{k+1}}{1-r} \\ &= \frac{1-r^{k+1}}{1-r}\end{aligned}$$

bulunur. O halde verilen eşitlik $\forall n \in N^+$ için doğrudur.

ALIŞTIRMA 5⇨ $\forall n \in N^+$ için

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+...+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$$

olduğunu gösteriniz.

BÖLÜM 2-2 TOPLAM SEMBOLÜ ($\sum$) VE ÖZELİKLERİ

- ***TOPLAM SEMBOLÜ ($\sum$)***
- ***TOPLAM SEMBOLÜNÜN KULLANIMI İLE İLGİLİ ÖZELİKLER***

◆ *TOPLAM SEMBOLÜ ($\sum$)*

$n \in N^+$ ve r Ç n olmak üzere $a_r, a_{r+1}, a_{r+2}, ..., a_n \in R$ verilsin.

$$a_r, a_{r+1}, a_{r+2}, ..., a_n$$

toplamı, kısaca

$$\sum_{k=r}^{n} a_k$$

toplamın üst sınırı

$\sum_{k=r}^{n} a_k \rightarrow$ *k r den n ye olmak üzere a_k sayıları*

indeks — *toplamın alt sınırı*

biçiminde gösterilir ve "*$k = r$ den n ye kadar a_k* sayılarının toplamı" *diye okunur.* $\sum$ *sembolüne sigma denir.*

$\sum_{k=5}^{10} 3k$ *toplamının okunuşunu yazınız.*

ÖRNEK 1 ⇨ $1+2+3+4+...+n$ şeklinde verilen toplamı toplam sembolü $(\sum)$ *kullanarak* gösteriniz.

ÇÖZÜM ⇨ $\sum_{k=r}^{n} a_k$ toplam sembolüne göre $1+2+3+4+...+n$ toplamında

$k=1,\ n=n$ ve $a_k = k$ *olduğundan*

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+4+...+n$$

olur.

ÖRNEK 2 ⇨ $2+4+6+8+...+2n$ şeklinde verilen toplamı $\sum$ *kullanarak* gösteriniz.

ÇÖZÜM ⇨ $a_k = 2k,\ k=1,\ n=n$ *olduğundan,*

$$\sum_{k=1}^{n} 2k$$

bulunur.

ÖRNEK 3 ⇨ $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \left(-\frac{1}{2}\right)^4 + ... + \left(-\frac{1}{2}\right)^{10}$ toplamını $\sum$ sembolünü *kullanarak* gösteriniz.

ÇÖZÜM ⇨ $a_k = \left(-\frac{1}{2}\right)^k,\quad k=2,\quad n=10$ *olduğundan,*

$$\sum_{k=2}^{10} \left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

bulunur.

ALIŞTIRMA 1 ⇨ Tüme varım ilke ve yöntemi kısmında verilen toplam örneklerini şimdi de siz toplam sembolü ($\sum$) kullanarak ifade ediniz.

ÖRNEK 4 ⇨ Aşağıdaki toplamları açık olarak yazınız.

(A) $\sum_{i=1}^{n} i\cdot(i+1)!$ (B) $\sum_{k=1}^{3} 4k$ (C) $\sum_{k=0}^{n} 2^k$

ÇÖZÜM ⇨ (A) $a_i = i\cdot(i+1)!$ olduğundan, $a_1 = 1\cdot 2! = 2$, $a_2 = 2\cdot(2+1)! = 2\cdot 6 = 13$ $a_3 = 3\cdot(3+1)! = 3\cdot 24, ..., a_n = n\cdot(n+1)!$ dir.

$$\sum_{i=1}^{n} i\cdot(i+1)! = 2+13+72+...+n\cdot(n+1)!$$

(B) $\sum_{k=1}^{3} 4k = (4\cdot 1)+(4\cdot 2)+(4\cdot 3)$

(C) $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^0+2^1+2^2+2^3+...+2^n$

ALIŞTIRMA 2 ⇨ Aşağıdaki toplamları açık olarak yazınız.

(A) $\sum_{k=0}^{n} (k+1)!$ (B) $\sum_{i=3}^{n} (2i+4i^2)$ (C) $\sum_{n=1}^{5} 2^{-n}$

◆ *TOPLAM SEMBOLÜNÜN ($\sum$) KULLANIMI İLE İLGİLİ ÖZELİKLER*

Aşağıdaki tablo $\sum$ sembolünün kullanımı ile ilgili özelikleri göstermektedir.

