1. ÜNİTE

TRİGONOMETRİ

1-1 AÇILAR
Araştırmalar
Bölümün Özeti
Değerlendirme Soruları
1-2 TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR VE GRAFİKLERİ
Araştırmalar
Bölümün Özeti
Değerlendirme Soruları
1-3 TRİGONOMETRİK ÖZDEŞLİKLER ve DENKLEMLER
Araştırmalar
Bölümün Özeti
Değerlendirme Soruları

BU ÜNİTENİN HEDEFLERİ

Bu üniteyi çalıştığınızda,

- Açı ve açı ölçülerini kavrayabilecek,
- Açı ve açı ölçüleri ile ilgili uygulama yapabilecek,
- Trigonometrik fonksiyonların tanımlarını kavrayabilecek,
- Trigonometrik fonksiyonların tanım ve değer kümesini bulabilecek,
- Trigonometrik fonksiyonlarla ilgili uygulama yapabilecek,
- Trigonometrik değerler tablosunu kavrayabilecek,
- Trigonometrik değerler tablosu ile ilgili uygulama yapabilecek,
- Trigonometrik fonksiyonların grafiklerini çizebilecek,
- Trigonometrik fonksiyonların grafikleri ile uygulama yapabilecek,
- Ters trigonometrik fonksiyonları kavrayabilecek,
- Ters trigonometrik fonksiyonların grafiklerini çizebilecek,
- Kosinüs, sinüs, tanjant teoremlerini kavrayabilecek,
- Kosinüs, sinüs, tanjant teoremleri ile ilgili uygulama yapabilecek,
- Özdeşlikleri kavrayabilecek,
- Özdeşlikler ile ilgili uygulama yapabilecek,
- Trigonometrik denklemleri kavrayabilecek,
- Trigonometrik denklemler ile ilgili uygulama yapabileceksiniz.

YUKARIDAKİ HEDEFLERİ KAZANMAK İÇİN NE YAPMALIYIZ?

- Rasyonel sayılar ile ilgili bilgilerinizi tekrarlayınız.
- Konuda verilen örnekleri çözerek çalışınız.
- Konuda verilen alıştırma ve problemleri yanıtlayınız.
- Konu sonunda verilen araştırma ve değerlendirme sorularını yanıtlayınız.
- Kaynak kısmında yer alan kitaplardan yararlanarak çok sayıda soru çözünüz.

BÖLÜM 1-1 AÇILAR

- ***YÖNLÜ AÇILAR***
- ***YÖNLÜ YAYLAR***
- ***BİRİM ÇEMBER***
- ***AÇI ÖLÇÜSÜ BİRİMLERİ***
- ***BİRİM ÇEMBERDE AÇILARIN* ÖLÇÜLERİ**

GİRİŞ

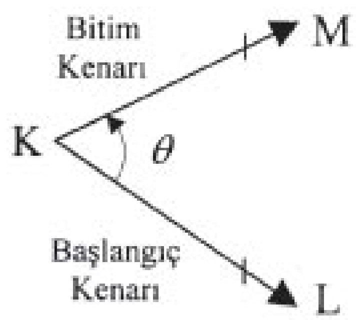
Bu bölümde yönlü açılar, yönlü yaylar, birim çember, açı ölçüsü birimleri ve birim çemberde açıların ölçüleri konularında bilgi verilecektir.

◆ *YÖNLÜ AÇILAR*

Bir açı, başlangıç noktaları ortak iki ışından birinin sabit tutularak diğer ışının başlangıç noktası etrafında döndürülmesiyle oluşur.

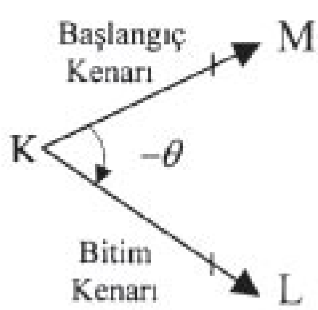
Bir açı, kenarlarının söyleniş sırasına göre yönlendirilir.

LKM açısı aşağıda gösterilmiştir.



Yandaki şekilde verilen açı KL ışınından KM ışınına doğru yönlendirilmiştir. Bu yön, bir ok ile belirtilmiştir. Bu açının yönü, saatin akrep ve yelkovanının hareket yönü ile terstir. Bu yöne ***pozitif yön*** denir.

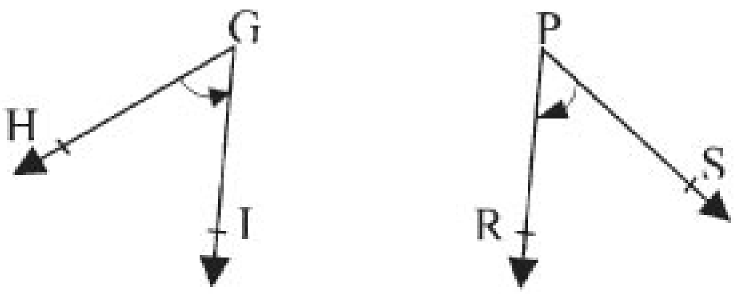
MKL açısı aşağıda gösterilmiştir.



Yandaki şekilde verilen açı KM ışınından KL ışınına doğru yönlendirilmiştir. Bu yön ok ile belirtilmiştir. Bu açının yönü, saatin akrep ve yelkovanının hareket yönü ile aynıdır. Bu yöne ***negatif yön*** denir.

İleride LKM ve MKL açılarının ölçülerinin de farklı olduğunu göreceksiniz.

ÖRNEK 1 ⇨ Aşağıda verilen açıları tek tek inceleyelim.



(a) (b)

✪ (a) daki açıyı inceleyelim:
Başlangıç kenarı: $[GH$
Bitim kenarı : $[GI$
Köşe : G
Yön : Saat yönünün tersi

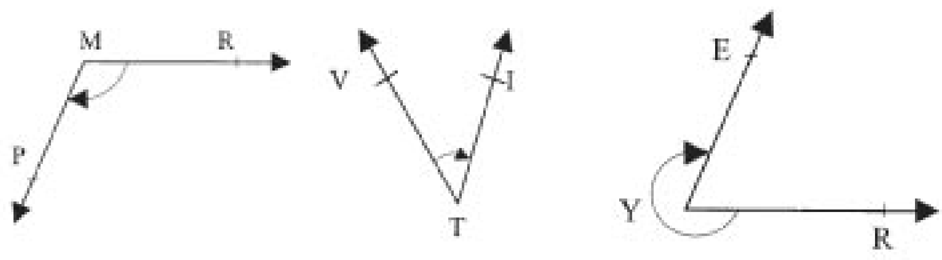
Yukarıdaki bilgiler ışığında HGI açısı **pozitif** yönlendirilmiş bir açıdır.

✪ (b) deki açıyı inceleyelim:
Başlangıç kenarı: $[PS$
Bitim kenarı : $[PR$
Köşe : P
Yön : Saat yönünde

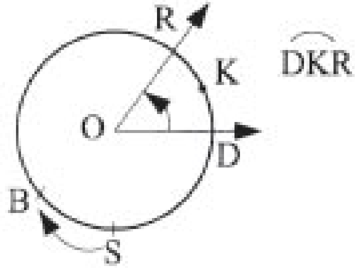
Yukarıdaki bilgiler ışığında SPR açısı **negatif** yönlendirilmiş bir açıdır.

ALIŞTIRMA 1 ⇨ Aşağıda verilen açıların yönleri hakkında bilgi veriniz.

(A) (B) (C)



YÖNLÜ YAYLAR



Merkezi, O noktası olan çember ile pozitif yönlü DOR merkez açısı çizilmiştir. D, R noktaları ile çemberin, DOR açısının iç bölgesindeki noktalarının oluşturduğu yönlü yay, DKR yayıdır. Başlangıç noktası D, bitim noktası R olan bu yay, $\overset{\frown}{DKR}$ biçiminde gösterilir.

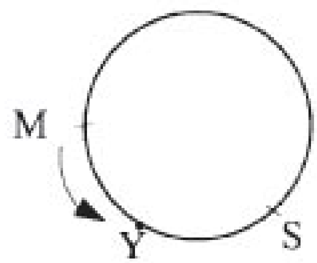
DOR açısının yönü <u>pozitif</u> olduğundan, DKR yayının yönü de <u>pozitiftir.</u>

Bir yay, başlangıç noktasından bitim noktasına doğru yönlendirilir.

DKR yayının yönü, saatin yönü ile *ters* olduğundan *pozitiftir*.

Şekildeki SB yayının yönü, saatin yönü ile *aynı* olduğundan, *negatiftir*.

ÖRNEK 2 ⇒ Aşağıdaki çemberde başlangıç noktası M, bitim noktası S ve bir noktası Y olan yayı yazalım ve yönünü belirtelim.

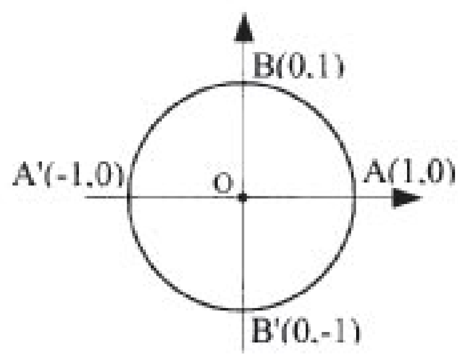


Başlangıç noktası : M
Bitim noktası : S
Ara nokta : Y
Yön : Saat yönünün tersi

İstenilen yay MYS yayıdır ve yönü pozitiftir.

◆ *BİRİM ÇEMBER*

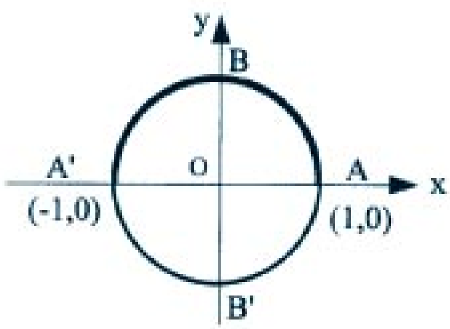
Analitik düzlemde merkezi, koordinat eksenlerinin kesiştikleri nokta olan (başlangıç noktası) ve yarıçapı 1 birim uzunlukta olan çembere **birim çember** denir. Bu çember aynı zamanda trigonometrik çember olarak da isimlendirilir.



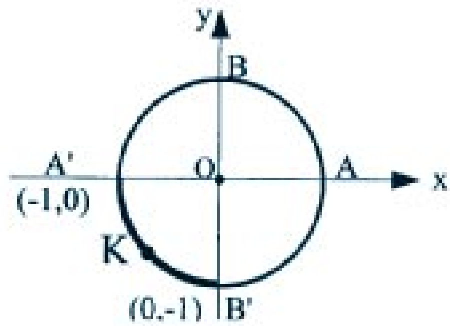
Yarıçapı r birim olan çemberin çevresi, $2 \cdot \pi \cdot r$ birim olduğundan; yarıçapı 1 birim olan birim çemberin çevresi $2 \cdot \pi \cdot 1 = 2\pi$ birimdir.

Not: π sayısı irrasyonel bir sayıdır. Hesaplamalarda, $\pi = 3{,}1415926\ldots$ sayısının yerine, yaklaşık değeri olan 3,14 veya $\frac{22}{7}$ sayısı kullanılacaktır.

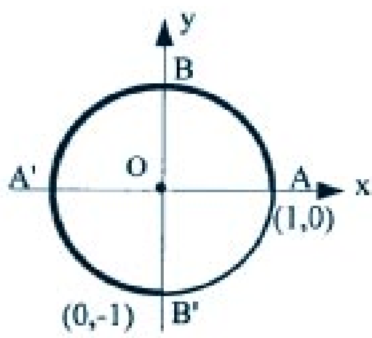
Birim çemberde bazı yayların uzunluklarını yazalım.



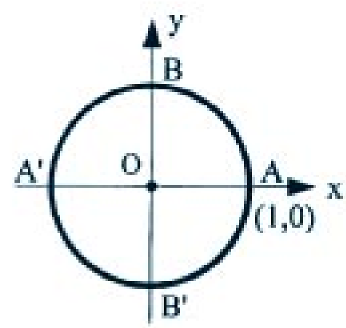
$\left|\widehat{ABA'}\right| = \frac{2\pi}{2} = \pi$ birimdir



$\left|\widehat{A'KB'}\right| = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ birimdir

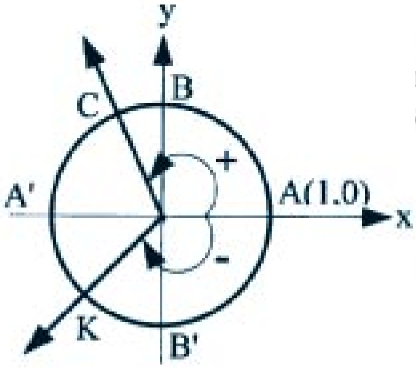


$\left|\widehat{ABB'}\right| = (\pi + \frac{\pi}{2}) = \frac{3\pi}{2}$ *birimdir.*



$\left|\widehat{AB'A}\right| = 2\pi$ birimdir

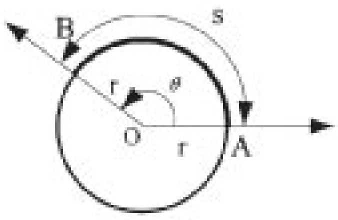
Birim Çemberde Yönlü Açı



köşesi , koordinat eksenlerinin kesim noktası başlangıç kenarı [OA olan yönlü açı, standart konumdadır.

yandaki şekilde, standart konumda verilen AOC açısının yönü pozitif, AOK açısının yönü negatiftir.

AÇI ÖLÇÜSÜ BİRİMLERİ

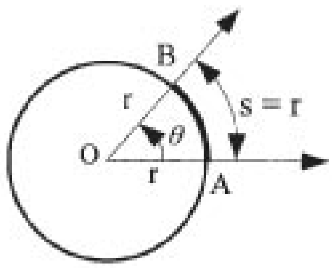


AOB açısının ölçüsü, $m(\widehat{AOB})$ ile gösterilir. Açı ölçüsü birimleri: "radyan", "derece" ve "grad" dır.

Eğer AOB açısının köşesi, yarıçapı $r>0$ olan çemberin merkezinde ve AOB açısının karşısındaki çember yayının uzunluğu "s" ise θ nın radyan ölçüsü

$\theta = \dfrac{s}{r}$ ve $s = \theta \cdot r$ dır.

Radyan



Eğer $s = r$ ise,

$$\theta = \frac{r}{r} = 1 \text{ radyan}$$

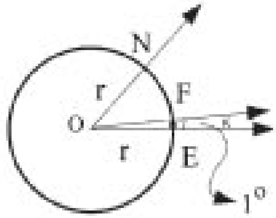
Bir çemberin yarıçapının uzunluğuna eşit uzunluktaki yayı gören merkez açının ölçüsüne <u>1 radyan</u> denir.

O merkezli çemberin yarıçapı $|OA| = r$ birim, $\left|\widehat{AB}\right| = 1$ birim ise,

$m(\widehat{AOB}) = 1$ radyandır.

$$\theta = 1 \text{ radyan dır.}$$

Derece



Bir açının kollarından biri ($[OE$) sabit kalmak koşuluyla diğer kolunun bir tam dönüş yapması ile oluşturduğu açının ölçüsü 360 derecedir (360°). OE ışınının, O noktasında tam dönüşünün $\dfrac{1}{360}$ ı olan , EOF açısının ölçüsü 1 derecedir.

Genel olarak dereceyi tanımlarsak; bir çemberin çevre uzunluğunun $\dfrac{1}{360}$ ını gören merkez açının ölçüsüne **1 derece** (1°) denir. ° sembolü dereceyi gösterir.

1 derecenin $\frac{1}{60}$ ına 1 <u>dakika</u> denir ve $1'$ ile gösterilir.

$1° = 60'$ (Bir derece 60 dakikadır.)

1 dakikanın $\frac{1}{60}$ ına 1 saniye denir ve $1''$ ile gösterilir.

$1' = 60''$ (Bir dakika 60 saniyedir.)

ÖRNEK 3 ⇒ Yarıçapı 4 metre olan çemberin merkez açısının karşısındaki yayın ölçüsü 24 metre ise merkez açının ölçüsünün kaç radyan olduğunu bulunuz.

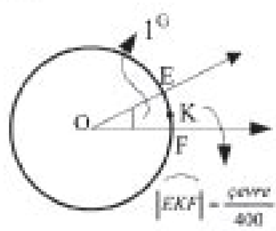
ÇÖZÜM ⇒ r = 4 m ve s=24 m dir.

θ nın radyan olarak değerini bulacağız.

$$\theta = \frac{s}{r}$$

$$\theta = \frac{24}{4} = 6 \text{ radyandır.}$$

Grad



Bir çemberin çevresinin uzunluğunun 400 de birini $\left(\frac{1}{400}\textit{ ünü}\right)$ gösteren merkez açının ölçüsüne, 1 grad denir ve 1^G ile gösterilir.

Çemberin $2\pi r$ birim olan çevresi:

- r yarıçap uzunluğunun 2π katı;
- $1°$ lik yay uzunluğunun 360 katı;
- 1^G lık yay uzunluğunun 400 katı

olduğundan, derece, radyan ve grad arasında,

$360° = 2\pi$ radyan = 400 grad veya
$180° = \pi$ radyan=200 grad bağıntısı vardır.

Buna göre, derece D ile radyan R ile, grad G ile gösterilirse aşağıdaki bağıntı (orantı) elde edilir.

$$\frac{D}{360}=\frac{R}{2\pi}=\frac{G}{400} \qquad \textbf{\textit{veya}} \qquad \frac{D}{180}=\frac{R}{\pi}=\frac{G}{200} \text{ dür.}$$

Bu bağıntılar bir açının ölçüsünü öteki birimlere çevirmede kullanılır.

ÖRNEK 4 ⇨ 1 radyanın, derece ve grad cinsinden değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ π radyan=180° ve π radyan=200^G

1 radyan=$\frac{180}{\pi}$ derece ve 1 radyan=$\frac{200}{\pi}$ grad

1 radyanın değerini derece cinsinden bulalım :

$\pi=\frac{22}{7}$ olarak alalım.

$$1 \text{ radyan}=\frac{180}{\frac{22}{7}} \text{ derece}$$

$$=\frac{180\cdot 7}{22} \text{ derece}$$

$$=57\frac{3}{11} \text{ derece olur.}$$

1 radyanın grad cinsinden değerini bulalım.

1 radyan=$\frac{200}{\pi}$ grad ve $\pi=\frac{22}{7}$ ise

$$1 \text{ radyan}=\frac{200}{\frac{22}{7}} \text{ grad}$$

$$=\frac{200\cdot 7}{22} \text{ grad}=63\frac{7}{11} \text{ grad olur.}$$

ALIŞTIRMA 2 ⇨ Aşağıdaki alıştırmaları yapınız:

(A) 1 derecenin radyan ve grad cinsinden değerlerinin

$$1° = \frac{\pi}{180} \text{ radyan ve } \quad 1° = \frac{10}{9} \text{ grad}$$

olduğunu gösteriniz.

(B) 1 gradın, derece ve radyan cinsinden değerlerinin

$$1^{G} = \frac{\pi}{200} \text{ radyan ve } 1^{G} = \frac{9}{10} \text{ derece}$$

olduğunu gösteriniz.

ÖRNEK 5 ⇨ $\frac{\pi}{3}$ radyanın, derece ve grad cinsinden değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ Yukarıda sorulan soruyu iki farklı yolla çözeceğiz:

I.Yol:
Aşağıda verilen eşitliği kullanarak soruyu çözeceğiz:

$$1 \text{ radyan} = \frac{180}{\pi} \text{ derece} \qquad\qquad 1 \text{ radyan} = \frac{200}{\pi} \text{ grad}$$

$$\frac{\pi}{3} \text{ radyan} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{180}{\pi} \text{ derece} = 60°$$

$$\frac{\pi}{3} \text{ radyan} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{200}{\pi} \text{ grad} = \frac{200}{3} \text{ grad dır.}$$

II. Yol:
Yukarıda sorulan soruyu aşağıda verilen bağıntıları kullanarak çözeceğiz:

$$\frac{R}{\pi} = \frac{D}{180} \qquad \text{ve} \qquad \frac{R}{\pi} = \frac{G}{200}$$

$\frac{R}{\pi} = \frac{D}{180}$ olduğundan,

$$\frac{\frac{\pi}{3}}{\pi} = \frac{D}{180} \Rightarrow D = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot 180 \text{ (Orantıda içler ve dışlar çarpımı eşitliği kullanıldı.)}$$

$$\Rightarrow D = 60°$$

$\dfrac{R}{\pi}=\dfrac{G}{200}$ olduğundan,

$\dfrac{\frac{\pi}{3}}{\pi}=\dfrac{G}{200}\Rightarrow G=\dfrac{\pi}{3}\cdot\dfrac{1}{\pi}\cdot 200$ (Orantıda içler ve dışlar çarpımı eşitliği kullanıldı.)

$\Rightarrow G=\dfrac{200}{3}$

ALIŞTIRMA 3 ⇨ Aşağıdaki alıştırmaları yapınız.

(A) $\dfrac{5\pi}{6}$ radyan kaç derecedir? (B) $\dfrac{\pi}{15}$ radyan kaç grad dır?

ÖRNEK 6 ⇨ 60° nin, radyan ve grad cinsinden değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ $1°=\dfrac{\pi}{180}$ radyan ve $1°=\dfrac{10}{9}$ grad

$60° = 60\cdot\dfrac{\pi}{180}=\dfrac{\pi}{3}$ radyan dır.

$60° = 60\cdot\dfrac{10}{9}=\dfrac{200}{3}$ grad dır.

ALIŞTIRMA 4⇨ Aşağıdaki alıştırmaları yapınız.

(A) $\dfrac{\pi}{4}$ kaç derecedir? (B) $\dfrac{\pi}{20}$ kaç grad dır?

(C) 45 gradın, derece ve radyan cinsinden değerlerini bulunuz.

ÖRNEK 7 ⇨ 2 derece 3 dakika 4 saniye olan P açısının ölçüsü kaç saniyedir?

ÇÖZÜM ⇨ $2°\ 3'\ 4''=\ldots$ saniyedir.

$1°=60'$ ve $1'=60''$ olduğuna göre,

$1°=60\cdot 60''=3600''$ dir.

O halde,

$2°\ 3'\ 4''=2°+3'+4''=2\cdot 3600''+3\cdot 60''+4''=7384''$ dir.

ÖRNEK 8 ⇒ 23456 saniyelik açı kaç derece, kaç dakika ve kaç saniyedir?

ÇÖZÜM ⇒

$$\begin{array}{r|l} 23456 & 3600 \\ \hline -\underline{21600} & 6^\circ \\ 01856'' & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1856 & 60 \\ \hline -\underline{1800} & 30' \\ 56'' & \end{array}$$

$23456'' = 6^\circ\ 30'\ 56''$ dir.

ÖRNEK 9 ⇒ $m(\hat{A}) = 30^\circ\ 43'\ 46''$ ve $m(\hat{B}) = 22^\circ\ 55'\ 18''$ ise $m(\hat{A}) + m(\hat{B})$, $m(\hat{A}) - m(\hat{B})$ ve $2.\ m(\hat{A})$ yı bulunuz.

ÇÖZÜM ⇒ $m(\hat{A}) + m(\hat{B})$ yi bulalım.

$$\begin{array}{rl} & m(\hat{A}) = 30^\circ\ 43'\ 46'' \\ + & m(\hat{B}) = 22^\circ\ 55'\ 18'' \\ \hline \end{array}$$

$m(\hat{A}) + m(\hat{B}) = 52^\circ\ 98'\ 64'' \ = \ 52^\circ\ 99'\ 4''$

←($64'' = 1'\ 4''$ buradaki $1'$, $98'$ ya eklendi)

$= 52^\circ\ 99'4'' \ = \ 53^\circ 39' 4''$

←($99' = 1^\circ + 39'$ buradaki 1°, 52° ye eklendi)

$m(\hat{A}) - m(\hat{B})$ yi bulalım:

$$\begin{array}{rl} & m(\hat{A}) = 30^\circ\ 43'\ 46'' \\ - & m(\hat{B}) = 22^\circ\ 55'\ 18'' \\ \hline \end{array}$$

←(43 ten 55 i çıkaramadığımız için 30° den $1^\circ = 60'$ alıp $43'$ ya ekleyelim.)

$$\begin{array}{rl} & m(\hat{A}) = 29^\circ 103'\ 46'' \\ - & m(\hat{B}) = 22^\circ\ 55'\ 18'' \\ \hline \end{array}$$

$m(\hat{A}) - m(\hat{B}) = 7^\circ\ 48'\ 28''$

$m(\hat{A}) \cdot 2$ yi bulalım:

$$
\begin{array}{lr}
 & m(\hat{A}) = 30^\circ\ 43'\ 46'' \\
x & 2 \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
m(\hat{A}) \cdot 2 &= 60^\circ\ 86'\ 92'' && \leftarrow (92'' = 1'\ 32'' \text{ ve buradaki } 1', 86' \text{ ya eklendi.}) \\
&= 60^\circ 87'\ 32'' && \leftarrow (87' = 1^\circ\ 27' \text{ ve buradaki } 1^\circ, 60^\circ \text{ ye eklendi.}) \\
&= 61^\circ 27'\ 32''
\end{aligned}
$$

Merkez açının derece cinsinden ölçüsü α ise, merkez açının gördüğü yayın uzunluğu,

$$\ell = \frac{2\pi r}{360} \cdot \alpha \text{ birimdir.}$$

Merkez açının radyan cinsinden ölçüsü θ ise, merkez açının gördüğü yayın uzunluğu,

$$\ell = r \cdot \theta \text{ birimdir.}$$

ÖRNEK 10 ⇨ **(A)** Yarıçapı 25 cm olan çemberdeki 80°lik merkez açının gördüğü yayın uzunluğunu bulunuz.

(B) Yarıçapı 10 cm olan çemberdeki 30 radyanlık merkez açının gördüğü yayın uzunluğunu bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ **(A)** $r = 25$ cm $\alpha = 80^\circ$ $\ell = ?$

$$\ell = \frac{2\pi r}{360} \cdot \alpha \Rightarrow \ell = \frac{2 \cdot \pi \cdot 25}{360} \cdot 80 = \frac{\pi \cdot 50 \cdot 80}{360} = \frac{100\pi}{9} \text{ birimdir.}$$

(B) $r = 10$ $\theta = 30$ radyan ise, $\ell = ?$

$$\ell = r \cdot \theta = 10 \cdot 30 = 300 \text{ birimdir.}$$

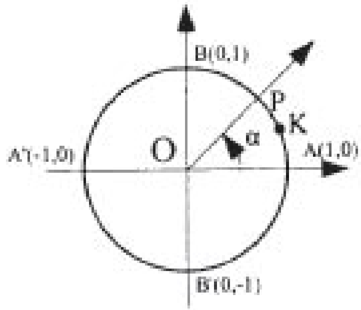
ALIŞTIRMA 5 ⇨ Aşağıdaki alıştırmaları yapınız.

(A) Yarıçapı 5 cm olan çemberdeki 42° lik merkez açının gördüğü yayın uzunluğu kaç birimdir?

(B) Yarıçapı 22 cm olan çemberdeki 80 radyanlık merkez açının gördüğü yayın uzunluğu kaç birimdir?

◆ BİRİM ÇEMBERDE AÇILARIN ÖLÇÜLERİ

Yönlü Açıların Radyan Cinsinden Ölçüleri



O merkezli birim çemberde, standart konumdaki AOP açısı çizilmiştir.

$0 \leq \alpha < 2\pi$ olmak üzere, α gerçek sayısı P noktasına eşlendiğine göre, AKP yayının uzunluğu,

$$\left|\overset{\frown}{AKP}\right| = \alpha \text{ birimdir.}$$

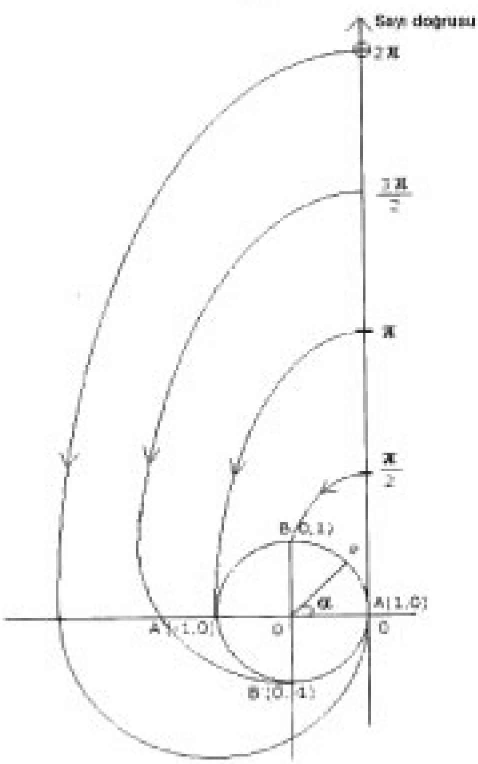
Bir çemberde, yarıçap uzunluğundaki yayı gören merkez açının ölçüsü 1 radyan olduğundan, birim çemberde AP yayını gören AOP merkez açısının ölçüsü,

$$m(\widehat{AOP}) = \frac{\left|\overset{\frown}{AKP}\right|}{r} \text{ radyan} = \frac{\alpha}{1} \text{ radyan} = \alpha \text{ radyan olur.}$$

Birim çemberde,

$$\left|\overset{\frown}{AKP}\right| = \alpha \text{ birim} \Leftrightarrow m(\widehat{AOP}) = \alpha \text{ radyandır.}$$

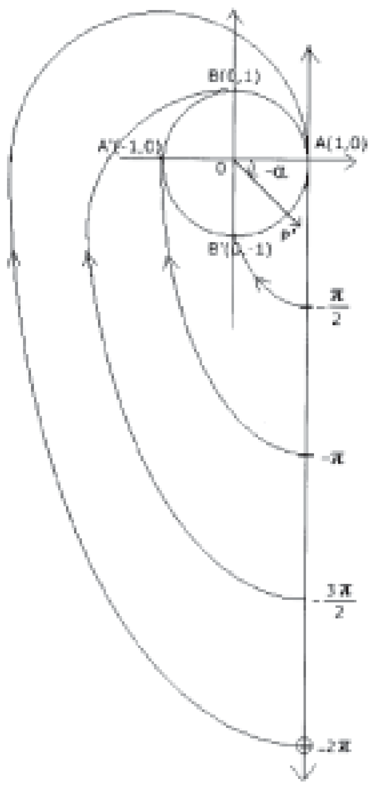
RNEK 11 ➜ $\left|\overset{\frown}{AKP}\right| = \frac{\pi}{5}$ birim ise $m(\widehat{AOP}) = \frac{\pi}{5}$ radyandır.



Yandaki şekilde görüldüğü gibi çemberin A(1,0) noktasından geçen bir teğet çizilmiştir. Bu teğet sayı doğrusu olarak isimlendirilmiştir. Sayı doğrusunun sıfır (0) sayısı, A(1,0) noktasına gelmek üzere, sayı doğrusunun $[0,\ 2\pi)$ aralığı birim çembere sarıldığında; $\frac{\pi}{2}$ sayısı B(0,1) noktasına; π sayısı $A'(-1,\ 0)$ noktasına; $\frac{3\pi}{2}$ sayısı $B'(0,-1)$ noktasına eşlenir.

Sayı doğrusunun pozitif gerçek sayıların bulunduğu kısmının tümünü **pozitif yönde** birim çembere sardığımızı düşünelim.

Sayı doğrusunun pozitif gerçek sayıların bulunduğu kısmının tümünü pozitif yönde birim çembere sararken, P noktasına eşlenen sayılardan biri α ise, birim çemberin uzunluğu 2π birim olduğundan; $\alpha + 2\pi$, $\alpha + 2 \cdot 2\pi$, $\alpha + 3 \cdot 2\pi$,… sayıları da P noktasına eşlenir.



Yandaki şekilde görüldüğü gibi sayı doğrusunun sıfır (0) sayısı, A(1,0) noktasına gelmek üzere, sayı doğrusunun $(-2\pi, 0]$ aralığı birim çembere sarıldığında; $-\frac{\pi}{2}$ sayısı $B'(0,-1)$ noktasına; $-\pi$ sayısı, $A'(-1,0)$ noktasına; $-\frac{3\pi}{2}$ sayısı, B(0,1) noktasına eşlenir.

Sayı doğrusunun negatif gerçek sayıların bulunduğu kısmı, negatif yönde birim çembere sarıldığında;

$$-2\pi + \alpha = \alpha + (-1) \cdot 2\pi,\ \alpha + (-2) \cdot 2\pi, \alpha + (-3) \cdot 2\pi, ...$$

sayıları da P noktasına eşlenir.

Buna göre, $k \in Z$ olmak üzere, P noktasına eşlenen sayılar, $\alpha + k \cdot 2\pi$ biçimindedir.

Sayı doğrusunun negatif gerçek sayıların bulunduğu kısmını, negatif yönde birim çembere sararken, P' noktasına eşlenen sayılardan biri $-\alpha$ ise;

$-\alpha - 2\pi,\ -\alpha - 2 \cdot 2\pi,\ -\alpha - 3 \cdot 2\pi, ...$ sayıları da P' noktasına eşlenir.

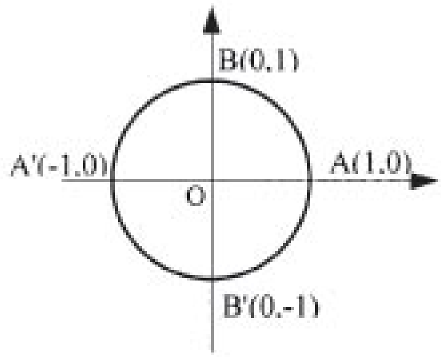
Sayı doğrusunun pozitif gerçek sayıların bulunduğu kısmını, pozitif yönde birim çembere sararken;

$$2\pi - \alpha = -\alpha + 2\pi,\ -\alpha + 2\cdot 2\pi,\ -\alpha + 3\cdot 2\pi,\ \text{sayıları},\ P'$$

noktasına eşlenir.

Buna göre, $k \in Z$ olmak üzere P' noktasına eşlenen sayılar $-\alpha + k\cdot 2\pi$ biçimindedir.

ÖRNEK 12 ⇨Birim çemberin A(1,0) noktasına eşlenen sayıları bulalım. Birim çemberin uzunluğu 2π birimdir.



$k \in Z$ olmak üzere, A(1,0) noktasına eşlenen sayılar $0 + k\cdot 2\pi = k\cdot 2\pi$ biçimindedir. Bu ifade de k yerine $\{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$ kümesinden bir sayı koyduğumuzda, elde ettiğimiz sayılar şunlardır: $\ldots,-4\pi,-2\pi,0,\ 2\pi,\ 4\pi,\ldots$

Birim çemberin B(0,1) ve $B'(0,-1)$ noktasına eşlenen sayıları bulunuz.

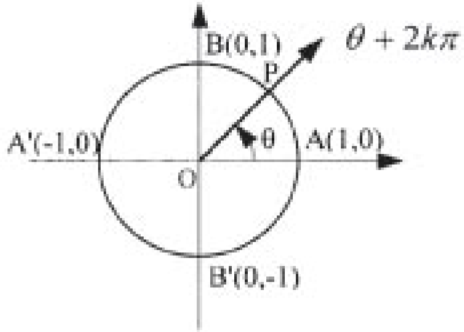
ÇÖZÜM ⇨ $k \in Z$ olmak üzere, B(0,1) noktasına eşlenen sayılar, $\frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi$ biçimindedir. Bu sayılar şunlardır:

$$\ldots,\frac{\pi}{2} - 4\pi,\ \frac{\pi}{2} - 2\pi,\ \frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2} + 2\pi,\ \frac{\pi}{2} + 4\pi,\ldots$$

Birim çemberin $B'(0,-1)$ noktasına eşlenen sayıları bulalım:

$k \in Z$ olmak üzere, $B'(0,-1)$ noktasına eşlenen sayılar, $\frac{3\pi}{2} + k\cdot 2\pi$ biçimindedir. Bu sayılar şunlardır:

$$\ldots,\ \frac{3\pi}{2} - 4\pi,\ \frac{3\pi}{2} - 2\pi,\ \frac{3\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi,\ \frac{3\pi}{2} + 4\pi,\ \ldots$$



$\theta \in R,\ k \in Z$ olmak üzere, birim çemberin P noktasına eşlenen $\theta + k \cdot 2\pi$ sayılarının her birine, AOP yönlü açısının **radyan cinsinden ölçüleri** denir.

AOP yönlü açısının $[0,\ 2\pi)$ aralığındaki ölçüsü θ ise, θ ya AOP açısının **radyan cinsinden esas ölçüsü** denir.

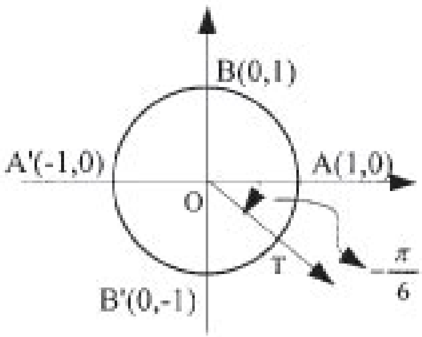
$0 \le \theta < 2\pi$ ve $k \in Z$ olmak üzere AOP yönlü açısının radyan cinsinden ölçüleri, $\theta + k \cdot 2\pi$ ise; AOP açısının esas ölçüsü θ radyandır.

ÖRNEK 13 ➾ Bir çemberin T noktasına eşlenen sayılardan biri $-\dfrac{\pi}{6}$ olduğuna göre, AOT yönlü açısının esas ölçüsünü bulunuz.

ÇÖZÜM ➾ Yukarıda sorulan soruyu iki farklı yolla çözebiliriz:

I. Yol:

$-\dfrac{\pi}{6} \in R, k \in Z$ olmak üzere, AOT açısının radyan cinsinden ölçüleri, $-\dfrac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$ dir.



Buna göre, T noktasına eşlenen tüm sayıların genel ifadesi $k \in Z$ olmak üzere $-\dfrac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$ olur.

Yukarıda verilen ifadede, k yerine …, -2, -1, 0, 1, 2,… sayılarını yazarak T noktasına eşlenen sayıları buluruz:

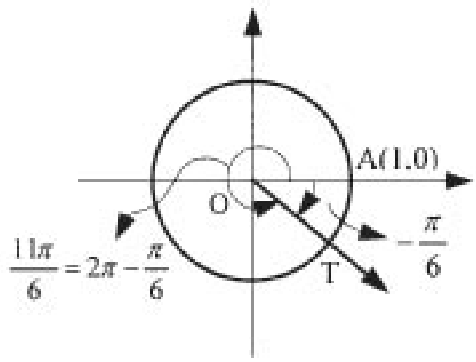
$$\underbrace{\frac{-\pi}{6} + (-2)\cdot 2\pi}_{\downarrow},\ \underbrace{\frac{-\pi}{6} + (-1)\cdot 2\pi}_{\downarrow},\ \underbrace{\frac{-\pi}{6} + 0\cdot 2\pi}_{\downarrow},\ \underbrace{\frac{-\pi}{6} + 1\cdot 2\pi}_{\downarrow},\ \underbrace{\frac{-\pi}{6} + 2\cdot 2\pi}_{\downarrow}$$

$$\underbrace{\frac{-\pi}{6} - 4\pi}_{\downarrow} \qquad \underbrace{\frac{-\pi}{6} - 2\pi}_{\downarrow} \qquad \underbrace{\frac{-\pi}{6}}_{\downarrow} \qquad \underbrace{\frac{-\pi}{6} + 2\pi}_{\downarrow} \qquad \underbrace{\frac{-\pi}{6} + 4\pi}_{\downarrow}$$

$$\frac{-25\pi}{6} \qquad \frac{-13\pi}{6} \qquad \frac{-\pi}{6} \qquad \frac{11\pi}{6} \qquad \frac{23\pi}{6}$$

Yukarıda bulduğumuz sayıları incelediğimizde T noktasına eşlenen $\frac{11\pi}{6}$ sayısı, 0 ile 2π arasında olduğundan, AOT yönlü açısının esas ölçüsü $\frac{11\pi}{6}$ radyandır.

II. Yol:



Ölçülerinden biri $\frac{-\pi}{6}$ radyan olan AOT yönlü açısının esas ölçüsünü $\frac{\pi}{6}$ radyanı kullanarak hesaplayalım.

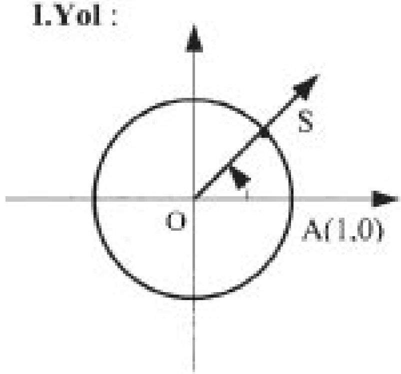
$0 \le \frac{\pi}{6} < 2\pi$ olduğu için AOT yönlü açısının esas ölçüsü,

$$2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6} \text{ dır.}$$

ÖRNEK 14 ⇨ Ölçülerinden biri, $\frac{97\pi}{6}$ radyan olan AOS yönlü açısının esas ölçüsünü bulunuz ve birim çemberde gösteriniz.