$\sum$ Sembolünün kullanımı ile ilgili özelikler		
1. $\sum_{i=1}^{n} c$	=	$n\cdot c$
2. $\sum_{i=1}^{n} c\cdot a_i$	=	$c\sum_{i=1}^{n} a_i$
3. $\sum_{i=1}^{n} a_i$	=	$\sum_{i=1}^{k} a_i + \sum_{i=k+1}^{n} a_i,\ 1<k<n$
4. $\sum_{i=1}^{n} (a_i \pm b_i)$	=	$\sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i$
5. $\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ki}\right)$	=	$\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki}\right)$
6. $\sum_{k=p}^{q} a_k$	=	$\sum_{k=p-r}^{q-r} a_{k+r} = \sum_{k=p+r}^{q+r} a_{k-r}$

ÖRNEK 5 ⇨ $8+22+42+....+3n^2-n-2$ nin toplamını bulunuz

ÇÖZÜM ⇨ $a_n=3n^2-n-2$ olan

$$\sum_{k=1}^{n}(3k^2-k-2)$$

toplamını bulmaya çalışacağız.

$$\sum_{k=1}^{n}(3k^2-k-2)=\sum_{k=1}^{n}3k^2-\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}2$$ ←(Toplam sembolünün 4. özeliği)

$$=3\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k-2\sum_{k=1}^{n}1$$ ← (Toplam sembolünün 2. özeliği)

$$=3\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]-\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]-2[n]$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}-\frac{n(n+1)}{2}-\frac{4n}{2}$$

$$=\frac{n[(n+1)(2n+1)-(n+1)-4]}{2}$$

$$=\frac{n(2n^2+3n+1-n-1-4)}{2}=n(n^2+n-2)=n(n+2)(n-1)$$

ALIŞTIRMA 3 ⇨ $\forall n\in Z^+$ için $\sum_{k=1}^{n}(3k^2-k-2)=n(n+2)(n-1)$ olduğunu tüme varım yöntemi ile gösteriniz.

ÖRNEK 6 ⇨ $1\cdot 2+3\cdot 4+...+199\cdot 200$ toplamını sigma sembolü ile gösteriniz ve sonucu bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ Toplamın ilk terimi $1\cdot 2$ ve son terimi $199\cdot 200$ dür. $2k-1$ tek sayıları $2k$ da toplamdaki çift sayıları verir. İlk terimdeki ikinci çarpan $2=2k$ ise $k=1$ dir. Yani, toplamın alt sınırı 1 olacaktır. Son terimdeki ikinci çarpan $200=2k$ ise $k=100$ dür. Yani, toplamın üst sınırı 100 olacaktır.

$$1\cdot 2+3\cdot 4+...+199\cdot 200=\sum_{k=1}^{100}(2k-1)(2k)$$

$$=\sum_{k=1}^{100}(4k^2-2k)=4\sum_{k=1}^{100}k^2-2\sum_{k=1}^{100}k$$ ← (Toplam sembolünün 4. ve 2. özeliği)

$$= 4\left[\frac{100\cdot 101\cdot 201}{6}\right] - 2\left[\frac{100\cdot 101}{2}\right]$$

$$= 1\ 353\ 400 - 10\ 100 = 1\ 343\ 300$$

ALIŞTIRMA 4 ⇒ $1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + 3\cdot 4\cdot 5 + ... + 20\cdot 21\cdot 22$ toplamını sigma sembolü ile gösterin ve sonucu bulun.

ÖRNEK 7 ⇒ Aşağıda verilen toplamların değerlerini bulunuz.

(A) $\sum_{k=-2}^{10}(2k+1)$ (B) $\sum_{k=1}^{20}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$ (C) $\sum_{n=1}^{5}\sum_{k=1}^{4}(k+n)$

ÇÖZÜM ⇒ Önceden öğrendiğimiz formülleri kullanmak için k yı 1 den başlatalım.

$$\text{(A)}\ \sum_{k=-2}^{10}(2k+1) = \sum_{k=-2+3}^{10+3}\left[2(k-3)+1\right] = \sum_{k=1}^{13}(2k-5)$$

$$= 2\sum_{k=1}^{13}k - \sum_{k=1}^{13}5 \quad \leftarrow \left(\sum_{k=1}^{n}k = \frac{n(n+1)}{2}, \sum_{k=1}^{n}c = n\cdot c\right)$$

$$= 2\cdot\frac{13\cdot 14}{2} - 13\cdot 5$$

$$= 182 - 65 = 117$$

olur.

$$\text{(B)}\ \sum_{k=1}^{20}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \ln\frac{1}{2} + \ln\frac{2}{3} + \ln\frac{3}{4} + \ln\frac{4}{5} + \ln\frac{5}{6} + ... + \ln\frac{20}{21}$$

$$= \ln\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot ...\cdot\frac{20}{21}\right) \qquad \leftarrow (\ln a + \ln b = \ln(a\cdot b))$$

$$= \ln\left(\frac{1}{21}\right) = \ln 1 - \ln 21 \qquad \leftarrow \left(\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b\right)$$

$$= -\ln 21 \qquad \leftarrow (\ln 1 = 0)$$

olur.

$$\text{(C)}\ \sum_{n=1}^{5}\left[\sum_{k=1}^{4}k + \sum_{k=1}^{4}n\right] = \sum_{n=1}^{5}\left[\frac{4\cdot 5}{2} + 4\cdot n\right] \qquad \leftarrow \left(\sum_{k=1}^{n}k = \frac{n(n+1)}{2}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{5}(10+4n) = \sum_{n=1}^{5}10 + 4\sum_{n=1}^{5}n$$

$$= 5\cdot 10 + 4\frac{5\cdot 6}{2}$$

$$= 50 + 60 = 110$$

olur.

ALIŞTIRMA 5 ⇒ Aşağıda verilen toplamların değerlerini bulunuz.

(A) $\sum_{k=5}^{25}(2k-1)$ (B) $\sum_{k=3}^{50}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$ (C) $\sum_{k=1}^{5}\sum_{n=1}^{4}(k+2n)$

BÖLÜM 2-3 ÇARPIM SEMBOLÜ ($\prod$) VE ÖZELİKLERİ

- ***ÇARPIM SEMBOLÜ ($\prod$)***
- ***ÇARPIM SEMBOLÜNÜN KULLANIMI İLE İLGİLİ ÖZELİKLER***

◆ *ÇARPIM SEMBOLÜ ($\prod$)*

$n \in N$ ve $r \leq n$ olmak üzere $a_r \cdot a_{r+1} \cdot a_{r+2} \cdot a_{r+3} \cdot \ldots \cdot a_n$ çarpımı,

kısaca

çarpımın üst sınırı

$$\prod_{k=r}^{n} a_k \rightarrow k \ \ r \textit{ den } n \textit{ ye olmak üzere } a_k \textit{ sayıları}$$

indeks *çarpımın alt sınırı*

biçiminde gösterilir ve "$k = r$ den n ye kadar a_k sayılarının çarpımı" diye okunur. Şu halde,

$$\prod_{k=r}^{n} a_k = a_r \cdot a_{r+1} \cdot a_{r+2} \cdot \ldots \cdot a_n$$

olur.

ÖRNEK 1 ⇨ $\prod_{k=1}^{6} k$ olarak verilen çarpımın sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ $\prod_{k=1}^{6} k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 6! = 720$ dir.

ALIŞTIRMA 1 ⇨ $\prod_{k=1}^{6} a$ olarak verilen çarpımın sonucunu bulunuz. (Not: a nın sabit bir sayı olduğuna dikkat ediniz)

ÖRNEK 2 ⇨ $\prod_{k=1}^{n} 3^k$ olarak verilen çarpımın sonucunu yazınız.

ÇÖZÜM ⇨ $\prod_{k=1}^{n} 3^k = 3^1 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \cdot \ldots \cdot 3^n = 3^{1+2+3+\ldots+n} = 3^{\frac{n(n+1)}{2}}$ dir.

◆ ÇARPIM SEMBOLÜNÜN KULLANIMI İLE İLGİLİ ÖZELiKLER

Aşağıdaki tablo $\prod$ sembolünün kullanımı ile ilgili özelikleri göstermektedir.