ÇÖZÜM ⇨ Yukarıda sorulan soruyu iki farklı yolla çözeceğiz.

I.Yol :



$0 \le \theta < 2\pi$ ve $k \in Z$ olmak üzere $\frac{97\pi}{6}$ sayısını, $\theta + k \cdot 2\pi$ biçiminde yazdığımızda, AOS yönlü açısının esas ölçüsü θ radyandır. k sayısı **devir sayısıdır**.

$$\frac{97\pi}{6} = \frac{96\pi + \pi}{6} = \frac{96\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{8 \cdot 12\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = 8 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{6} \text{ dır.}$$

Devir sayısı : $k = 8$

$\widehat{AOS}$ nın esas ölçüsü: $\theta = \frac{\pi}{6}$ radyandır.

II. Yol:

Pozitif yönlü radyan cinsinden bir açının esas ölçüsü verilen ölçünün 2π ye bölümünden kalan değerdir.

$k \in Z$, $\qquad k \cdot 2\pi + \theta = \alpha \ (\text{mod } 2\pi)$

Ölçüsü"$k \cdot 2\pi + \theta$" olan açının esas ölçüsü θ dır.

$0 \le \theta < 2\pi$ dir.

"k" ise devir sayısıdır.

$$\frac{\frac{97\pi}{6}}{2\pi} = \frac{97\pi}{6 \cdot 2\pi} = \frac{97}{12}$$

97 yi 12 ye böldüğümüzde elde edeceğimiz bölüm, devir sayısını verecektir.

$$\begin{array}{r|l} 97 & 12 \\ \cline{2-2} -\ 96 & \ 8 \\ \cline{1-1} 1 & \leftarrow \text{kalan} \end{array}$$

O halde,

$\alpha = k \cdot 2\pi + \theta$ da değerleri yerine koyduğumuzda

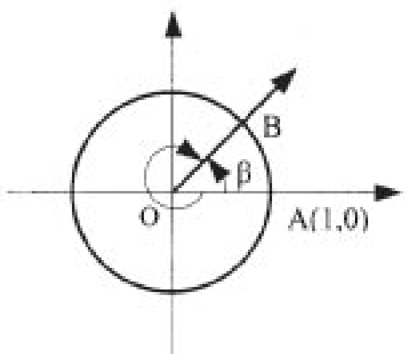
$$\frac{97\pi}{6} = 8 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{6} \text{ buluruz.}$$

Sonuç olarak, devir sayısı 8 ve AOS yönlü açısının esas ölçüsü $\frac{\pi}{6}$ dır.

ÖRNEK 15 ⇨ Ölçülerinden biri $\frac{-77\pi}{3}$ radyan olan AOB yönlü açısının esas ölçüsünü bulunuz ve birim çemberde gösteriniz.

ÇÖZÜM ⇨ Yukarıda sorulan soruyu üç farklı yolla çözeceğiz:

I.Yol:



$0 \le \beta < 2\pi$, $\quad k \in Z$ olmak üzere, $\frac{-77\pi}{3}$ sayısını, $\beta + k \cdot 2\pi$ biçiminde yazdığımızda,

AOB yönlü açısının esas ölçüsü β radyandır.

$$\frac{-77\pi}{3}=\frac{-4\cdot 18\cdot \pi-5\pi}{3}=\frac{-72\pi}{3}-\frac{5\pi}{3}=-12\cdot 2\pi-\frac{5\pi}{3}$$

olduğundan,

$$\frac{-5\pi}{3}+2\pi=\frac{\pi}{3} \text{ bulunur.}$$

O halde,

$\widehat{AOB}$ nın esas ölçüsü $\frac{\pi}{3}$ radyandır.

II. Yol:

$\frac{-77\pi}{3}$ radyanlık açının esas ölçüsünü bulmak için $\frac{77\pi}{3}$ radyanı kullanalım:

$$\begin{aligned}\frac{77\pi}{3}&=\frac{4\cdot 18\cdot \pi+5\pi}{3}=\frac{4\cdot 18\pi}{3}+\frac{5\pi}{3}=\frac{4\cdot 9\cdot 2\pi}{3}+\frac{5\pi}{3}\\&=\frac{36\cdot 2\pi}{3}+\frac{5\pi}{3}\\&=12\cdot 2\pi+\frac{5\pi}{3} \text{ tür.}\end{aligned}$$

$\frac{77\pi}{3}$ radyanlık yönlü açının esas ölçüsü $\frac{5\pi}{3}$ olduğu için ölçüsü $\frac{-77\pi}{3}$ radyan olan AOB yönlü açısının esas ölçüsü,

$$2\pi-\frac{5\pi}{3}=\frac{\pi}{3} \text{ radyandır.}$$

III. Yol:

Esas ölçüsünü bulacağımız yönlü açının ölçüsü $\frac{-77\pi}{3}$ olduğuna göre, bu değeri pozitif olarak düşünelim ve işlemlerimize devam edelim:

$$\frac{\frac{77\pi}{3}}{2\pi}=\frac{77\pi}{3\cdot 2\pi}=\frac{77}{6}$$

$$
\begin{array}{r|l}
77 & 6 \\
\underline{-\ 6} & 12 \\
17 & \\
\underline{-\ 12} & \\
5 & \leftarrow \text{kalan}
\end{array}
$$

$$\frac{77\pi}{3} = \frac{12 \cdot 6\pi}{3} + \frac{5\pi}{3}$$
$$= 12 \cdot 2\pi + \frac{5\pi}{3} \text{ tür.}$$

O halde, $\frac{77\pi}{3}$ radyanlık açının esas ölçüsü $\frac{5\pi}{3}$ tür.

Sonuç olarak, $\frac{-77\pi}{3}$ radyanlık açının esas ölçüsünü bulmak için aşağıdaki işlemi yaparız.

$$2\pi - \frac{5\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$

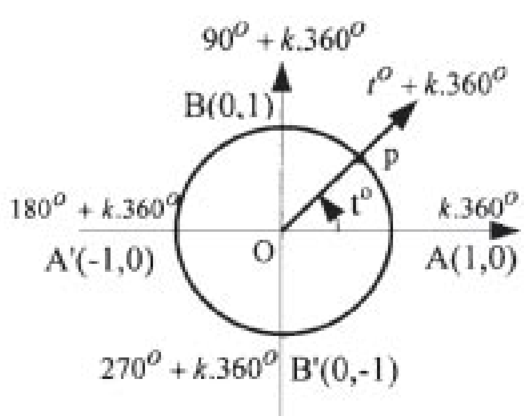
O halde, AOB açısının esas ölçüsü $\frac{\pi}{3}$ radyandır.

ALIŞTIRMA 6 ⇨ Aşağıdaki alıştırmaları yapınız:

(A) Ölçülerinden biri $\frac{17\pi}{6}$ radyan olan yönlü açının esas ölçüsünü bulunuz.

(B) Ölçülerinden biri $\frac{-56\pi}{5}$ radyan olan yönlü açının esas ölçüsünü bulunuz.

Yönlü Açıların Derece Cinsinden Ölçüleri



Standart konumdaki AOP yönlü açısının $[OP$ bitim kenarının, birim çemberi kestiği P noktasına, t° eşlenmiş ise; $k \in Z$ olmak üzere, $t° + k \cdot 360°$ de P noktasına eşlenir. Buna göre, AOP yönlü açısının derece cinsinden ölçüleri $t° + k \cdot 360°$ dir.

$\frac{\pi}{2}$ radyan = 90°, π radyan = 180°,

$\frac{3\pi}{2}$ radyan = 270°, 2π radyan = 360° dir.

$k \in Z$ olmak üzere, birim çemberin;

A(1,0) noktasına $0° + k \cdot 360° = k \cdot 360°$,

B(0,1) noktasına $90° + k \cdot 360°$,

A' (-1,0) noktasına $180° + k \cdot 360°$,

$B'(0,-1)$ noktasına $270° + k \cdot 360°$ eşlenir.

AOP yönlü açısının $[0°, 360°)$ aralığındaki ölçüsüne, AOP açısının **derece cinsinden esas ölçüsü** denir.

Yönlü Açının Derece Cinsinden Esas Ölçüsü

$k \in Z$ olmak üzere, P noktasına eşlenen $t° + k \cdot 360°$ ifadesinde, $0^{o} \leq t° < 360°$ ise, AOP yönlü açısının derece cinsinden **esas ölçüsü** t° dir.

ÖRNEK 16 ⇨ Ölçülerinden biri -150° olan AOL yönlü açısının esas ölçüsünü bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ Ölçülerinden biri -150° olan AOL yönlü açısının derece cinsinden ölçüleri, $k \in Z$ olmak üzere,

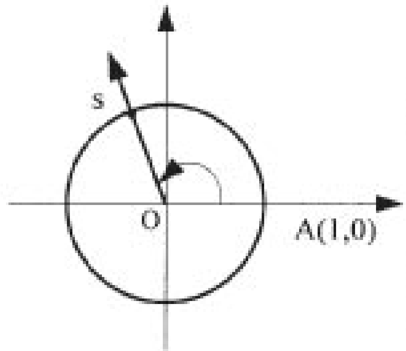
$-150° + k \cdot 360°$ dir.

$k = 1$ için, $-150° + 1 \cdot 360° = 210°$ ve $0° \leq 210° < 360°$ olduğundan, AOL yönlü açısının esas ölçüsü 210° dir.

ÖRNEK 17⇨ Ölçülerinden biri 1590° olan AOS yönlü açısının esas ölçüsünü bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ Yukarıda sorulan soruyu iki farklı yolla çözeceğiz:

I.Yol:



1590 derecelik AOS yönlü açısının esas ölçüsünü, $k \cdot 360° + \theta$ da k yerine değerler koyarak bulacağız.

$1590° = k \cdot 360° + \theta$
$1590° = 4 \cdot 360° + 150°$
Devir sayısı: $k = 4$
Esas ölçüsü: 150° $\leftarrow (0° \leq 150° < 360°)$

II. Yol:

Derece cinsinden bir açının ölçüsünün 360° ye bölümünden kalan, derece cinsinden esas ölçü adını alır.

1590° lik yönlü açının esas ölçüsünü yukarıda yazılı olan yönteme göre bulacağız.

$$\begin{array}{r|l} 1590° & 360° \\ \hline -\underline{1440°} & 4 \\ 150° & \leftarrow \text{Kalan} \end{array}$$

$1590° = 4 \cdot 360° + 150°$
Devir sayısı: $k = 4$
Esas ölçüsü: 150° $(0° \leq 150° < 360°)$

ALIŞTIRMA 7 ⇒ Aşağıdaki alıştırmaları yapınız:

(A) Ölçülerinden biri -600° olan yönlü açının esas ölçüsünü bulunuz.

(B) Ölçülerinden biri 4560° olan yönlü açının esas ölçüsünü bulunuz.

ÖRNEK 18 ⇒ Ölçülerinden biri –2500° olan AOC yönlü açısının esas ölçüsünü bulunuz.

ÇÖZÜM ⇒ -360° den büyük negatif yönlü açıların esas ölçülerini bulmak için, açıyı pozitif yönlü gibi düşünüp, 360° ye bölümünden kalanın 360° den çıkarılmasıyla da bulunabilir.

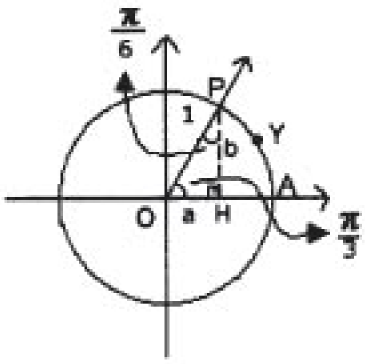
$$\begin{array}{r|l} 2500° & 360° \\ \hline -\underline{2160°} & 6 \\ 340° & \end{array}$$

$2500° = 6 \cdot 360° + 340°$
$360° - 340° = 20°$

O halde, AOC yönlü açısının ölçüsü 20° dir.

ÖRNEK 19 ⇒ Birim çemberde, başlangıç noktaları A(1,0) ve uzunlukları $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ ve $\frac{5\pi}{3}$ olan pozitif yönlü yayların bitim noktalarının koordinatlarını bulunuz. birim ise,

ÇÖZÜM ⇒



Birim çemberde, $|\widehat{AYP}|$

$m(\widehat{AOP}) = \frac{\pi}{3}$ radyan $= 60°$, $m(\hat{P}) = 30°$

$= \frac{\pi}{3}$ birim ise,

olduğundan, 30° lik açının karşısındaki dik kenarın uzunluğu,

$a = |OH| = \frac{|OP|}{2} = \frac{1}{2}$ birimdir.

PHO dik üçgeninde, $|OH| = \frac{1}{2}$ birim, $|PH| = b$ birim ise Pisagor teoremine göre,

$$|PH|^2 + |OH|^2 = |OP|^2 \Rightarrow b^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1^2$$

$$\Rightarrow b^2 = \frac{1}{\underset{(4)}{1}} - \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow b^2 = \frac{3}{4}$$

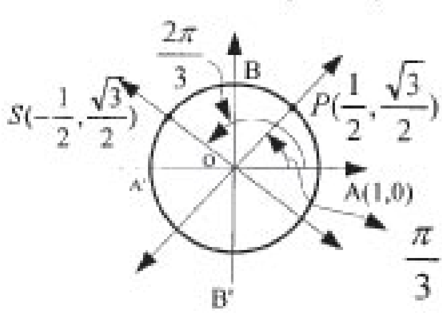
$$\Rightarrow b = \oplus\sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$\Rightarrow b = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ olur.}$$

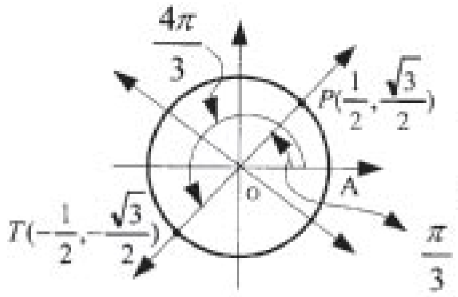
←(b>0 seçtik çünkü b uzunluk birimidir. $b = -\sqrt{\frac{3}{4}}$ olamaz çünkü uzunluk negatif olamaz.)

Buna göre, $P(a,b) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ dir.

$|\widehat{APS}| = \frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$ birim ise,

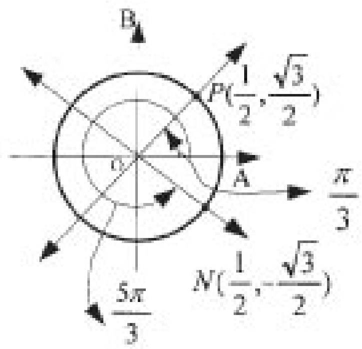


S noktası $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ noktasının y eksenine göre simetriğidir. Buna göre, $S\left(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ dir.



$\left|\widehat{APT}\right| = \frac{4\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3}$ birim ise, T noktası, P noktasının O(0,0) noktasına göre simetriğidir. $T\left(\frac{-1}{2},\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$ dir.

$\left|\widehat{APN}\right| = \frac{5\pi}{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3}$ birim ise, N noktası P noktasının x eksenine göre simetriğidir. $N\left(\frac{1}{2},\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$ dir.



ALIŞTIRMA 8 ➾ Birim çemberde, başlangıç noktaları A(1,0) ve uzunlukları $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$ ve $\frac{11\pi}{6}$ olan pozitif yönlü yayların bitim noktalarının koordinatlarını bulunuz.

ARAŞTIRMALAR

Derece D ile; radyan R ile; grad G ile gösterilirse aşağıdaki bağıntıyı (orantı) elde ediniz:

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} = \frac{G}{200} \text{ dür.}$$

BÖLÜMÜN ÖZETİ

Analitik düzlemde merkezi, koordinat eksenlerinin kesiştikleri nokta (başlangıç noktası), yarıçapı 1 birim olan çembere **birim çember** denir. Bu çember aynı zamanda trigonometrik çember olarak da isimlendirilir.

Bir çemberin yarıçapının uzunluğuna eşit uzunluktaki yayı gören merkez açının ölçüsüne **1 radyan** denir.

Bir çemberin çevre uzunluğunun $\frac{1}{360}$ ını gören merkez açının ölçüsüne **1 derece** ($1°$) denir. ° sembolü dereceyi gösterir.

Bir çemberin çevresinin uzunluğunun 400 de birini $\left(\frac{1}{400}\ ini\right)$ gösteren merkez açının ölçüsüne, 1 grad denir ve 1^G ile gösterilir.

Derece D ile; radyan R ile; grad G ile gösterilirse aşağıdaki bağıntı (orantı) elde edilir.

$$\frac{D}{360}=\frac{R}{2\pi}=\frac{G}{400} \quad \textbf{\textit{veya}} \quad \frac{D}{180}=\frac{R}{\pi}=\frac{G}{200} \text{ dür.}$$

Merkez açının derece cinsinden ölçüsü α ise, merkez açının gördüğü yayın uzunluğu, $\ell=\frac{2\pi r}{360}\cdot\alpha$ birimdir.

Merkez açının radyan cinsinden ölçüsü θ ise, merkez açının gördüğü yayın uzunluğu, $\ell=r\cdot\theta$ birimdir.

DEĞERLENDİRME SORULARI

1) 15246 saniyelik açı kaç derece , kaç dakika ve kaç saniyedir ?

A) $4°\ 2'\ 6''$ B) $4°\ 6'\ 2''$ C) $4°\ 6'\ 10''$

D) $4°\ 10'\ 6''$ E) $4°\ 14'\ 6''$

2) 1240° nin esas ölçüsü kaç derecedir ?

A) 60° B) 120° C) 160° D) 220° E) 260°

3) - 945° nin esas ölçüsü kaç derecedir ?

A) 30° B) 45° C) 135° D) –325° E) 325°

4) $\frac{57\pi}{5}$ radyanlık açının esas ölçüsü nedir ?

A) $\frac{5\pi}{3}$ B) $\frac{7\pi}{5}$ C) $\frac{3\pi}{5}$ D) $\frac{5\pi}{7}$ E) $\frac{\pi}{2}$

5) $m(\hat{A})=27°\ 42'\ 50''$, $m(\hat{B})=17°\ 56'\ 28''$ olduğuna göre A ve B açılarının ölçülerinin toplamı nedir ?

A) $34°39'\ 38''$ B) $34°\ 98'\ 18''$ C) $44°97'\ 38''$

D) $45°\ 39'\ 18''$ E) $45°\ 40'\ 18''$

BÖLÜM 1-2

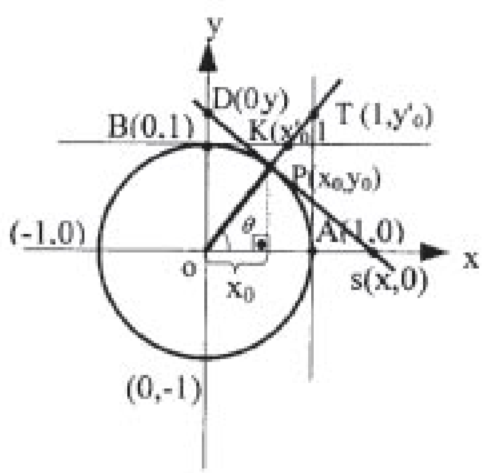
TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR VE GRAFİKLERİ

- ***TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN TANIMLARI***
- ***DİK ÜÇGEN TRİGONOMETRİSİ***
- ***TRİGONOMETRİK DEĞERLER TABLOSU***
- ***PERİYODİK FONKSİYONLAR ve TRİGONOMETRİ***
- ***TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN GRAFİKLERİ***
- ***TERS TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR ve GRAFİKLERİ***
- ***SİNÜS, KOSİNÜS VE TANJANT TEOREMLERİ***
- ***ÜÇGENİN ALANININ HESAPLANMASI***

GİRİŞ

Trigonometrik fonksiyonlar, periyodik olayları, yani devirli olarak tekrarlayan olayları, anlatabilmek için faydalıdır. İki yıl süresince güneşin doğuş zamanını düşünelim. Güneşin doğuş zamanı 1 yıl sonra aynı şekilde tekrarlamaya başlar. Aynı şekilde, aylık ortalama sıcaklık genelde devirli bir olaydır. Ortalama hava sıcaklığı Ocak ayı ile Aralık ayı arasında büyük bir şekilde değişebilir. Fakat, bir yıldan diğer bir yıla devirli bir eğilim göstermektedir.

◆ *TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN TANIMLARI*



Analitik düzlemde, merkezi başlangıç noktasında ve yarıçapı 1 birim uzunlukta olan bir birim çember çizelim. Herhangi bir açının bitim kenarı bu çember üzerindeki bir P noktasından geçecektir. $P(x_0, y_0)$, $\theta \in R$ sayısına karşılık gelen birim çember üzerindeki bir noktadır. OP ışınının $x = 1$ doğrusunu veya çembere A noktasından çizilen teğeti kestiği nokta T olsun. OP ışınının $y = 1$ doğrusunu veya çembere B noktasından çizilen teğeti kestiği nokta K olsun. P noktasından çizilen teğetin x eksenini kestiği nokta S ve y eksenini kestiği nokta D olsun. Bu durumda,

P noktasının apsisine θ reel sayısının kosinüsü denir ve

$$x_0 = \cos\theta = \cos\widehat{AP} = \cos\widehat{AOP} \quad \text{biçiminde gösterilir}$$

P noktasının ordinatına θ reel sayısının sinüsü denir ve

$$y_0 = \sin\theta = \sin\widehat{AP} = \sin\widehat{AOP} \quad \text{biçiminde gösterilir.}$$

T noktasının ordinatına θ reel sayısının tanjantı denir ve

$$y'_0 = \tan\theta = \tan\widehat{AP} = \tan\widehat{AOP}$$ biçiminde gösterilir.

K noktasının apsisine θ reel sayısının kotanjantı denir ve

$$x'_0 = \cot\theta = \cot\widehat{AP} = \cot\widehat{AOP}$$ biçiminde gösterilir.

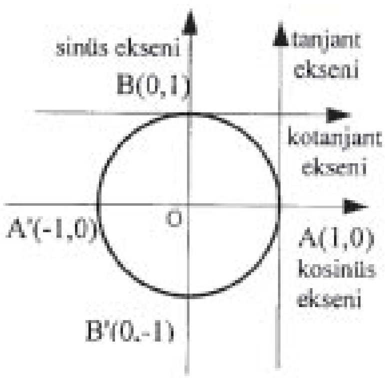
S noktasının apsisine θ reel sayısının sekantı denir ve

$$x = \sec\theta = \sec\widehat{AP} = \sec\widehat{AOP}$$ biçiminde gösterilir.

D noktasının ordinatına θ reel sayısının kosekantı denir ve

$$y = \csc\theta = \csc\widehat{AP} = \csc\widehat{AOP}$$ biçiminde gösterilir.

Yukarıdaki açıklamalardan ve şekil 1.1 den anlaşılacağı üzere



Şekil 1.2

Ox ekseni (apsisler ekseni) kosinüs ekseni, Oy ekseni (ordinatlar ekseni) sinüs ekseni, A noktasından çizilen teğet tanjant ekseni, ve B noktasından çizilen teğet kotanjant eksenidir.

Eksenler özet olarak şekil 1.2 de gösterilmektedir. Birim çember üzerindeki A, B, A' ve B' noktalarına derece olarak sıra ile 0°, 90°, 180° ve 270° reel sayıları karşılık geldiğine göre; bu açıların sin, cos, tan, cot, sec ve csc değerleri aşağıdaki tabloda verilmektedir.

Tablo 1

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$\sec\theta$	$\csc\theta$
0°	0	1	0	Tanımsız	1	Tanımsız
$90°\left(\frac{\pi}{2}\right)$	1	0	Tanımsız	0	Tanımsız	1
$180°(\pi)$	0	-1	0	Tanımsız	-1	Tanımsız
$270°\left(\frac{3\pi}{2}\right)$	-1	0	Tanımsız	0	Tanımsız	-1
$360°(2\pi)$	0	1	0	Tanımsız	1	Tanımsız

Bu tablodaki değerler nasıl bulundu? Örneğin, 90° nin bitim kenarı çember üzerindeki $B(0,1)$ noktasından geçer. Öyleyse, sin90°=1, cos90°=0, cot90°=0, csc90°=1 ve tan90° ve sec90° tanımsız olur.

tan90° niçin tanımsızdır? Açımız 90° olduğu için bu açının bitim kenarı OB ışınıdır. A noktasından çizilen tanjant ekseni ile OB ışınının kesim noktası yoktur. Öyle ise, tan90° tanımsızdır.

Şimdi de siz sec90° nin niçin tanımsız olduğunu açıklayınız.

cot90° neden 0 dır? Daha önce açıkladığımız gibi 90° nin bitim kenarı OB ışınıdır. OB ışınının $y=1$ doğrusunu veya çembere B noktasından çizilen teğeti kestiği nokta $B(0,\ 1)$ dir. Kotanjant bu kesim noktasının apsisi olduğuna göre cot90°=0 dır.

Şimdi de siz neden csc90° nin 0 a eşit olduğunu açıklayınız.

Sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının tanımlarına göre birim çember üzerindeki bir nokta $P(\cos\theta, \sin\theta)$ dır. Öyle ise θ açısı ne olursa olsun bu noktanın gerek apsisi ve gerekse ordinatı –1 ile +1 arasında değişmektedir. O zaman

$$-1 \le \cos\theta \le 1 \ \text{ ve } \ -1 \le \sin\theta \le 1$$

olur. Bunu kısaca

$$\cos : R \to [-1,1], \quad x \to \cos x$$
$$\sin : R \to [-1,1], \quad x \to \sin x$$

olarak gösterebiliriz.

Ayrıca birim çember üzerindeki $P(\cos\theta, \sin\theta)$ noktası $x^2 + y^2 = 1$ denklemini sağlar. Bu nedenle $(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1$ ya da daha çok kullanılan gösterimle

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

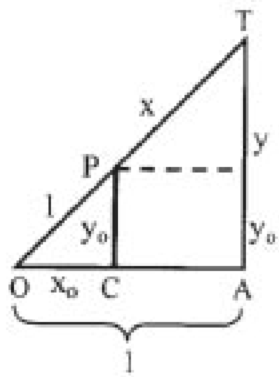
olur.

Hatırlarsanız bir açının tan, cot, sec ve csc değerlerini tanjant ekseni ile bulabileceğimizi açıklamıştık. Fakat, bu açıları kısaca sinüs ve kosinüs oranları cinsinden şöyle yazabiliriz.

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}, \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}, \qquad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

Örneğin, neden $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ dır? Bunun için şekil 1.1 deki gibi A noktasından çizilen teğetin OP ışını ile kesim noktasının ordinatını bulmamız gerekli. Diğer bir deyişle ordinatın $\tan\theta = \frac{y_0}{x_0}$ olduğunu göstermemiz gerekli. Şekil 1.1 den elde ettiğimiz aşağıdaki şekli dikkatlice incelersek T noktasının ordinatını şu şekilde bulabiliriz. Buradan gördüğümüz üzere



$$\widehat{POC} \sim \widehat{TOA}$$

(Açı Açı (AA) Benzerlik Kuralı)

$$\frac{|PO|}{|TO|} = \frac{|PC|}{|TA|} = \frac{|OC|}{|OA|}$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{y_0}{y_0+y} = \frac{x_0}{1}$$

$$\frac{y_0}{y_0+y} = \frac{x_0}{1} \Rightarrow y_0 = x_0 y_0 + x_0 y \Rightarrow \frac{y_0 - x_0 y_0}{x_0} = y \text{ olur.}$$

T noktasının ordinatı $y_0' = y_0 + y$ olduğundan bulduğumuz y değerini bu denklemde yerine koyalım.

$$y_0' = y_0 + \frac{y_0 - x_0 y_0}{x_0} \qquad \leftarrow \text{(Paydayı } x_0 \text{ ile eşitleyelim)}$$

$$= \frac{x_0 y_0 + y_0 - x_0 y_0}{x_0} = \frac{y_0}{x_0}$$

Bu da bize göstermektedir ki $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ dır.

Şimdi de siz diğerlerini göstermeye çalışın.

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ ve $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$ fonksiyonlarının tanımlı olabilmesi için

$\cos\theta \neq 0$ ve

$\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ ve $\csc\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$ fonksiyonlarının tanımlı olabilmesi için $\sin\theta \neq 0$ olması gereklidir.

Buna göre $x \in \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z\right\}$ için $\cos\theta = 0$ olduğundan $\tan\theta$;
$x \in \{k\pi,\ k \in Z\}$ için $\sin\theta = 0$ olduğundan $\cot\theta$ tanımsızdır.

Bu nedenle tanjant, sekant ve kotanjant ve kosekant fonksiyonları şu aşağıda verilen aralıklarda tanımlı olur.

$$\tan : R - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z\right\} \to R, \qquad \theta \to \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\sec : R - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z\right\} \to R, \qquad \theta \to \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\cot : R - \{k\pi,\ k \in Z\} \to R, \qquad \theta \to \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\csc : R - \{k\pi,\ k \in Z\} \to R, \qquad \theta \to \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} \text{ dır.}$$

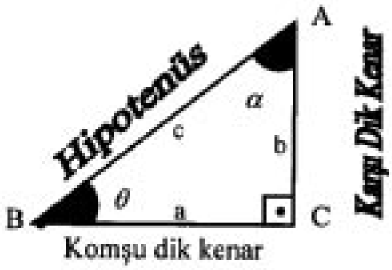
$\theta \in R$ sayısının trigonometrik fonksiyonlarının işaretleri, koordinat düzleminin 4 farklı bölgesine göre şu şekilde değişir:

	I. bölge	II. bölge	III. bölge	IV. bölge
cos	+	-	-	+
sin	+	+	-	-
tan	+	-	+	-
cot	+	-	+	-

◆ *DİK ÜÇGEN TRİGONOMETRİSİ*

Temel geometrik şekillerden biri olan dik üçgen astronomi, inşaat ve yol planlaması gibi bir sürü günlük uygulamalarda ortaya çıkmaktadır. Trigonometrik fonksiyonlar üçgenleri çözmek için kullanılır. Bir üçgenin çözülmesi üçgenin her kenarının ve açısının ölçülmesini içermektedir.

Varsayalım ki θ bir dik üçgende bir dar açı olsun.



ABC dik üçgeninde θ açısının karşı dik kenarı b, komşu dik kenarı a ve hipotenüs c dir. Öyle ise, yandaki şekilde görüldüğü üzere θ açısının trigonometrik fonksiyonları aşağıdaki gibi bulunabilir.

$$\sin\theta = \frac{\text{Karşı dik kenar uzunluğu}}{\text{Hipotenüs uzunluğu}} = \frac{b}{c}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{Komşu dik kenar uzunluğu}}{\text{Hipotenüs uzunluğu}} = \frac{a}{c}$$

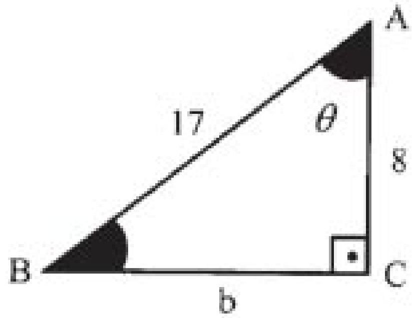
$$\tan\theta = \frac{\text{Karşı dik kenar uzunluğu}}{\text{Komşu dik kenar uzunluğu}} = \frac{b}{a}$$

$$\cot\theta = \frac{\text{Komşu dik kenar uzunluğu}}{\text{Karşı dik kenar uzunluğu}} = \frac{a}{b}$$

$$\sec\theta = \frac{\text{Hipotenüs uzunluğu}}{\text{Komşu dik kenar uzunluğu}} = \frac{c}{a}$$

$$\csc\theta = \frac{\text{Hipotenüs uzunluğu}}{\text{Karşı dik kenar uzunluğu}} = \frac{c}{b}$$

ÖRNEK 1 ⇒ Aşağıdaki şekilde verilen dik üçgende θ açısının trigonometrik oranlarını bulunuz.



ÇÖZÜM ⇒ ABC dik üçgeninde θ açısının karşı dik kenarı b, komşu dik kenarı a=8 ve hipotenüs c=17 dir. Karşı dik kenarı b yi bulmak için Pisagor teoremini uyguluyoruz.

$$
\begin{aligned}
c^2 &= a^2 + b^2 && \leftarrow\text{(Pisagor Teoremi)}\\
b^2 &= c^2 - a^2 &&\\
b^2 &= 17^2 - 8^2 && \leftarrow\text{(c=17 ve a=8)}\\
b^2 &= 225 && \leftarrow\text{(Sadeleştir)}\\
b &= 15 && \leftarrow(x^2 = a \Rightarrow x = \sqrt{a}\,)
\end{aligned}
$$

Sonuç olarak, θ nın trigonometrik oranları şöyledir:

$$\sin\theta = \frac{\text{Karşı dik kenar uzunluğu}}{\text{Hipotenüs uzunluğu}} = \frac{15}{17}$$

$$\csc\theta = \frac{\text{Hipotenüs uzunluğu}}{\text{Karşı dik kenar uzunluğu}} = \frac{17}{15}$$

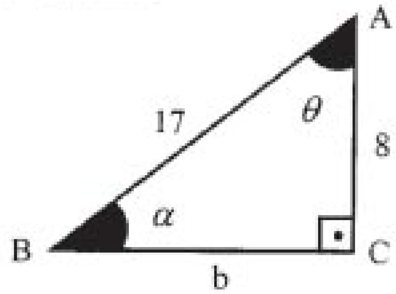
$$\cos\theta = \frac{\text{Komşu dik kenar uzunluğu}}{\text{Hipotenüs uzunluğu}} = \frac{8}{17}$$

$$\sec\theta = \frac{\text{Hipotenüs uzunluğu}}{\text{Komşu dik kenar uzunluğu}} = \frac{17}{8}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{Karşı dik kenar uzunluğu}}{\text{Komşu dik kenar uzunluğu}} = \frac{15}{8}$$

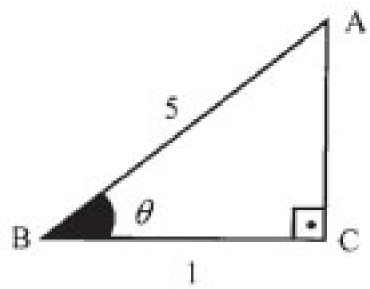
$$\cot\theta = \frac{\text{Komşu dik kenar uzunluğu}}{\text{Karşı dik kenar uzunluğu}} = \frac{8}{15}$$

ALIŞTIRMA 1 ➾ Aşağıdaki şekilde verilen dik üçgende α açısının trigonometrik oranlarını bulunuz.



ÖRNEK 2 ➾ $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ ve $\cos\theta = -\frac{1}{5}$ ise, $\sin\theta$, $\tan\theta$, $\cot\theta$, $\sec\theta$ ve $\csc\theta$ değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM ➾ $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ olduğundan, açımız ikinci bölgededir. Bu bölgede sinüs ve kosekant pozitif ve kosinüs, tanjant, kotanjant ve sekant negatiftir. $\cos\theta = -\frac{1}{5}$ ise θ açısının komşu dik kenarı 1 ve hipotenüsü 5 tir. Şimdi θ açısının karşı dik kenarını bulalım.



$$|AC|^2 = 5^2 - 1^2 \qquad \leftarrow \text{(Pisagor Teoremi)}$$

$$|AC|^2 = 24 \Rightarrow |AC| = 2\sqrt{6}$$

θ açısının trigonometrik oranları şunlardır:

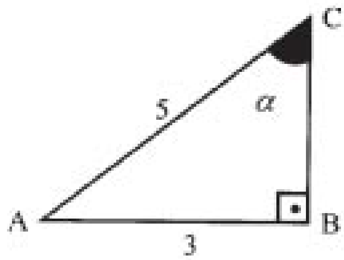
$$\sin\theta = \frac{2\sqrt{6}}{5}, \qquad \tan\theta = -2\sqrt{6}, \qquad \cot\theta = \frac{-1}{2\sqrt{6}} = \frac{-\sqrt{6}}{12}$$

$$\sec\theta = \frac{-5}{1} \qquad \csc\theta = \frac{5}{2\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{12}$$

ALIŞTIRMA 2 ⇨ $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ ve $\sin\theta = \frac{1}{5}$ ise, $\cos\theta$, $\tan\theta$, $\cot\theta$, $\csc\theta$ ve $\sec\theta$ değerlerini bulunuz ve çember üzerinde gösteriniz.

ÖRNEK 3 ⇨ $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ ve $\sin\alpha = \frac{-3}{5}$ ise $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$, $\sec\alpha$ ve $\csc\alpha$ oranlarını bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ ise α açısı III. bölgededir. Bu bölgede tanjant, kotanjant pozitif, kosinüs, sekant ve kosekant oranları ise negatiftir. $\sin\alpha = \frac{-3}{5}$ ise dik üçgende α açısının karşı dik kenarı 3 ve hipotenüsü 5 tir.



$$|BC|^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow |BC| = 4$$

α açısının trigonometrik oranları şunlardır:

$$\cos\alpha = \frac{-4}{5}, \qquad \sec\alpha = \frac{-5}{4}, \qquad \tan\alpha = \frac{3}{4},$$
$$\csc\alpha = \frac{-5}{3}, \qquad \cot\alpha = \frac{4}{3}$$

ALIŞTIRMA 3 ⇨ $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ ve $\tan\alpha = \frac{-1}{\sqrt{3}}$ ise diğer trigonometrik oranları bulunuz.

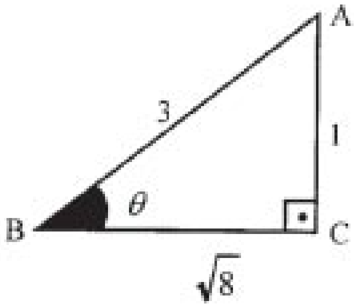
ÖRNEK 4 ⇨ θ dar bir açı olarak veriliyor. Verilen bilgileri kullanarak istenen trigonometrik değerleri bulunuz.

(A) $\sin\theta = \frac{1}{3}$ ise $\sec\theta = ?$ (B) $\csc\theta = \frac{5}{4}$ ise $\cos\theta = ?$

ÇÖZÜM ⇨ (A) θ dar bir açı ve $\sin\theta = \frac{1}{3}$ ise dik üçgenden yararlanarak $\sec\theta$ yı bulabiliriz. Dar açılardan birinin sinüsü $\frac{1}{3}$ olan dik üçgeni çizelim. Bu üçgende;

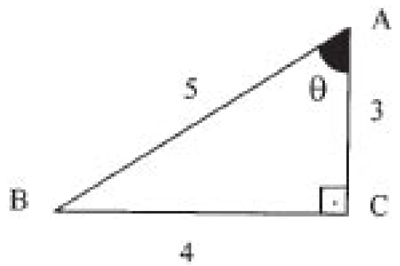
$|BC|^2 = 3^2 - 1^2 = 9 - 1 \quad = \sqrt{8}$

bulunur. O halde,



$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\frac{\sqrt{8}}{3}} = \frac{3}{\sqrt{8}} = \frac{\text{Hipotenüs uzunluğu}}{\text{Komşu dik kenar uzunluğu}} \quad \text{olur}$$

(B) θ dar bir açı ve $\csc\theta = \frac{5}{4}$ ise dik üçgenden yararlanarak $\cos\theta$ yı bulabiliriz. Dar açılardan birinin kosekantı $\frac{5}{4}$ olan dik üçgeni çizelim. Bu üçgende;



$$|AC|^2 = 5^2 - 4^2$$
$$= 25 - 16$$
$$= 9$$
$|AC| = 3$ bulunur.

O halde,

$$\cos\theta = \frac{\text{Komşu dik kenar uzunluğu}}{\text{Hipotenüs uzunluğu}} = \frac{3}{5}$$

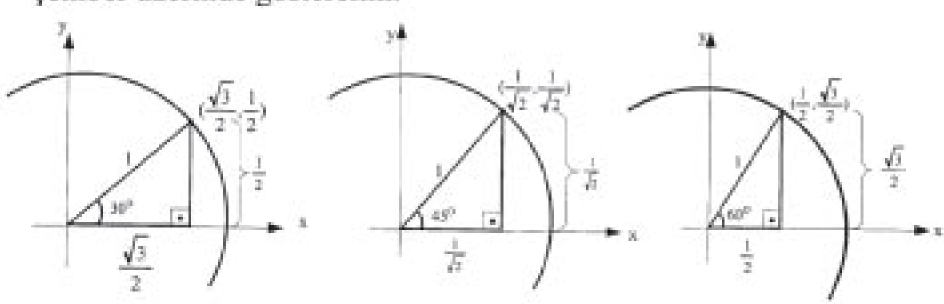
olur.

ALIŞTIRMA 4 ⇨ θ dar bir açı olarak veriliyor. Verilen bilgileri kullanarak istenen trigonometrik değerleri bulunuz.

(A) $\sin\theta = \frac{3}{5}$ ise $\cos\theta = ?$ (B) $\tan\theta = 5$ ise $\cot\theta = ?$

30°, 45° ve 60° nin Trigonometrik Oranları

Matematikte açılar çoğunlukla 30° ve 45° nin çarpanları olduğundan bu açıların trigonometrik değerlerini bulmak faydalı olabilir. Böylece trigonometrik fonksiyonlar tablosuna bakmadan bir sürü açının trigonometrik değeri bulunabilir. Bunun için açıları sırasıyla 30°-60°-90° ve 45°-45°-90° olan iki üçgene ihtiyacımız var. Bu üçgenleri birim çember üzerinde gösterelim.