$\prod$ Sembolünün kullanımı ile ilgili özelikler		
1. $\prod_{k=1}^{n} c$	=	c^{n}
2. $\prod_{k=1}^{n} ca_k$	=	$c^{n}\prod_{k=1}^{n} a_k$
3. $\prod_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k$	=	$\prod_{k=1}^{n} a_k \cdot \prod_{k=1}^{n} b_k$
4. $\prod_{k=1}^{n} a_k$	=	$\prod_{k=1}^{p} a_k \cdot \prod_{k=p+1}^{n} a_k$ $(1<p<n)$
5. $\prod_{k=p}^{n} a_k$	=	$\prod_{k=p-r}^{n-r} a_{k+r} = \prod_{k=p+r}^{n+r} a_{k-r}$
6. $\prod_{k=1}^{n}\left(\prod_{p=1}^{m} a_{kp}\right)$	=	$\prod_{p=1}^{m}\left(\prod_{k=1}^{n} a_{kp}\right)$

ÖRNEK 3 ⇨ $\prod_{k=2}^{6}\left(\frac{1}{k}-2\right)$ çarpımının sayısal değerini bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨

$$\prod_{k=2}^{6}\left(\frac{1}{k}-2\right)=\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdot\left(\frac{1}{3}-2\right)\cdot\left(\frac{1}{4}-2\right)\cdot\left(\frac{1}{5}-2\right)\cdot\left(\frac{1}{6}-2\right)$$

$$=\left(\frac{-3}{2}\right)\cdot\left(\frac{-5}{3}\right)\cdot\left(\frac{-7}{4}\right)\cdot\left(\frac{-9}{5}\right)\cdot\left(\frac{-11}{12}\right)$$

$$=-\frac{231}{32}$$

ÖRNEK 4 ⇨ $\prod_{k=2}^{7}\log_k(k+1)$ çarpımının sayısal değerini bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨

$$\prod_{k=2}^{7}\log_k(k+1)=\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\log_5 6\cdot\log_6 7\cdot\log_7 8 \leftarrow \left(\log_a b=\frac{\log b}{\log a}\right)$$

$$=\log_2 8=\log_2 2^3=3\log_2 2=3 \qquad \leftarrow (\log_a a=1)$$

ALIŞTIRMA 2 ⇨ Aşağıda verilen çarpımları hesaplayınız.

(A) $\prod_{k=1}^{n} 2^{\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}}$ (B) $\prod_{k=1}^{7}\log_2\frac{(k+1)^2}{k^2}$

ÖRNEK 5 ⇨ $\prod_{k=1}^{n} 4^{\frac{k}{5}} = 64$ olduğuna göre, n sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ $\prod_{k=1}^{n} 4^{\frac{k}{5}} = 64 \Rightarrow 4^{\frac{1}{5}} \cdot 4^{\frac{2}{5}} \cdot 4^{\frac{3}{5}} \cdot 4^{\frac{4}{5}} \cdot \ldots \cdot 4^{\frac{n}{5}} = 64$

$\Rightarrow 4^{\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}+\ldots+\frac{n}{5}} = 64$ $\leftarrow (a^b \cdot a^c \cdot a^d = a^{b+c+d})$

$4^{\frac{1}{5}(1+2+3+4+\ldots+n)} = 64 \Rightarrow 4^{\frac{1}{5}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)} = 4^3$

$\Rightarrow \frac{n(n+1)}{10} = 3 \Rightarrow n(n+1) = 30$ $\leftarrow (a^b = a^c \Rightarrow b = c)$

$\Rightarrow n = 5$

ALIŞTIRMA 3 ⇨ $\prod_{k=1}^{n} 2^{\frac{k}{5}} = 32$ olduğuna göre, n sayısını bulunuz.

ÖRNEK 6 ⇨ $\sum_{i=1}^{6}\left(\prod_{k=1}^{3} k\right)$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ $\sum_{i=1}^{6}\left(\prod_{k=1}^{3} k\right) = \sum_{i=1}^{6}(1 \cdot 2 \cdot 3) = \sum_{i=1}^{6} 3! = 6 \cdot 3!$

$= 36$

ALIŞTIRMA 4 ⇨ $\sum_{k=1}^{5}\left(\prod_{n=1}^{4}(n \cdot k)\right)$ ifadesinin değerini hesaplayınız.

BÖLÜM 2-4 GENEL TERİMİN BULUNMASI

◆ ***MODEL OLUŞTURMA***
◆ ***SONLU FARKLAR***

GİRİŞ

Şimdiye kadar verilen bir ifadenin veya önermenin doğruluğunu ispatlamaya çalıştık. Bütün bu ispatlanması için sorulan sorular nasıl ortaya çıktı ? Açık şekilde verilen sayılardan kapalı ifadeler bulundu ve daha sonra sorulacak sorular haline getirildi.