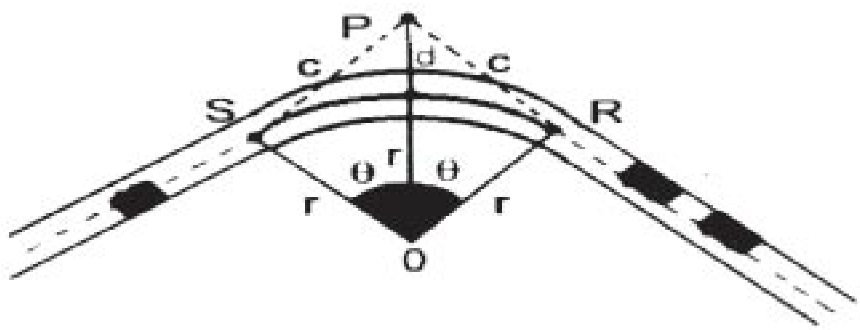
Yukarıdaki şekillerdeki dik üçgenleri kullanarak 30°, 45° ve 60° nin trigonometrik oranlarını bulabiliriz. Tablo 2 de bu seçilen açıların trigonometrik oranları listelenmektedir.

Tablo 2						
θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$\sec\theta$	$\csc\theta$
$30°\left(\frac{\pi}{6}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2
$45°\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$60°\left(\frac{\pi}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$

Yukarıdaki tablodaki bazı değerlerin paydası rasyonel sayı olacak şekilde yazılabilir. Örneğin,

$$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ve}$$
$$\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ tür.}$$

ÖRNEK 5 ⇒Otoban virajlarının çeşitlerinden bir tanesi basit yatay virajdır. Bu viraj aşağıdaki şekilde görüldüğü üzere yarıçapı r olan bir çember yayına bağlı iki doğru parçasından oluşmaktadır. d mesafesi dış mesafe olarak adlandırılır. (Kaynak: F.Mennering, Principles of Highway Engineering and Traffic Analysis)



(A) r ve θ yı içeren d için bir formül bulunuz.

(B) Yarıçapı 228 metre ve açısı $\theta=30°$ olan bir viraj için d yi bulunuz.

ÇÖZÜM ⇒(A) $\tan\theta=\frac{c}{r}$ olduğundan $c=r\tan\theta$

$$\sin\theta=\frac{c}{r+d} \qquad \leftarrow(OSP \text{ üçgeninden})$$

$$\sin\theta = \frac{r\tan\theta}{r+d} \qquad \leftarrow (c = r\tan\theta)$$

$$(r+d)\sin\theta = r\tan\theta \quad \Rightarrow \quad r+d = \frac{r\tan\theta}{\sin\theta}$$

$$r+d = \frac{r\left(\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)}{\sin\theta} \qquad \leftarrow \left(\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)$$

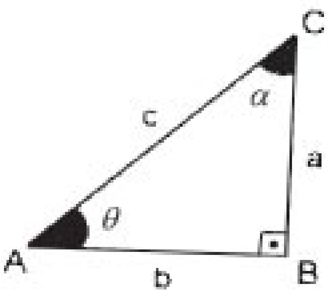
$$r+d = \frac{r}{\cos\theta} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{r}{\cos\theta} - r$$

$$d = r\left(\frac{1}{\cos\theta} - 1\right)$$

(B) $d = 228\left(\dfrac{1}{\cos 30^{\circ}} - 1\right) = 228\left(\dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} - 1\right) = 228\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)$

Tümler Açılar ve Trigonometrik Fonksiyonlar

Yandaki şekilde θ ve α açılarının toplamı 90° olduğundan bu açılar tümler açılardır. θ ve α nın trigonometrik fonksiyonları aşağıdaki gibi gösterilebilir.



$$\sin\alpha = \frac{b}{c} = \cos\theta, \qquad \cos\alpha = \frac{a}{c} = \sin\theta$$

$$\tan\alpha = \frac{b}{a} = \cot\theta, \qquad \cot\alpha = \frac{a}{b} = \tan\theta$$

$$\sec\alpha = \frac{c}{a} = \csc\theta, \qquad \csc\alpha = \frac{c}{b} = \sec\theta$$

Buradan görüldüğü üzere eğer iki açının ölçüleri toplamı 90° ise bunlardan birinin sinüsü diğerinin kosinüsüne, birinin tanjantı diğerinin kotanjantına ve birinin sekantı diğerinin kosekantına eşittir. Bu sonucu şu şekilde özetleyebiliriz:

Trigonometrik Özdeşlikler

$$\sin\theta = \cos(90^{\circ} - \theta) \qquad \cos\theta = \sin(90^{\circ} - \theta)$$

$$\tan\theta = \cot(90^{\circ} - \theta) \qquad \cot\theta = \tan(90^{\circ} - \theta)$$

$$\sec\theta = \csc(90^{\circ} - \theta) \qquad \csc\theta = \sec(90^{\circ} - \theta)$$

ÖRNEK 6 ➾ Aşağıdaki trigonometrik fonksiyonların özdeşlerini tümler açıları kullanarak bulunuz.

(A) $\cot 30°$ (B) $\cos 60°$ (C) $\sec 45°$

ÇÖZÜM ➾ (A) 30° nin bütünler açısı 90°-30° =60° . Böylece

$$\cot 30° = \tan 60° = \sqrt{3}$$

$$(B) \quad \cos 60° = \sin 30° = \frac{1}{2}$$

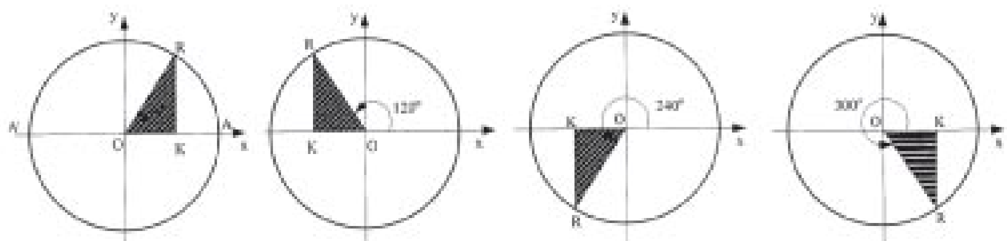
$$(C) \quad \sec 45° = \csc 45° = \sqrt{2}$$

ALIŞTIRMA 5 ➾ Aşağıdaki trigonometrik fonksiyonların özdeşlerini tümler açıları kullanarak bulunuz.

(A) $\tan 30°$ (B) $\sin 30°$ (C) $\csc 60°$

Esas Ölçüleri θ, 180°-θ, 180°+θ, 360°-θ Olan Açıların Trigonometrik Oranları

Daha önceden ölçüleri 30°, 45°, 60° olan açıların trigonometrik oranlarının nasıl hesaplandıklarını gördük. Şimdi de örneğin ölçüleri 60°, 120°, 240° ve 300° olan açıların trigonometrik oranlarını bulalım.



Yukarıdaki şekillerde bu açılara karşı gelen R noktalarının hem apsisleri hem de ordinatları mutlak değerce birbirine eşittir. Bu nedenle işaret de göz önüne alınarak

$$\sin 120° = \sin(180° - 60°) = \sin 60°,$$
$$\cos 120° = \cos(180° - 60°) = -\cos 60°$$
$$\tan 120° = \tan(180° - 60°) = -\tan 60°$$
$$\cot 120° = \cot(180° - 60°) = -\cot 60°$$

$$\sin 240° = \sin(180° + 60°) = -\sin 60°$$
$$\cos 240° = \cos(180° + 60°) = -\cos 60°$$
$$\tan 240° = \tan(180° + 60°) = \tan 60°$$
$$\cot 240° = \cot(180° + 60°) = \cot 60°$$

$$\sin 300° = \sin(360° - 60°) = \sin(-60°) = -\sin 60°$$
$$\cos 300° = \cos(360° - 60°) = \cos(-60°) = \cos 60°$$
$$\tan 300° = \tan(360° - 60°) = \tan(-60°) = -\tan 60°$$
$$\cot 300° = \cot(360° - 60°) = \cot(-60°) = -\cot 60°$$

yazılabilir.

Bu sonuçlara göre $A'(180°)$ ve $A\ (0°)$ ya θ eklemek ya da çıkarmak suretiyle ölçüleri elde edilen açıların trigonometrik oranları mutlak değerce birbirine eşittir. İşaretleri de göz önüne alarak

$$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta \qquad \sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$$
$$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta \qquad \cos(\pi + \theta) = -\cos\theta$$
$$\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta \qquad \tan(\pi + \theta) = \tan\theta$$
$$\cot(\pi - \theta) = -\cot\theta \qquad \cot(\pi + \theta) = \cot\theta$$

$$\sin(2\pi - \theta) = \sin(-\theta) = -\sin\theta$$
$$\cos(2\pi - \theta) = \cos(-\theta) = \cos\theta$$
$$\tan(2\pi - \theta) = \tan(-\theta) = -\tan\theta$$
$$\cot(2\pi - \theta) = \cot(-\theta) = -\cot\theta$$

yukarıda verilen özdeşlikler yazılabilir.

ÖRNEK 7 ⇨ Aşağıda istenen trigonometrik oranları bulunuz.

(A) $\sin 225°$ (B) $\cos 150°$ (C) $\tan 240°$

ÇÖZÜM ⇨ (A) $\sin 225° = \sin(180° + 45°) = -\sin 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

(B) $\cos 150° = \cos(180° - 30°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(C) $\tan 240° = \tan(180° + 60°) = \tan 60° = \sqrt{3}$

ÖRNEK 8 ⇨ Aşağıda istenen trigonometrik değerleri bulunuz.

(A) $\cos\frac{5\pi}{4}$ (B) $\sin\frac{7\pi}{4}$ (C) $\cos\frac{5\pi}{6}$

ÇÖZÜM ⇨ (A) $\cos\frac{5\pi}{4} = \cos(\pi + \frac{\pi}{4}) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$(B)\ \sin\frac{7\pi}{4} = \sin(2\pi - \frac{\pi}{4}) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

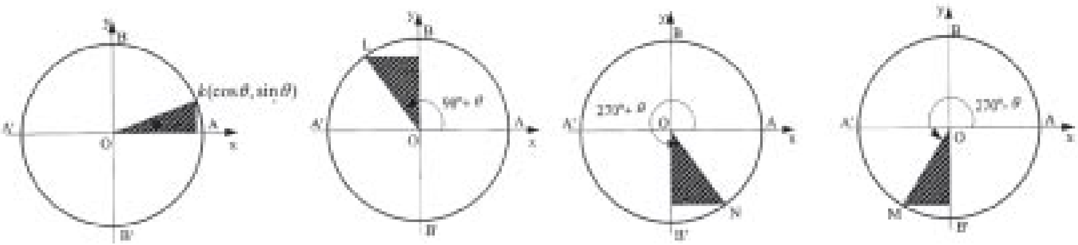
$$(C)\ \cos\frac{5\pi}{6} = \cos(\pi - \frac{\pi}{6}) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ALIŞTIRMA 6 ⇒ Aşağıda istenen trigonometrik değerleri bulunuz.

(A) $\cos\frac{3\pi}{4}$ (B) $\sin\frac{9\pi}{4}$ (C) $\cot\frac{7\pi}{6}$

Esas Ölçüleri θ, $90° + \theta$, $270° - \theta$, $270° + \theta$ Olan Açıların Trigonometrik Oranları

Şimdi burada örneğin ölçüleri, θ, $90° + \theta$, $270° - \theta$, $270° + \theta$ olan açıların trigonometrik oranlarını bulalım.



Yukarıdaki birim çemberlerde açılara karşı gelen K, L, M, N noktaları görülmektedir. Bu şekillerde taralı alanlar birbirine eşittir. Fakat L, M, N noktalarının apsisleri K noktasının ordinatına, ordinatları ise K noktasının apsisine mutlak değerce eşittir. O halde K, L, M, N noktalarının apsis ve ordinatları işaretleri de göz önüne alarak şöyle,

$K(\cos\theta, \sin\theta)$, $L(-\sin\theta, \cos\theta)$, $M(-\sin\theta, -\cos\theta)$, $N(\sin\theta, -\cos\theta)$ yazılabilir.

"Trigonometrik Fonksiyonların Tanımları" bölümünde açıkladığımız üzere birim çember üzerindeki bir noktanın apsisi bir açının kosinüsünü, ordinatı ise sinüsünü vermektedir. Bu açıklamalara göre B(90°) ve B′(270°) ye θ eklemek ya da çıkarmak suretiyle ölçüleri elde edilen açıların sinüsleri θ nın kosinüsüne, kosinüsleri θ nın sinüsüne, tanjantları θ nın kotanjantına, kotanjantları θ nın tanjantına eşittir. Kısaca,

$$\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)=\cos\theta\,,\quad \sin(\frac{3\pi}{2}-\theta)=-\cos\theta\,,\quad \sin(\frac{3\pi}{2}+\theta)=-\cos\theta$$

$$\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\sin\theta\,,\quad \cos(\frac{3\pi}{2}-\theta)=-\sin\theta\,,\quad \cos(\frac{3\pi}{2}+\theta)=\sin\theta$$

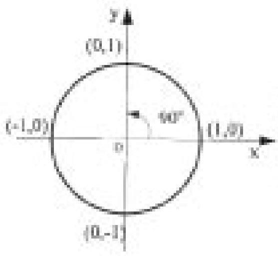
$$\tan(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\cot\theta\,,\quad \tan(\frac{3\pi}{2}-\theta)=\cot\theta\,,\quad \tan(\frac{3\pi}{2}+\theta)=-\cot\theta$$

$$\cot(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\tan\theta\,,\quad \cot(\frac{3\pi}{2}-\theta)=\tan\theta\,,\quad \cot(\frac{3\pi}{2}+\theta)=-\tan\theta$$

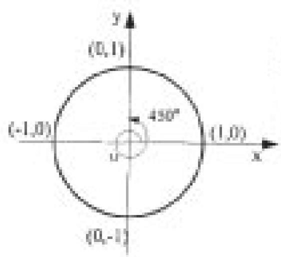
ÖRNEK 9 ⇒ Aşağıda istenen trigonometrik oranları bulunuz ve şekil üzerinde gösteriniz.

(A) $\sin 90°$ (B) $\sin 450°$ (C) $\cos(-\pi)$

ÇÖZÜM ⇒ (A) İlk önce bu açıyı birim çember üzerinde gösterelim.

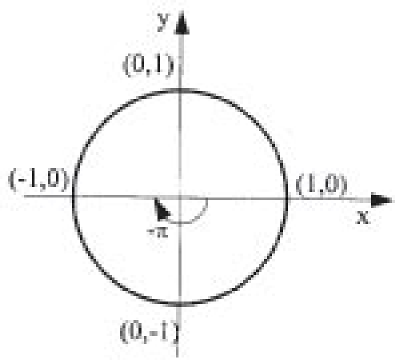


ldiğiniz üzere bu açının bitim kenarı çember üzerindeki B ıktasından geçmektedir. O halde, bu açının sinüsü B noktasının dinatıdır; yani, $\sin 90° = 1$ dir.



3) $450°=360°+90°$ olduğundan bu açı 90° ye karşılık gelir. O halde in $450° = \sin 90° = 1$ dir.

(C) $\cos(-\pi) = -1$



ALIŞTIRMA 7 ⇒ Aşağıda istenen trigonometrik oranları bulunuz ve şekille gösteriniz.

(A) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ (B) $\sin(-450°)$ (C) $\sin 3\pi$

ÖRNEK 10 ⇒ Aşağıda istenen trigonometrik değerleri bulunuz.

(A) $\cot 315°$ (B) $\sec(-240°)$ (C) $\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$

ÇÖZÜM ⇒ (A) $\cot 315° = \cot(270° + 45°) = -\tan 45° = -1$

(B) $\sec(-240°) = \sec(360° - 240°) = \sec(120°)$

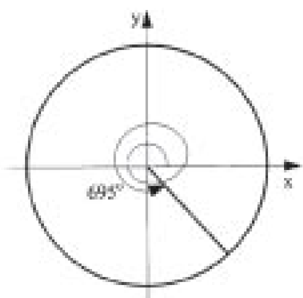
$$\sec(120°) = \sec(90° + 30°) = \frac{1}{\cos(90° + 30°)} = -\frac{1}{\sin 30°} = \frac{-1}{1/2} = -2$$

(C) $\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{6}\right) = \cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ÖRNEK 11 ⇒ Aşağıda istenen trigonometrik değerleri bulunuz.

(A) $\sin 695°$ (B) $\cos 960°$

ÇÖZÜM ⇒ (A) $695°$ nin esas ölçüsü $695° - 360° = 335°$ olup $695°$ ile $335°$ nin trigonometrik değerleri aynıdır. Öyleyse,



$$\sin 695° = \sin 335° = \sin(360° - 25°) = -\sin 25°$$
$$= -0{,}4226$$

Yandaki şekilde görüldüğü üzere açı IV. bölgededir.

(B) $960°$ nin esas ölçüsü $960° - 2 \cdot 360° = 240°$ olup $960°$ ile $240°$ nin trigonometrik değerleri aynıdır. Öyleyse,

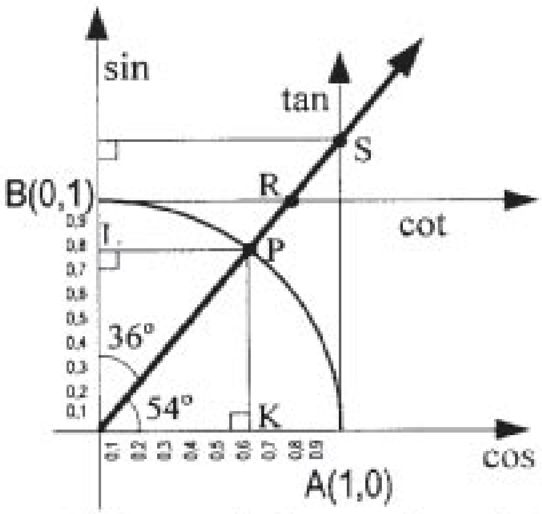
$$\cos 960° = \cos 240° = \cos(180° + 60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$$

$$\cos(270° - 30°) = -\sin 30° = -\frac{1}{2}$$

ALIŞTIRMA 8 ⇒ Aşağıda ölçüleri verilen açıların sinüs, kosinüs ve tanjantlarını bulunuz.

(A) $-200°$ (B) $\dfrac{47\pi}{6}$ (C) $600°$

◆ *TRİGONOMETRİK DEĞERLER TABLOSU*



Birim çember ve özel dik üçgenlerden yararlanarak, 0°, 30°, 45°, 60° ve 90° nin trigonometrik oranlarını hesaplayabiliriz. Bununla ilgili örnekleri daha önce yapmıştık.

Birim çemberden yararlanarak 54° nin trigonometrik oranlarının yaklaşık değerlerini bulalım:

Yukarıdaki birim çemberde:

$$\left.\begin{array}{l} \cos 54° = |OK|,\ |OK| \approx 0{,}58 \\ \sin 54° = |OL|,\ |OL| \approx 0{,}80 \\ \tan 54° = |AS|,\ |AS| \approx 1{,}37 \\ \cot 54° = |BR|,\ |BR| \approx 0{,}72 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \cos 54° \approx 0{,}58 \\ \sin 54° \approx 0{,}80 \\ \tan 54° \approx 1{,}37 \\ \cot 54° \approx 0{,}72 \end{array}$$

Bu yöntemle, herhangi bir açının ölçüsünün trigonometrik oranlarının yaklaşık değerleri bulunabilir.

IŞTIRMA 9 ⇒ 36° nin trigonometrik oranlarını yukarıdaki birim çemberden ve 36°=90°-54° olduğundan yararlanarak bulunuz.

54° ve 36° nin trigonometrik oranlarını karşılaştırınız.

"Trigonometrik Değerler Tablosunu", herhangi bir açının ölçüsünün trigonometrik oranlarını daha ayrıntılı hesaplamak için kullanabiliriz. Bu tablonun nasıl kullanılacağı ile ilgili bilgiler aşağıda verilmektedir. Bir sonraki sayfada verilen Trigonometrik Değerler Tablosunu inceleyiniz.

Tabloda 0° ile 45° arasındaki açı ölçüleri, **sol sütunda, yukarıdan aşağı doğru** yazılmıştır.