◆ *MODEL OLUŞTURMA*

Bazı zaman bir toplamın genel terimini bulmak zorundayız. Bazı kural ve prensipler aşağıda verilmektedir.

I. Toplamın birkaç terimini bulun. Bazı zaman terimi çarpan ve üslü şekilde yazmak yardım edebilir.

II. Model oluştururken dikkate alınması gerekenler :

1) Lineer model : $an+b$
2) İkinci dereceden model : an^2+b
3) Kübik model : an^3+b
4) Üslü model : $2^n+b, 3^n+b$
5) Faktörel model : $n!$, $(2n)!$, $(2n-1)!$

III. Modeli oluşturduktan sonra çıkarımın doğruluğunu ispatlamak için tüme varım metodunu kullanabiliriz.

◆ *SONLU FARKLAR*

Sonlu farklar model oluşturmaya yardımcı olur.

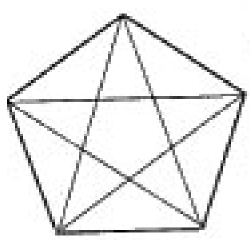
Birinci fark ardışık terimlerin çıkarılmasından bulunur. Eğer birinci fark her zaman aynı ise, model lineerdir.

İkinci fark ardışık birinci farkların çıkarılması ile bulunur. Eğer ikinci fark her zaman aynı ise, model ikinci derecedendir. İkinci dereceden modeli $y=ax^2+bx+c$ denklemi ile bulabileceğimizi hatırlayalım. Denklem sistemlerini çözerek sonuçları bulabiliriz. Bir toplamın genel terimi olan a_n yi toplamın üç terimini $a_n=an^2+bn+c$ denklemine koyarak elde ettiğimiz denklem sistemlerini çözerek bulabiliriz.

ÖRNEK 1⇒ n kenarlı bir konveks çokgenin $(n \geq 3)$ kaç tane köşegeni vardır bulunuz.

ÇÖZÜM ⇒ Bazı çokgenlerin kenar sayısına bağlı olarak köşegen sayılarını bulalım. Aşağıdaki tablo kenar sayılarına bağlı olarak köşegen sayılarını göstermektedir.

Tablo 1							
Kenar sayısı (n)	3	4	5	6	7	8	9
Köşegen sayısı	0	2	5	9	14	20	27



Bir konveks çokgenin n tane kenarı varsa kaç tane köşegeni vardır?

Ardışık birinci farklar arasındaki fark(ikinci fark) sabittir. Eğer ikinci fark sabit ise, o zaman model ikinci derecedendir.

0, 2, 5, 9, ……….. $n \geq 3$

2 3 4

1 1

İkinci dereceden model $y = ax^2 + b + c$ üç nokta ele alınarak çözülebilir. $a_n = an^2 + bn + c$ genel terimini bulmak için üç tane terim alınarak lineer denklemler oluşturulur ve çözülür.

$$a_n = an^2 + bn + c \Rightarrow n = 3 \Rightarrow 0 = a \cdot 3^2 + 3 \cdot b + c \Rightarrow c = -9a - 3b$$

$$n = 4 \Rightarrow 2 = a \cdot 4^2 + 4 \cdot b + c \Rightarrow 2 = 16a + 4b + c$$

$$n = 5 \Rightarrow 5 = a \cdot 5^2 + 5 \cdot b + c \Rightarrow 5 = 25a + 5b + c$$

$$2 = 16a + 4b - 9a - 3b \Rightarrow 2 = 7a + b \Rightarrow b = 2 - 7a$$

$$5 = 25a + 5b - 9a - 3b \Rightarrow 5 = 16a + 2b \Rightarrow 5 = 16a + 2(2 - 7a)$$

$$5 = 16a + 4 - 14a$$

$$1 = 2a \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$b = 2 - 7a \Rightarrow b = 2 - \frac{7}{2} \Rightarrow b = \frac{-3}{2}$$

$$c = -9a - 3b \Rightarrow c = -9.\frac{1}{2} - 3.(\frac{-3}{2}) = 0$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n \Rightarrow a_n = \frac{n^2 - 3n}{2}$$

ARAŞTIRMALAR

1). Bir odada bulunan n tane kişi $(n \geq 2)$ herbiri ile bir kere olmak üzere el sıkışıyor.

(A) Kişi sayısına bağlı olarak el sıkışma sayılarını bulunuz.

(B) Kişi sayısına bağlı olan el sıkışma sayısını genel terim olarak ifa ediniz. (Kombinasyon, Permütasyon konusunu düşünün.)