TRİGONOMETRİK DEĞERLER TABLOSU

Açı Ölçüsü (Derece)	cos	sin	tan	cot	sec	csc	Açı Ölçüsü (Derece)
0	1,0000	0,0000	0,0000		1,0000		90
1	0,9998	0,0175	0,0175	57,2900	1,0002	57,2987	89
2	0,9994	0,0349	0,0349	28,6363	1,0006	28,6537	88
3	0,9986	0,0523	0,0524	19,0811	1,0014	19,1073	87
4	0,9976	0,0698	0,0699	14,3007	1,0024	14,3356	86
5	0,9962	0,0872	0,0875	11,4301	1,0038	11,4737	85
6	0,9945	0,1045	0,1051	9,5144	1,0055	9,5668	84
7	0,9925	0,1219	0,1228	8,1443	1,0075	8,2055	83
8	0,9903	0,1392	0,1405	7,1154	1,0098	7,1853	82
9	0,9877	0,1564	0,1584	6,3138	1,0125	6,3925	81
10	0,9848	0,1736	0,1763	5,6713	1,0154	5,7588	80
11	0,9816	0,1908	0,1944	5,1446	1,0187	5,2408	79
12	0,9781	0,2079	0,2126	4,7046	1,0223	4,8097	78
13	0,9744	0,2250	0,2309	4,3315	1,0263	4,4454	77
14	0,9703	0,2419	0,2493	4,0108	1,0306	4,1336	76
15	0,9659	0,2588	0,2679	3,7321	1,0353	3,8637	75
16	0,9613	0,2756	0,2867	3,4874	1,0403	3,6280	74
17	0,9563	0,2924	0,3057	3,2709	1,0457	3,4203	73
18	0,9511	0,3090	0,3249	3,0777	1,0515	3,2361	72
19	0,9455	0,3256	0,3443	2,9042	1,0576	3,0716	71
20	0,9397	0,3420	0,3640	2,7475	1,0642	2,9238	70
21	0,9336	0,3584	0,3839	2,6051	1,0711	2,7904	69
22	0,9272	0,3746	0,4040	2,4751	1,0785	2,6695	68
23	0,9205	0,3907	0,4245	2,3559	1,0864	2,5593	67
24	0,9135	0,4067	0,4452	2,2460	1,0946	2,4586	66
25	0,9063	0,4226	0,4663	2,1445	1,1034	2,3662	65
26	0,8988	0,4384	0,4877	2,0503	1,1126	2,2812	64
27	0,8910	0,4540	0,5095	1,9626	1,1223	2,2027	63
28	0,8829	0,4695	0,5317	1,8807	1,1326	2,1301	62
29	0,8746	0,4848	0,5543	1,8040	1,1434	2,0627	61
30	0,8660	0,5000	0,5774	1,7321	1,1547	2,0000	60
31	0,8572	0,5150	0,6009	1,6643	1,1666	1,9416	59
32	0,8480	0,5299	0,6249	1,6003	1,1792	1,8871	58
33	0,8387	0,5446	0,6494	1,5399	1,1924	1,8361	57
34	0,8290	0,5592	0,6745	1,4826	1,2062	1,7883	56
35	0,8192	0,5736	0,7002	1,4281	1,2208	1,7434	55
36	0,8090	0,5878	0,7265	1,3764	1,2361	1,7013	54
37	0,7986	0,6018	0,7536	1,3270	1,2521	1,6616	53
38	0,7880	0,6157	0,7813	1,2799	1,2690	1,6243	52
39	0,7771	0,6293	0,8098	1,2349	1,2868	1,5890	51
40	0,7660	0,6428	0,8391	1,1918	1,3054	1,5557	50
41	0,7547	0,6561	0,8693	1,1504	1,3250	1,5243	49
42	0,7431	0,6691	0,9004	1,1106	1,3456	1,4945	48
43	0,7314	0,6820	0,9325	1,0724	1,3673	1,4663	47
44	0,7193	0,6947	0,9657	1,0355	1,3902	1,4396	46
45	0,7071	0,7071	1,0000	1,0000	1,4142	1,4142	45
Açı Ölçüsü (Derece)	sin	cos	cot	tan	csc	sec	Açı Ölçüsü (Derece)

Tümler açılardan birinin ölçüsünün sinüsü, diğerinin ölçüsünün kosinüsüne; birinin ölçüsünün tanjantı, diğerinin ölçüsünün kotanjantına eşittir. (Not: Tümler açı→ $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) = 90°$). Bu özelik nedeniyle, 0° ile 45° arasındaki açı ölçülerinin trigonometrik oranları hesaplandığında, 45° ile 90° arasındaki açı ölçülerinin trigonometrik oranları da hesaplanmış olur.

Tabloda, 45° ile 90° arasındaki açı ölçüleri, **sağ sütunda, aşağıdan yukarıya doğru** yazılmıştır.

Açının ölçüsü 0° ile 45° arasında ise, açının ölçüsünün trigonometrik oranları, açının ölçüsünün bulunduğu satır ile **tablonun üstünde** yazılı trigonometrik fonksiyonun bulunduğu sütunun kesiştiği yerdeki sayıdır. Trigonometrik değerler tablosundan

$$\begin{aligned} &\cos 36° = 0,8090 \\ &\sin 36° = 0,5878 \\ &\tan 36° = 0,7265 \\ &\cot 36° = 1,3764 \\ &\sec 36° = 1,2361 \\ &\cos 36° = 1,7013 \end{aligned}$$

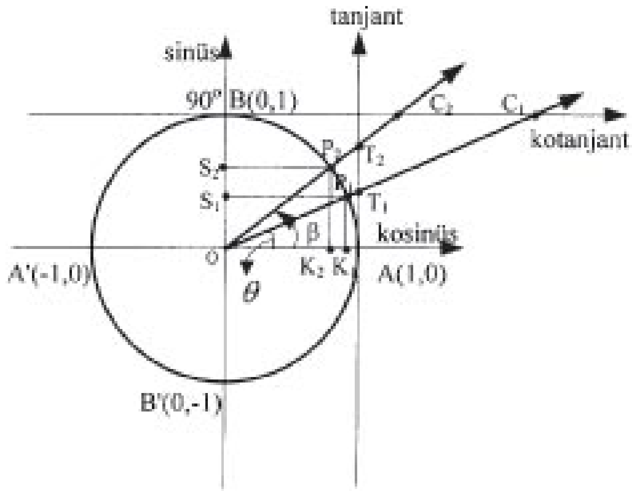
bulunur.

Açının ölçüsü 45° ile 90° arasında ise, açının ölçüsünün trigonometrik oranları, açının ölçüsünün **bulunduğu** satır ile **tablonun altında** yazılı trigonometrik fonksiyonun bulunduğu sütunun kesiştiği yerdeki sayıdır. Trigonometrik değerler tablosundan

$$\begin{aligned} &\sin 54° &&= 0,8090 \\ &\cos 54° &&= 0,5878 \\ &\cot 54° &&= 0,7265 \\ &\tan 54° &&= 1,3764 \\ &\operatorname{cosec} 54° &&= 1,2361 \\ &\sec 54° &&= 1,7013 \end{aligned}$$

bulunur.

Açıların ölçüleri 36° ve 54° ise, bu açıların ölçülerinin trigonometrik oranlarını karşılaştırınız. Bulgunuzu yazınız ve ispatlayınız.



Yandaki birim çemberde,

$0° < \theta < \beta < 90°$ dir.

* $\sin\theta = |OS_1|$, $\sin\beta = |OS_2|$,
  $\sin\theta < \sin\beta$
* $\cos\theta = |OK_1|$, $\cos\beta = |OK_2|$,
  $\cos\theta > \cos\beta$
* $\tan\theta = |AT_1|$, $\tan\beta = |AT_2|$,
  $\tan\theta < \tan\beta$
* $\cot\theta = |BC_1|$, $\cot\beta = |BC_2|$,
  $\cot\theta > \cot\beta$

olduğu görülmektedir. Buna göre, 0° ile 90° arasında, açının ölçüsü büyüdükçe; açının ölçüsünün sinüsü ve tanjantı büyür, kosinüsü ve kotanjantı küçülür.

ÖRNEK 12 ⇒ $\sin 42°\ 30'$ değerini hesaplayınız.

ÇÖZÜM ⇒ Trigonometrik değerler tablosundan;

$$\left.\begin{array}{l}\sin 42^{o} = 0{,}6691 \\ \sin 43^{o} = 0{,}6820\end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{\sin 42^{o}}_{0{,}6691} < \underbrace{\sin 43^{o}}_{0{,}6820} \qquad (\uparrow)$$

$1° = 60'$ için, $0{,}6820 - 0{,}6691 = 0{,}0129$ **artma** olduğundan $30'$ için ne kadar **artma** olacağını orantı kullanarak hesaplayalım.

$60'$ için $\quad 0{,}0129$ **artma** $(\uparrow)$

$30'$ için $\quad ?$

$$? = \frac{30 \cdot 0{,}0129}{60} = 0{,}00645$$
$$\approx 0{,}0065$$

Buna göre,

$\sin 42°\ 30' = \sin 42° + 0{,}0065 = 0{,}6691 + 0{,}0065 = 0{,}6756$ dır.

> Açının ölçüsü 42° den 43° ye çıkarıldığında, sinüs değerlerinde bir **artma** olduğunu birim çemberden yararlanarak gösteriniz.

ÖRNEK 13 ⇨ cos 42° 30′ değerini hesaplayınız.

ÇÖZÜM ⇨

$$\left.\begin{array}{l}\cos 42^{o} = 0{,}7431 \\ \cos 43^{o} = 0{,}7314\end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{\cos 42^{o}}_{0{,}7431} > \underbrace{\cos 43^{o}}_{0{,}7314} \quad (\downarrow)$$

1°=60′ için, 0,7431-0,7314=0,0117 **azalma** olduğundan, 30′ için, ne kadar **azalma** olacağını orantı kullanarak hesaplayalım:

60′ için 0,0117 **azalma** $(\downarrow)$

30′ için ?

$$? = \frac{30 \cdot 0{,}0117}{60} = 0{,}00585$$

Buna göre,

cos 42° 30′ = cos 42° – 30′ =0,7431 – 0 ,00585=0,73725 olur.

> Açının ölçüsü 42° den 43° ye çıkarıldığında kosinüs değerlerinde bir **azalma** olduğunu birim çemberden yararlanarak gösteriniz.

ÖRNEK 14 ⇨ tan 42°30′ değerini hesaplayınız.

ÇÖZÜM ⇨

$$\left.\begin{array}{l}\tan 42^{o} = 0{,}9004 \\ \tan 43^{o} = 0{,}9325\end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{\tan 42^{o}}_{0{,}9004} < \underbrace{\tan 43^{o}}_{0{,}9325} \quad (\uparrow)$$

$1° = 60'$ için, $0,9325 - 0,9004 = 0,0321$ artma olduğundan, $30'$ için, ne kadar artma olacağını orantı kullanarak hesaplayalım,

$60'$ için — $0,0321$ artma $(\uparrow)$

$30'$ için — $?$

$$? = \frac{30 \cdot 0,0321}{60} = 0,01605$$

Buna göre,

$\tan 42° 30' = \tan 42° + 30' = 0,9004 + 0,01605 = 0,91645$ olur.

Açının ölçüsü 42° den 43° ye çıkarıldığında tanjant değerlerinde bir **artma** olduğunu birim çemberden yararlanarak gösteriniz.

ÖRNEK 15 ⇨ $\cot 40° 30'$ değerini hesaplayınız.

ÇÖZÜM ⇨

$$\left.\begin{array}{l}\cot 40° = 1,1918 \\ \cot 41° = 1,1504\end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{\cot 40°}_{1,1918} > \underbrace{\cot 41°}_{1,1504} \quad (\downarrow)$$

$1° = 60'$ için, $1,1918 - 1,1504 = 0,0414$ azalma olduğundan $30'$ için, ne kadar **azalma** olduğunu orantıdan yararlanarak hesaplayalım.

$60'$ için — $0,0414$ azalma $(\downarrow)$

$30'$ için — $?$

$$? = \frac{30 \cdot 0,0414}{60} = 0,0207$$

Buna göre,

$\cot 40° 30' = \cot 40° - 0,0207 = 1,1918 - 0,0207 = 1,1711$ olur.

Açının ölçüsü 40° den 41° ye çıkarıldığında kotanjant değerlerinde bir **azalma** olduğunu birim çemberden yararlanarak gösteriniz.

ALIŞTIRMA 10 ⇨ Aşağıdaki trigonometrik fonksiyonların değerlerini hesaplayınız.

(A) $\sin 35°10'$ (B) $\cos 25°12'$

(C) $\cot 72°5'$ (D) $\tan 9°49'$

ÖRNEK 16 ⇨ $\cos\theta = 0,8988$ olduğuna göre θ yı bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ Trigonometrik değerler tablosundaki kosinüs sütununa, yukarıdan aşağıya bakıldığında kosinüsü 0,8988 olan θ değerinin, sol sütunda 26° olduğu görülür. Başka bir deyişle,

$$\cos 26° = 0,8988 \text{ dir.}$$

O halde, $\theta = 26°$ dir.

ÖRNEK 17 ⇨ $\sin\beta = 0,9397$ olduğuna göre β yı bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ Sinüs sütununa, **yukarıdan aşağıya doğru** bakıldığında 0,9397 değerinin bulunmadığı görülmektedir. Sinüs sütununa **aşağıdan yukarıya doğru** bakıldığında sinüsü 0,9397 olan β değerinin sağ sütunda 70° olduğu görülmektedir. Başka bir deyişle,

$$\sin 70° = 0,9397 \text{ dir.}$$

O halde, $\beta = 70°$ dir.

ÖRNEK 18 ⇨ $\cos\theta = 0,3127$ olduğuna göre θ değerini hesaplayınız.

ÇÖZÜM ⇨ İlk önce kosinüs sütununa yukarıdan aşağıya doğru baktığımızda 0,3127 değerinin olmadığı görülmektedir. Daha sonra, kosinüs sütununa **aşağıdan yukarıya doğru** baktığımızda da 0,3127 değerinin olmadığı görülmektedir. O halde, 0,3127 değerine en yakın değerin hem yukarıdan aşağı hem de aşağıdan yukarı kosinüs sütunlarına baktığımızda 71° ile 72° arasında olduğu görülmektedir.

$$\left.\begin{array}{l}\cos 71^{o} = 0{,}3256 \\ \cos 72^{o} = 0{,}3090\end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{0{,}3090}_{\cos 72^{\circ}} < \underbrace{0{,}3127}_{?} < \underbrace{0{,}3256}_{\cos 71^{\circ}}$$

Buna göre, $71° < \theta < 72°$ dir.

$\cos 71° - \cos 72° = 0{,}3256 - 0{,}3090 = 0{,}0166$ azalma için, $1° = 60'$ olduğundan,

0,3127, bulmak istediğimiz θ nın kosinüs değeri,

$\cos 71° - 0{,}3127 = 0{,}3256 - 0{,}3127 = 0{,}0129$ azalma için θ nın değerini orantıdan yararlanarak bulalım:

$60'$ için	0,0166 azalma (↓)
?	0,0129 azalma (↓)

$$? = \frac{60 \cdot 0{,}0129}{0{,}0166} = \frac{0{,}0774}{0{,}0166} = (4{,}662)'$$

$\approx 5'$ artma olur.

Buna göre,

$\theta = 71°\ 5'$ dır.

ALIŞTIRMA 11⇨ Aşağıda verilen açıların ölçülerini hesaplayınız.

(A) $\sin \theta = 0{,}5299$ (B) $\cos \beta = 0{,}1908$

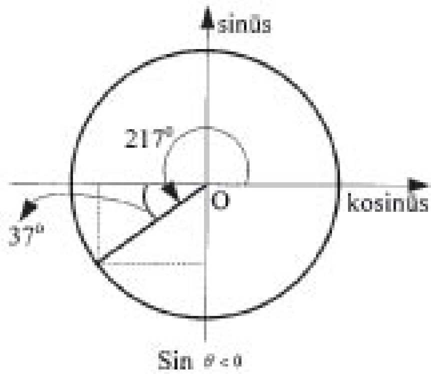
(C) $\tan \delta = 1{,}0724$ (D) $\cot \alpha = 3{,}4874$

(E) $\sec \psi = 1{,}0306$ (F) $\csc \phi = 1{,}5890$

Not: Trigonometrik değerler tablosunda yer almayan trigonometrik fonksiyonların değerlerini, açılarının ölçülerine180° veya 90° veya 45° ekleyip çıkararak tabloda yer alan açı ölçülerini elde ederek bulmaya çalışınız.

ÖRNEK 19 ⇒ sin 217° nin değerini hesaplayınız.

ÇÖZÜM ⇒



sin 217°=sin(180°+37°)= – sin 37°

←(sin(180°+θ)= −sinθ)

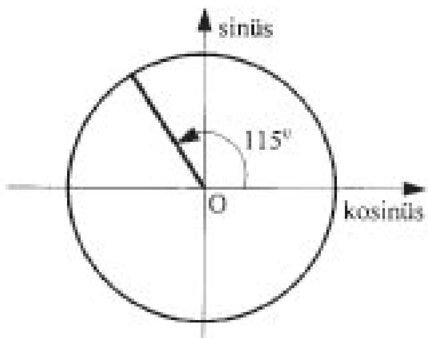
Trigonometrik Değerler Tablosunda,

sin 37°=0,6018 olduğundan,

sin 217°= - sin 37°= - 0,6018 dir.

ÖRNEK 20 ⇒ sin 115° nin değerini hesaplayınız.

ÇÖZÜM ⇒



115°=90°+25° olduğundan

sin 115°=sin(90°+25°)=cos 25°

←(sin(90°-θ)=cos θ)

Trigonometrik Değerler Tablosuna bakıldığında,

cos 25°=0,9063 olduğundan,

sin 115°=cos 25°=0,9063 tür.

ALIŞTIRMA 12⇒ Aşağıdaki değerleri hesaplayınız.

(A) sin 150° (B) sin 252°

ÖRNEK 21 ⇒ D açısının ölçüsü 90° olan EDF dik üçgeninde, $[DE]$ kenarının uzunluğu 14 cm, E açısının ölçüsü 70° dir. $[EF]$ ve $[DF]$ kenarlarının uzunluklarını bulunuz.

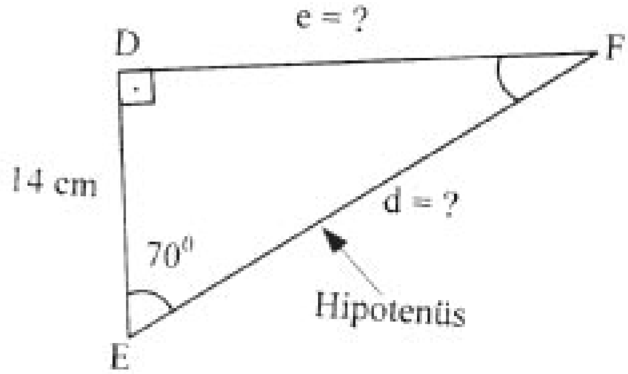
ÇÖZÜM ⇒ $|EF|$ ve $|DF|$ değerlerini dik üçgende açıların trigonometrik oranlarından yararlanarak bulabiliriz. Bunlardan cosθ ve tan θ işimize yaramaktadır.

O halde, cosθ ve tan θ tanımlarını yazalım.

$$\cos\theta = \frac{\text{Komşu Dik Kenarın Uzunluğu}}{\text{Hipotenüsün Uzunluğu}}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{Karşı Dik Kenarın Uzunluğu}}{\text{Komşu Dik Kenarın Uzunluğu}}$$

İlk önce, $|EF|$ yi bulalım.



$$\cos E = \frac{|DE|}{|EF|}$$

$$\Rightarrow \cos 70^0 = \frac{14}{d}$$

←(Trigonometrik Değerler Tablosu)

$$\Rightarrow 0{,}3420 = \frac{14}{d}$$

$$\Rightarrow d \cdot 0{,}3420 = 14$$

$$\Rightarrow d = \frac{14}{0{,}3420}$$

$$\Rightarrow d \approx 40{,}94 \text{ cm}$$

$|DF|$ yi bulalım:

$$\tan E = \frac{|DF|}{|DE|} \quad \Rightarrow \tan 70^o = \frac{e}{14}$$

$$\Rightarrow 2{,}7475 = \frac{e}{14}$$

$$\Rightarrow e = 2{,}7475 \cdot 14$$

$$\Rightarrow e \approx 38{,}47 \text{ cm}$$

ALIŞTIRMA 13⇨ A açısının ölçüsü 90° olan BAC dik üçgeninde, $[AC]$ kenarının uzunluğu 9 cm, C açısının ölçüsü 35° dir. $[AB]$ kenarının uzunluğunu hesaplayınız.

◆ PERİYODİK FONKSİYONLAR VE TRİGONOMETRİ

Periyodik fonksiyonlar birbiri arkasından tekrarlayan veya özel bir periyotta devreden fonksiyonlardır.

Periyodik Fonksiyon

Eğer f fonksiyonunun tanım kümesinde bulunan bütün x değerleri için $f(x) = f(x+p)$ olacak biçimde en az bir $p \in R$ varsa bu fonksiyona periyodik fonksiyon denir.

Bir fonksiyonun esas periyodu fonksiyonun bir devri tamamladığı tanım kümesi üzerindeki en küçük pozitif uzunluktur. Bu uzunluk üzerindeki fonksiyonu aldığımızda sonsuz sayıda bunun kopyasını yapabiliriz ve sonunda bize ilk önce sahip olduğunuz orijinal fonksiyonu verir. Yani, $f(x) = f(x+p)$ eşitliğini sağlayan birden çok p sayısı varsa, bunların pozitif olanlarının en küçüğüne f fonksiyonunun **esas periyodu** denir.

Kısaca, eğer f fonksiyonu p periyodu ile periyodik bir fonksiyon ise bütün x değerleri ve herhangi k tam sayısı için $f(x) = f(x+kp)$ olur.

Daha önce trigonometrik fonksiyonların periyodik olduklarını belirtmiştik. Şimdi de her trigonometrik fonksiyonun periyodunu ayrı ayrı inceleyelim.

$k \in Z$ olmak üzere $\forall \theta \in R$ için

$$\cos(\theta + k \cdot 2\pi) = \cos\theta$$
$$\sin(\theta + k \cdot 2\pi) = \sin\theta$$

olduğundan, kosinüs ve sinüs fonksiyonları periyodik fonksiyonlardır. Bu fonksiyonların periyodu $k \cdot 2\pi$ ve esas periyodu 2π dir.

$k \in Z$ olmak üzere $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ve $\theta \in R$ için

$$\tan(\theta + k\pi) = \tan\theta$$

olduğundan, tanjant fonksiyonu periyodik fonksiyondur. Bu fonksiyonun periyodu $k\pi$ ve esas periyodu π dir.

$k \in Z$ olmak üzere $\theta \neq k\pi$ ve $\theta \in R$ için

$$\cot(\theta + k\pi) = \cot\theta$$

olduğundan, kotanjant fonksiyonu periyodik fonksiyondur. Periyodu $k\pi$ ve esas periyodu π dir.

Benzer şekilde,

$$\sec\ (\theta + k\cdot 2\pi) = \sec\theta$$
$$\csc\ (\theta + k\cdot 2\pi) = \csc\theta$$

olduğundan, sekant ve kosekant fonksiyonları periyodik fonksiyonlardır. Periyodu $k\cdot 2\pi$ ve esas periyodu 2π dir.

ÖRNEK 22 ⇨ Aşağıda verilen trigonometrik fonksiyonların periyotlarını bulunuz.

(A) $y = 3\sin 4x$ (B) $y = \cot(2x + \frac{\pi}{6})$

ÇÖZÜM ⇨(A) $\sin(\theta + k\cdot 2\pi) = \sin x$ olduğunu hatırlayalım. Biliyoruz ki $\sin x$ fonksiyonunun periyodu 2π dir. Yani $p = 2\pi$ dir.

$y = 3\sin 4x$ durumunda $4p = 2\pi \Rightarrow p = \dfrac{2\pi}{4}$ bulunur.

(B) Biliyoruz ki kotanjant fonksiyonunun periyodu π dir. O zaman,

$2p = \pi \Rightarrow p = \dfrac{\pi}{2}$ dir.

1. $f(x) = \sin^n(ax \pm b)$ ve $g(x) = \cos^n(ax \pm b)$ fonksiyonlarında
   n: tek doğal sayı ise $p = \dfrac{2\pi}{a}$, n: çift doğal sayı ise $p = \dfrac{\pi}{a}$ dır.
2. $f(x) = \tan^n(ax \pm b)$ ve $f(x) = \cot^n(ax \pm b)$ fonksiyonlarında
   n: doğal sayı ise $p = \dfrac{\pi}{a}$ dır.

ALIŞTIRMA 14 ⇨ Aşağıda verilen trigonometrik fonksiyonların periyotlarını bulunuz.

(A) $y = 3\tan\dfrac{x}{2}$ (B) $y = \cos(2x + 1)$

ÖRNEK 23 ⇨ $y = \dfrac{1}{\sin 2x} + 3$ fonksiyonunun periyodunu bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ $y = \dfrac{1}{\sin 2x} + 3 = \csc 2x + 3$

$2p = 2\pi \Rightarrow p = \pi$

ALIŞTIRMA 15 ⇨ $y = \sin^2 x$ fonksiyonunun periyodunu bulunuz.

ÖRNEK 24 ⇒ $y = \sin^2(2x+3)$ fonksiyonunun periyodunu bulunuz.

ÇÖZÜM ⇒ $y = \sin^2(2x+3)$ fonksiyonunun periyodunu bulmak için $y = \sin^n(ax \mp b)$ fonksiyonunun periyodunu bulmak için verdiğimiz açıklamayı kullanabiliriz. Yani, burada n = 2 çift bir doğal sayı olduğundan $p = \frac{\pi}{a} = \frac{\pi}{2}$ dir

ALIŞTIRMA 16⇒ $y = \cos^3(\frac{3x}{2}+1)$ fonksiyonunun periyodunu bulunuz.

◆ *TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN GRAFİKLERİ*

Bu bölümde sinüs, kosinüs ve tanjant fonksiyonlarının grafiklerini çizeceğiz.

Sinüs Fonksiyonu

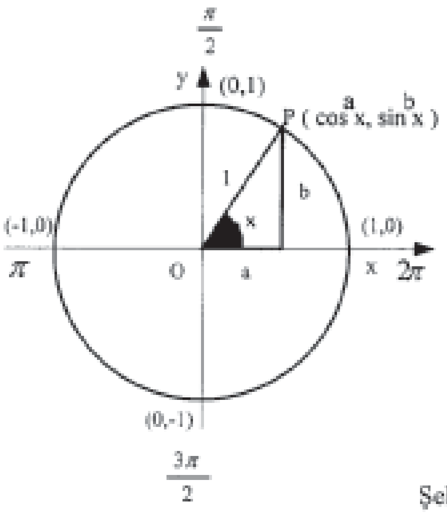
$x \in R$ olmak üzere sinüs fonksiyonunun sembolik gösteriminin

$$y = f(x) = \sin x$$

olduğunu biliyoruz. Sinüs fonksiyonunun grafiğini $(x, \sin x)$ sıralı ikililerini kullanarak çizebiliriz. Sinüs fonksiyonunun grafiği $\{(x, \sin x) | x \in R\}$ kümesinin elemanları olan ikililere dik koordinat düzleminde karşılık gelen noktaların kümesidir. Biliyoruz ki $(x, \sin x)$ sıralı ikilileri tek tek bulmak gayet zahmetli bir iştir. Fakat, $y = \sin x$ fonksiyonunda $(x, \sin x)$ sıralı ikililerinin birim çember üzerinde nasıl değiştiğini gözlemleyerek bu fonksiyonun genel yapısı hakkında bilgi edinebiliriz.

Daha önce belirttiğimiz gibi sinüs fonksiyonunun tanım kümesi bütün reel sayılar R, değer kümesi $[-1, 1]$ ve periyodu 2π dir. Sinüs fonksiyonu 2π periyoduna sahip olduğu için $\{x, y \in R : y = \sin x\}$ kümesini analitik düzlemde göstermek için yalnızca $x \in [0, 2\pi]$ almak yeterlidir. Grafiği bir periyot için elde ettiğimiz zaman, grafiğin geri kalan kısımlarını aynı şekilde tekrarlayacak şekilde sola ve sağa doğru çizebiliriz.

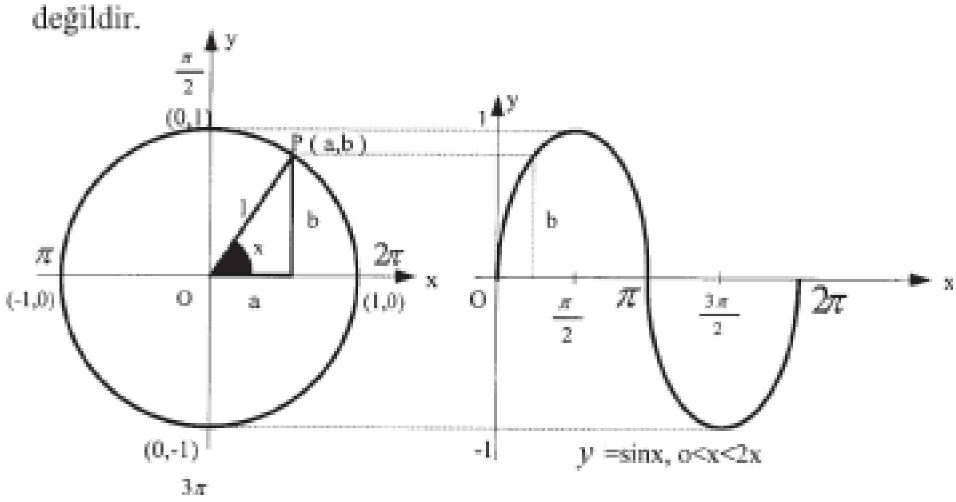
Aşağıdaki şekil 1.3, x açısı 0 dan 2π ye arttığında y = sinx fonksiyonunun nasıl değiştiğini göstermektedir.



x	y=sinx
0 ile $\frac{\pi}{2}$ arası	0 dan 1 e artar
$\frac{\pi}{2}$ ile π arası	1 den 0 a azalır
π ile $\frac{3\pi}{2}$ arası	0 dan –1 e azalır
$\frac{3\pi}{2}$ ile 2π arası	-1 den 0 a artar

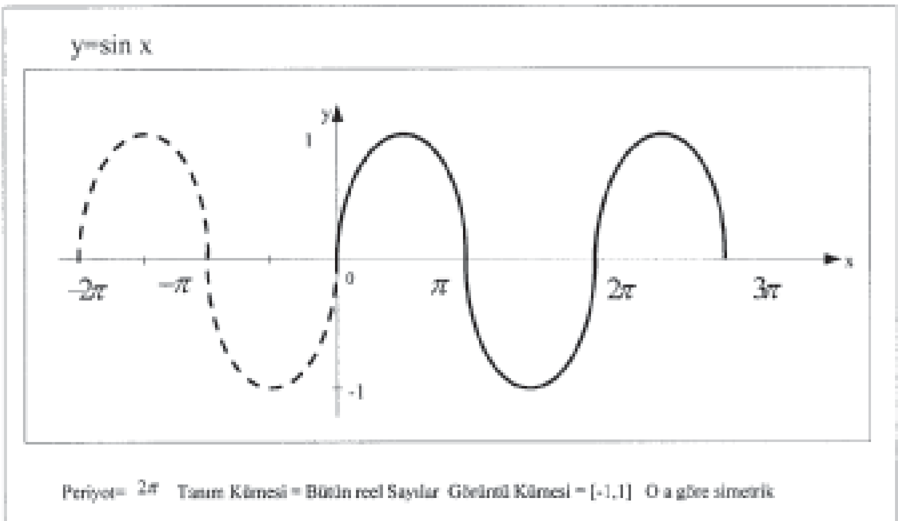
Şekil 1.3

$y = \sin x$ fonksiyonunun $[0, 2\pi]$ aralığındaki grafiğini çizmek için, aralığı bölgelere karşılık gelecek şekilde dört eşit parçaya ayırabiliriz. x arttığı zaman birim çember üzerindeki P noktası saatin ters yönünde yukarıda belirtildiği gibi hareket eder. Grafiği çizmek için yukarıdaki tabloda verilen değerler ile bazı özel değerler $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, ...\right)$ kullanılabilir. $y = \sin x$ fonksiyonunun $[0, 2\pi]$ aralığındaki grafiği aşağıda gösterilmektedir. Aşağıdaki şekilde sol tarafta verilen birim çember sinüs fonksiyonunu tanımlamak için kullanılıyor: çember $y = \sin x$ fonksiyonunun grafiğinin bir parçası değildir.



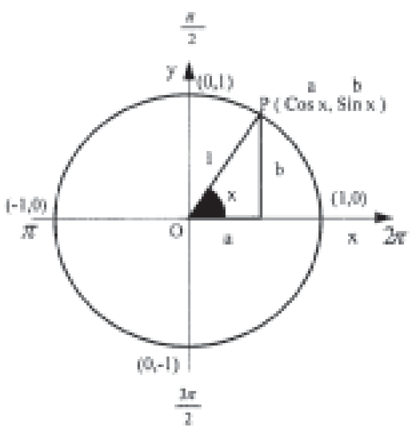
Şekil 1.4

Sinüs fonksiyonunun periyodu 2π olduğundan dolayı x tekrar artmaya devam ederse o zaman yukarıdaki şekilde verilen değerler her 2π aralığı ünitesinde tekrarlar. Yani, $\sin(x + k \cdot 2\pi) = \sin x$ tir.



Kosinüs Fonksiyonu

Aynı şekilde düşünerek kosinüs fonksiyonunun grafiğini elde edebiliriz. Aşağıdaki şekil 1.5, $\cos x = y$ fonksiyonunda $P(a,b)$ noktasının birim çember üzerinde nasıl değiştiğini göstermektedir.

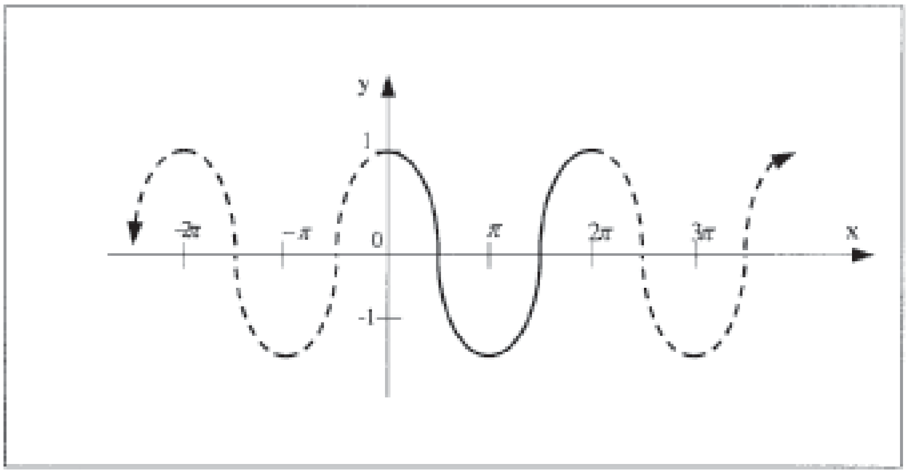


x	$y = \cos x$
0 ile $\frac{\pi}{2}$ arası	1 den 0 a azalır
$\frac{\pi}{2}$ ile π arası	0 dan -1 e azalır
π ile $\frac{3\pi}{2}$ arası	-1 den 0 a artar
$\frac{3\pi}{2}$ ile 2π arası	0 dan 1 e artar

Şekil 1.5

Yukarıdaki bilgileri ve bazı özel değerler için $y = \cos x$ fonksiyonunun değerlerini kullanarak $y = \cos x$ fonksiyonunun grafiğini çizebiliriz. Bu arada $y = \cos x$ fonksiyonunun periyodunun 2π olduğunu unutmamamız gerekir. Yani, $\cos(x + k \cdot 2\pi) = \cos x$ tir.

y=cosx



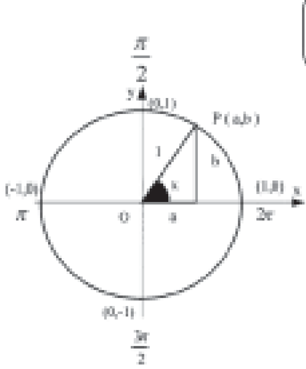
Periyot=2x Tanım Kümesi=Bütün reel sayılar Görüntü kümesi =[-1,1] y eksenine göre simetrik

Tanjant Fonksiyonu

$x \in R$ olmak üzere tanjant fonksiyonunun gösteriminin

$$y = f(x) = \tan x$$

olduğunu biliyoruz. Daha önce belirttiğimiz üzere tanjant fonksiyonunun tanım kümesi $R - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z \right\}$ dir. Buradan anlaşılacağı üzere tanjant fonksiyonu $x = \frac{-\pi}{2}$ ve $x = \frac{\pi}{2}$ gibi açılarda tanımsızdır. Yani, aşağıdaki tabloda ve şekil 1.6 da gösterildiği gibi $P(a,b)$ noktası ne zaman düşey eksen üzerinde bulunursa $\left(x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z \right)$, o zaman $(a,b) = (0, \mp 1)$ ve $\tan x = \frac{b}{a} = \frac{\mp 1}{0}$ tanımsız olur. Diğer taraftan $P(a,b)$ noktası ne zaman yatay eksen üzerinde bulunursa (yani, $x = k\pi,\quad k \in Z$), o zaman $(a,b) = (\mp 1, 0)$ ve $\tan x = \frac{b}{a} = \frac{0}{\mp 1} = 0$ olur. O halde, yatay eksen üzerindeki $P(a,b)$ noktaları $y = \tan x$ fonksiyonunun x eksenini hangi noktalarda kestiğini gösterir. Öyleyse, $k \in Z$ olmak üzere $x = k\pi$ x eksenini kesen noktalardır.



Şekil 1.6

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
tanx		$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$		$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

$y = \tan x$ fonksiyonunun grafiğini çizerken ilk önce x eksenini kesen noktaları yatay eksende yerleştirelim $P(a,b)$ dikey eksen üzerinde olduğu zaman $\tan x$ tanımsız olduğu için bu noktaları kesik çizgi ile göstereceğiz. Bu kesik noktalar asimptotları vermektedir. Yani,

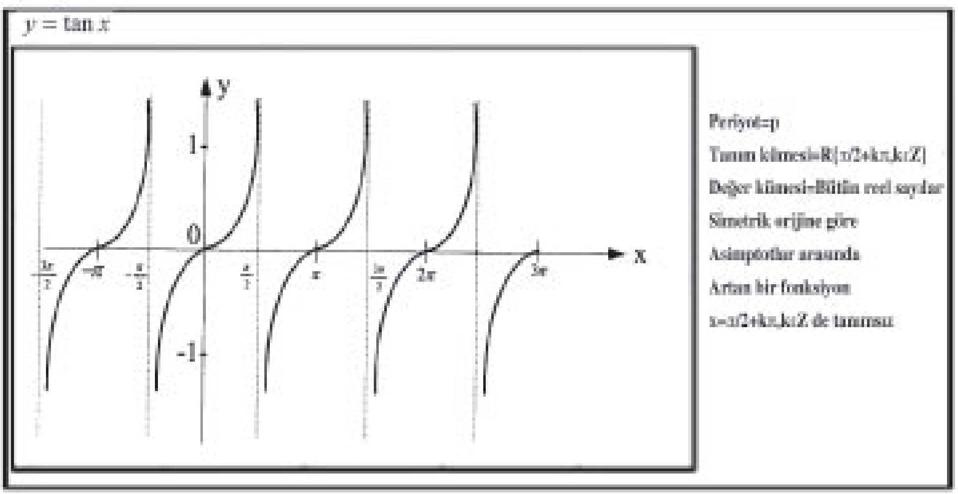
$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in Z$$

dikey asimptotlardır.

Asimptot

Asimptot; bir eğriye sonsuzda teğet olan bir başka eğri demektir.

Şimdi $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ aralığında $y = \tan x$ fonksiyonunun grafiğini (yani, iki asimptot arasındaki) çizmeye çalışalım. $\tan(-x) = -\tan x$ olduğundan, $[0, \frac{\pi}{2})$ aralığındaki grafiği çizmemiz $(-\frac{\pi}{2}, 0]$ aralığındaki grafiği çizmemize yardımcı olacaktır; çünkü $[0, \frac{\pi}{2})$ aralığında çizdiğimiz grafiği sıfır noktasına göre yansıtarak $(-\frac{\pi}{2}, 0]$ aralığındaki grafiği elde ederiz. Asimptotlar arasında aynı şekilde işlem yaparak diğer kısımları elde edebiliriz. Biliyoruz ki tanjant fonksiyonunun periyodu π dir.

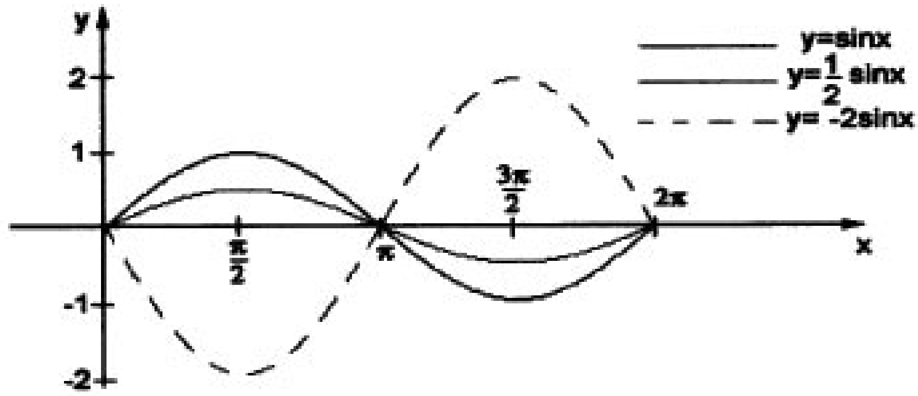


Trigonometrik fonksiyonların grafikleri çizilirken,

1. Fonksiyonun esas periyodu bulunur.
2. Bulunan periyoda uygun aralık çizilir.
3. Seçilen aralıkta fonksiyonun değişim tablosu düzenlenir.
4. Fonksiyonun grafiği çizilir.