(C) Bulduğunuz genel terimi toplam sembolü $\sum$ ile ilişkilendirin.

(D) Bulduğunuz toplamın $\dfrac{n^2 - n}{2}$ ye eşit olduğunu gösteriniz.

2) $\sum_{k=1}^{7} (-1)^k \log k$ toplamı……………………..eşittir.

ÜNİTENİN ÖZETİ

Bir ifadenin (P) bütün doğal sayılar için doğru olduğunu ispatlamak için kullanılan tüme varım yöntemi dört aşama içermektedir : (1) P nin $n=1$ için doğru olduğunu gösterme, (2) P nin $n=k$ için doğru olduğunu varsayma, (3) k ne olursa olsun P nin $n=k+1$ için doğru olduğunu gösterme, ve (4) Sonuç: P ile ifade olunan fikir bütün pozitif doğal sayılar için doğrudur.

Toplanan terimler arasında düzenli bir bağlantı varsa bunu Yunan harfi olan $\sum$ (sigma) sembolü ile gösterebiliriz. Çok sıklıkla kullanılan toplam formülleri şu şekilde özetlenebilir:

Toplanan terimler arasındaki bağlantının $\sum$ sembolü ile gösterimi	Toplanan terimlerin açık yazılımı	Toplam formülü
$\sum_{k=1}^{n} k$	$1+2+3+...+n$	$\frac{n(n+1)}{2}$
$\sum_{k=1}^{n} 2k$	$2+4+6+8+...+2n$	$n(n+1)$
$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)$	$1+3+5+...+(2n-1)$	n^2
$\sum_{k=1}^{n} k^2$	$1^2+2^2+3^2+...+n^2$	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$\sum_{k=1}^{n} (2k)^2$	$2^2+4^2+6^2+...+(2n)^2$	$\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$
$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2$	$1^2+3^2+5^2+...+(2n-1)^2$	$\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$
$\sum_{k=1}^{n} k^3$	$1^3+2^3+3^3+...+n^3$	$\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

Çarpılan terimler arasında düzenli bir bağlantı varsa bunu $\prod$ sembolü kullanarak daha kısa bir şekilde gösterebiliriz.

DEĞERLENDİRME SORULARI

1. $1+3+5+7+...+97$ toplamının terim sayısı kaçtır ?

A) 97 B) 52 C) 49 D) 48 E) 5

2. $10^2+11^2+12^2+...+20^2$ toplamının değeri nedir ?

A) 2870 B) 2875 C) 2580 D) 2585 E) Hiçbiri

3. $1+1+2+3+3+4+5+5+6+7+7+8+9+9+...+19+19+20+21+21$ toplamının sonucu nedir ?

A) 252 B) 352 C) 441 D) 570 E) 672

4. $\sum_{k=n}^{n^2} 2k$ ifadesi neye eşittir ?

A) n^4-n B) n^4+n C) $\frac{n^4-n}{2}$ D) $\frac{n^4+n}{2}$ E) n^4

5. $f:N\to N$, $g:N\to N$ iki fonksiyon,

$$f(x)=\sum_{k=1}^{x}\frac{k}{75},\ g(x)=\sum_{k=1}^{x}k^3$$

biçiminde veriliyor. Buna göre (fog) (5) değeri kaçtır ?

A) 678 B) 564 C) 339 D) 225 E) 125

6. $\sum_{k=1}^{4} k\log 2$ toplamının sonucu nedir ?

A) $10+\log 2$ B) $\log 2^{10}$ C) $4\log 2^4$ D) $4+\log 2$ E) Hiçbiri

7. $\sum_{k=n}^{3n}(2k+1)$ toplamı aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $(4n+1)(2n+1)$ B) $(4n+1)(2n+2)$ C) $8n^2+1$

D) $10n^2+1$ E) $(4n+1)$

8. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}$ toplamının Σ sembolü ile gösterimi

aşağıdakilerden hangisidir ?

A) $\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k-2}+\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^{2k-1}$ B) $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k-2}+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{-1}{2}\right)^{2k-1}$

C) $\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2}+\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^{2n-1}$ D) $\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1}-\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1}$

E) Hiçbiri

9. $\prod_{k=5}^{24}\log_k(k+1)$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) Hiçbiri

10. $\prod_{k=1}^{n}10^{\frac{k}{7}}=1000$ ise n nin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6