ÖRNEK 25 ⇨ Denklemleri $y=\sin x$, $y=\frac{1}{2}\sin x$ ve $y=-2\sin x$ olarak verilen eğrilerin grafiklerini $0\le x\le 2\pi$ aralığında çiziniz ve grafikleri karşılaştırınız.

ÇÖZÜM ⇨



Dikkat edilirse denklemi $y=\frac{1}{2}\sin x$ olan eğrinin yüksekliği $\left|\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$ ve denklemi $y=-2\sin x$ olan eğrinin yüksekliği $|-2|=2$ dir. $y=-2\sin x$ denklemindeki negatif işaret $y=2\sin x$ grafiğinin x eksenine göre simetriğini veriyor. Görüldüğü üzere bütün denklemlerin periyotları 2π dir.

ALIŞTIRMA 17⇨ Denklemleri $y=\cos x$, $y=\frac{1}{3}\cos x$ ve $y=-3\cos x$ olarak verilen eğrilerin grafiklerini $\frac{-\pi}{2}\le x\le\frac{3\pi}{2}$ aralığında aynı analitik düzlemde çiziniz ve grafiklerini karşılaştırınız.

ÖRNEK 26 ⇨ Denklemleri $y=\sin x$, $y=\sin 2x$ ve $y=\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ olarak verilen eğrilerin grafiklerini merkezden başlamak üzere bir periyot için çiziniz ve grafikleri karşılaştırınız.

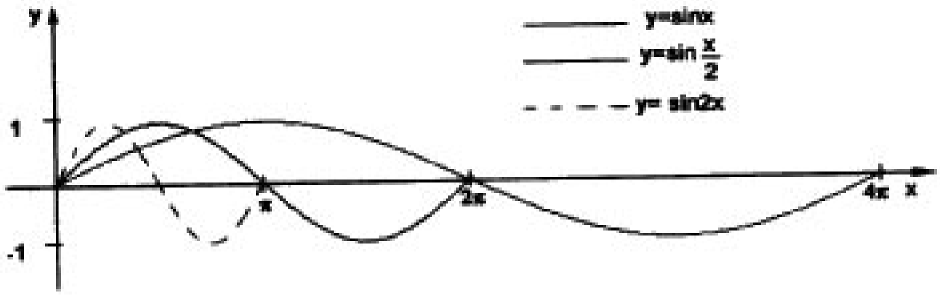
ÇÖZÜM ⇨ $y=\sin 2x$ fonksiyonunun periyodu nedir?

$$2p=2\pi\Rightarrow p=\frac{2\pi}{2}=\pi$$ ←($\sin x$ in periyodunun yarısı)

$y=\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ fonksiyonunun periyodu nedir?

$$\frac{p}{2}=2\pi\Rightarrow p=4\pi$$ ←($\sin x$ in periyodunun iki katıdır)

Verilen üç denklemin grafiği aşağıdaki şekilde gösterilmektedir.



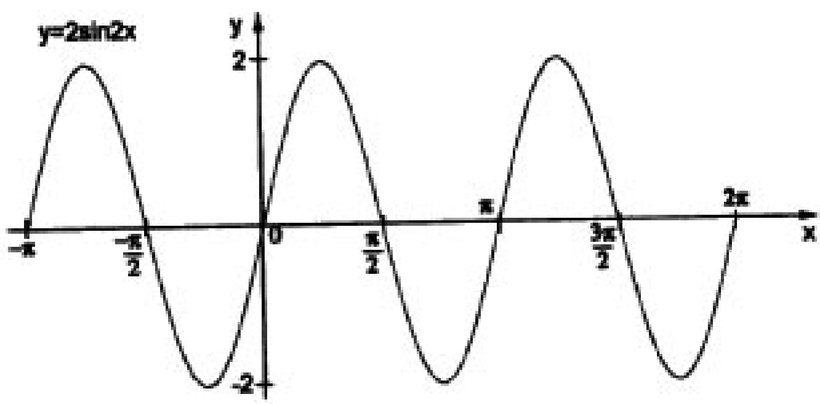
Grafiklerden görüldüğü üzere x in önündeki sayı sinüs eğrisinin periyodunu değiştirerek eğriyi sıkıştırmakta veya uzatmaktadır.

ALIŞTIRMA 18 ⇨ Denklemleri $y = \cos x$, $y = \cos 2x$ ve $y = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ olarak verilen eğrilerin grafiklerini merkezden başlamak üzere bir periyot için çiziniz ve grafikleri karşılaştırınız.

> $y = A\sin Bx$ veya $y = A\cos Bx$, $B > 0$ olmak üzere
>
> Yükseklik$=|A|$ Periyot$=\dfrac{2\pi}{B}$ dir.
>
> Eğer $0 < B < 1$ ise, $\sin x$ veya $\cos x$ eğrisi uzatılır.
>
> Eğer $B > 1$ ise, $\sin x$ veya $\cos x$ eğrisi sıkıştırılır.

ÖRNEK 29 ⇨ $y = 2\sin 2x$ denkleminin grafiğini $-\pi \le x \le 2\pi$ aralığında çiziniz.

ÇÖZÜM ⇨ Yükseklik$=|2| = 2$ Periyot$=\dfrac{2\pi}{2} = \pi$

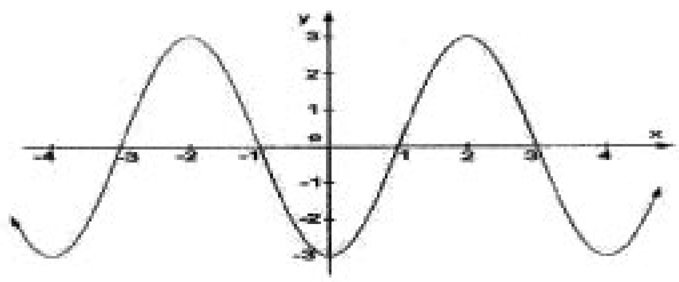


ALIŞTIRMA 19⇒ $y=-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ denkleminin grafiğini $-4\pi \le x \le 4\pi$ aralığında çiziniz.

ÖRNEK 30⇒ $y=-3\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ denkleminin grafiğini $-4 \le x \le 4$ aralığında çiziniz.

ÇÖZÜM ⇒ Yükseklik=$|-3|=3$ Periyot=$\frac{2\pi}{\pi/2}=4$

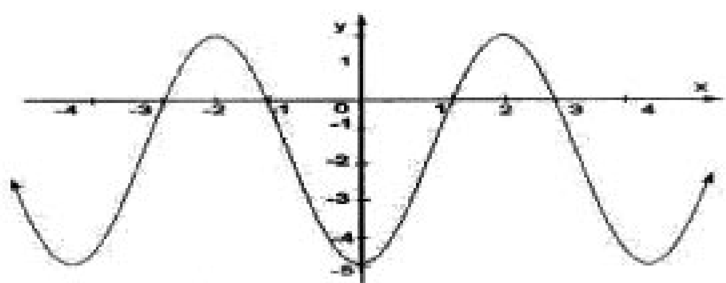
$y=-3\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ denkleminin grafiği $y=3\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ denkleminin grafiğinin x ekseninde yansıtılmış halidir. $[0,4]$ bir periyot aralığını dört eşit parçaya bölelim, en büyük ve en küçük noktaları ve x eksenini kesen noktaları x eksenine yerleştirelim. Bir periyot için grafiği çizelim ve daha sonra istenen aralığı elde edebilecek şekilde genişletelim.



ALIŞTIRMA 20⇒ $y=\frac{1}{4}\cos 2\pi x$ denkleminin grafiğini $-1 \le x \le 1$ aralığında çiziniz.

ÖRNEK 31 ⇒ $y=-2-3\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ denkleminin grafiğini $-4 \le x \le 4$ aralığında çiziniz.

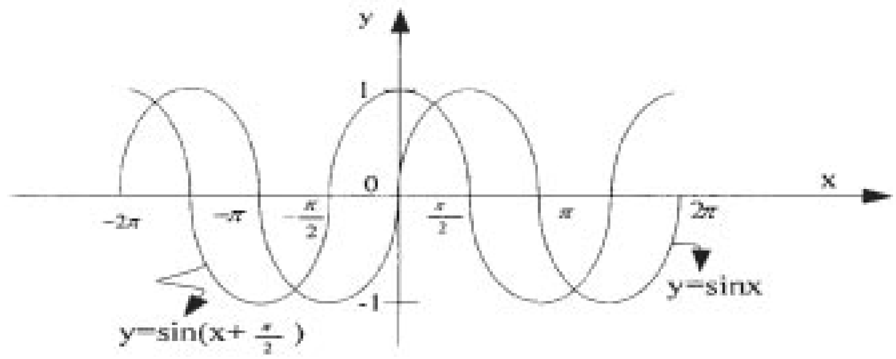
ÇÖZÜM ⇒ İlk önce $y=-3\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ denkleminin grafiğini önceki ÖRNEK teki gibi çizelim ve daha sonra bu grafiği $|-2|=2$ birim aşağıya çekelim.



ALIŞTIRMA 21 ➾ $y = 1 + \frac{1}{4}\cos 2\pi x$ denkleminin grafiğini $-1 \le x \le 1$ aralığında çiziniz.

ÖRNEK 32 ➾ $y = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ denkleminin grafiğini $-2\pi \le x \le 2\pi$ aralığında çiziniz.

ÇÖZÜM ➾



Görüldüğü üzere $y = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ denkleminin grafiği $y = \sin x$ denkleminin grafiğinin yatay şekilde sola doğru $\frac{\pi}{2}$ kaymış şeklidir. Her iki denklemin periyodu 2π dir.

ALIŞTIRMA 22 ➾ $y = \sin(x - \frac{\pi}{2})$ denkleminin grafiğini $-2\pi \le x \le 2\pi$ aralığında çiziniz.

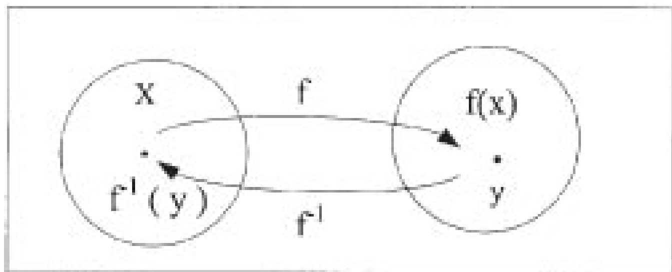
$y = A\sin(Bx + C)$ ve $y = A\cos(Bx + C)$ denklemlerinin özelikleri $B > 0$ için Yükseklik=$\lvert A \rvert$ Periyot=$\frac{2\pi}{B}$ Kayma=$\frac{-C}{B}$ dir.

◆ *TERS TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR*

Bir f fonksiyonunun tersinin olabilmesi için bu fonksiyonun hem bire bir, hem de örten olması gerektiğini biliyoruz. Şimdi ters fonksiyon konusunu kısaca hatırlatalım.

Ters Fonksiyonlar

f bire bir ve örten bir fonksiyon ve f^{-1} ters fonksiyon olmak üzere

1. Eğer (a,b) sıralı ikilileri f nin elemanı ise, o zaman (b,a) sıralı ikilileri f^{-1} in elemanıdır.
2. f nin görüntü kümesi = f^{-1} in tanım kümesi
   f nin tanım kümesi = f^{-1} in görüntü kümesi
3. 

4. Eğer $x = f^{-1}(y)$ ise, $y = f(x)$ tir.
5. $f[f^{-1}(y)] = y$, $\quad y \quad f^{-1}$ in tanım kümesi

   $f[f^{-1}(x)] = x$, $\quad x \quad f^{-1}$ nin tanım kümesi

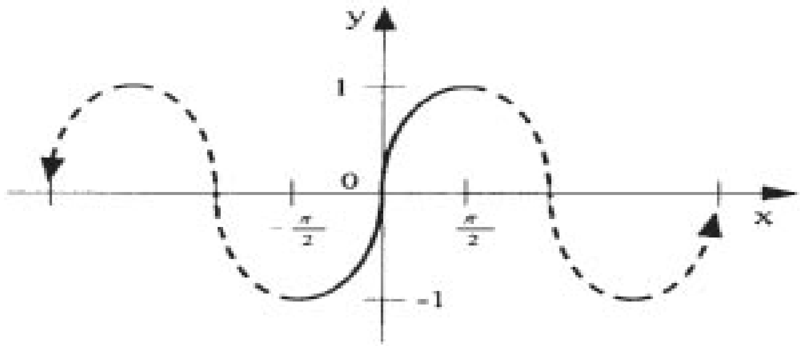
Bütün trigonometrik fonksiyonlar periyodiktir; bu yüzden, her görüntü kümesi elemanı sonsuz çoklukta tanım kümesi elemanı ile eşleşir. Sonuç olarak, trigonometrik fonksiyonlar bire bir ve örten değildir. Ancak trigonometrik fonksiyonların tanım kümelerinin uygun alt kümeleri seçilerek bire bir ve örten olması sağlanabilir. Bu tür aralıkları bularak; sinüs, kosinüs, tanjant ve kotanjant fonksiyonlarının ters fonksiyonlarını tanımlayalım.

Sinüs Fonksiyonunun Tersi (Arksinüs Fonksiyonu)

Sinüs fonksiyonunun tanım kümesi nasıl sınırlandırılmalıdır ki bire bir ve örten olsun? Bunu sonsuz farklı yolla yapabiliriz. Şekil 1.7 de görülmektedir ki sinüs fonksiyonunun tanım aralığı $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ olarak sınırlandırılırsa bu fonksiyon bire bir ve örten olur. Bu durumda,

$$f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1], \quad f(x) = \sin x$$

fonksiyonunun ters fonksiyonu vardır.



Şekil 1.7

Sinüs Fonksiyonunun Tersi

$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ sınırlı aralığındaki $y = \sin x$ fonksiyonunun tersi $\sin^{-1}$ veya arcsin simgelerinden birisiyle gösterilir.

$$y = \sin^{-1} x \quad \text{ve} \quad y = \arcsin x$$

fonksiyonu

$$\sin y = x$$

fonksiyonuna denktir.

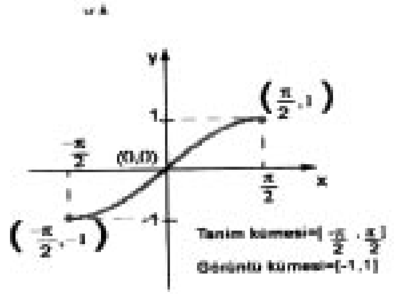
$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$$

$$\arcsin : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

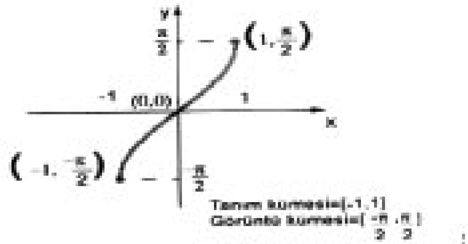
$y = \sin^{-1} x$ fonksiyonunun grafiğini çizmek için sınırlı aralıktaki sinüs fonksiyonunun noktalarının koordinatlarının yerleri değiştirilir. Örneğin, $(-\frac{\pi}{2}, -1)$, $(0,0)$ ve $(\frac{\pi}{2}, 1)$ noktaları sinüs fonksiyonunun noktaları ise $(-1, -\frac{\pi}{2})$, $(0, 0)$ ve $(1, \frac{\pi}{2})$ noktaları arksinüs fonksiyonunun noktalarıdır.

$f^{-1}(x) = \arcsin x$ fonksiyonunun değişim tablosu aşağıda ve grafiği şekil 1.9 da verilmektedir.

x	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
arcsinx	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$



Şekil 1.8 f(x) = sinx



Şekil 1.9 $f^{-1}(x) = \arcsin x$

arcsin fonksiyonunun grafiği ile aynı aralıktaki sin fonksiyonunun grafiğinin $y = x$ açıortay doğrusuna göre simetrik olduğunu yukarıdaki şekillerden görebiliyoruz.

ÖRNEK 33 ⇒ Aşağıdaki trigonometrik oranların değerlerini bulunuz.

(A) $\arcsin\dfrac{1}{2}$ (B) $\sin^{-1}(\sin 1{,}2)$ (C) $\cos(\sin^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2})$

ÇÖZÜM ⇒ (A) $\arcsin\dfrac{1}{2} = t \Rightarrow \sin t = \dfrac{1}{2}$ ve $\dfrac{-\pi}{2} \le t \le \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{6}$

(B) $\sin^{-1}(\sin 1{,}2) = 1{,}2$ ←($f^{-1}[f(x)] = x$ özdeşliğinden)

(C) $\sin^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = t \Rightarrow \sin t = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{3}$ olduğundan,

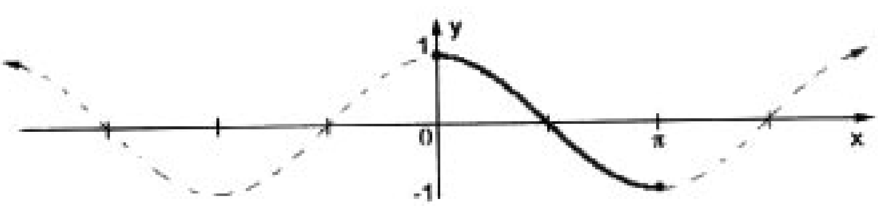
$\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$ dir.

ALIŞTIRMA 23⇒ Aşağıdaki trigonometrik oranların değerlerini bulunuz.

(A) $\arcsin(-\dfrac{1}{2})$ (B) $\sin^{-1}(\sin\dfrac{2}{3})$ (C) $\cos(\sin^{-1}\dfrac{2}{3})$

Ters Kosinüs Fonksiyonu (Arkkosinüs Fonksiyonu)

Kosinüs fonksiyonunun, birebir ve örten olduğu tanım aralıklarından bir tanesi aşağıdaki şekil 1.10 dan görüldüğü üzere $[0,\pi]$ dir.



Kosinüs Fonksiyonunun Tersi

$0 \le x \le \pi$ sınırlı aralığındaki $y = \cos x$ fonksiyonunun tersi $\cos^{-1}$ veya arccos simgelerinden birisiyle gösterilir.

$$y = \cos^{-1} x \text{ ve } y = arc\cos x$$

fonksiyonu $0 \le y \le \pi$, $-1 \le x \le 1$ olmak üzere

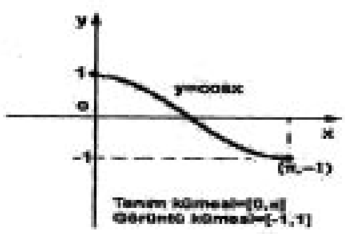
$$\cos y = x$$

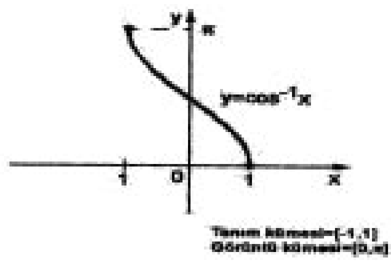
fonksiyonuna denktir.

$\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$
$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$

$f^{-1}(x) = \arccos x$ fonksiyonunun değişim tablosu, ve y = cosx ve $f^{-1}(x) = \arccos x$ in grafiği aşağıda şekil 1.11 de gösterilmektedir.

x	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
arccosx	π	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	0





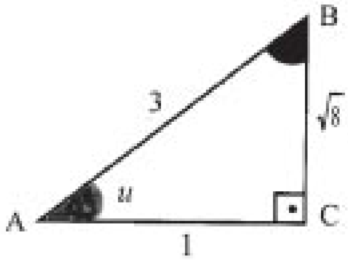
Şekil 1.11

ÖRNEK 34 ⇒ Aşağıdaki trigonometrik oranların değerlerini bulunuz.

(A) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (B) $\sin(\arccos\left(-\frac{1}{3}\right))$ (C) $\cos(\cos^{-1} 0{,}5)$

ÇÖZÜM ⇒ (A) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = t \Rightarrow \cos t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ve $0 \le t \le \pi \Rightarrow t = \frac{5\pi}{6}$

(B) $\sin(\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)) = y$ diyelim.



$\arccos\left(-\frac{1}{3}\right) = u \Leftrightarrow \cos u = -\frac{1}{3}$ olur. Bu eşitliği gösteren yandaki şekilden

$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad \leftarrow \text{(Pisagor Teoremi)}$$
$$b = \sqrt{3^2 - (-1)^2}$$
$$b = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

ve

$$\sin u = \frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ olur.}$$

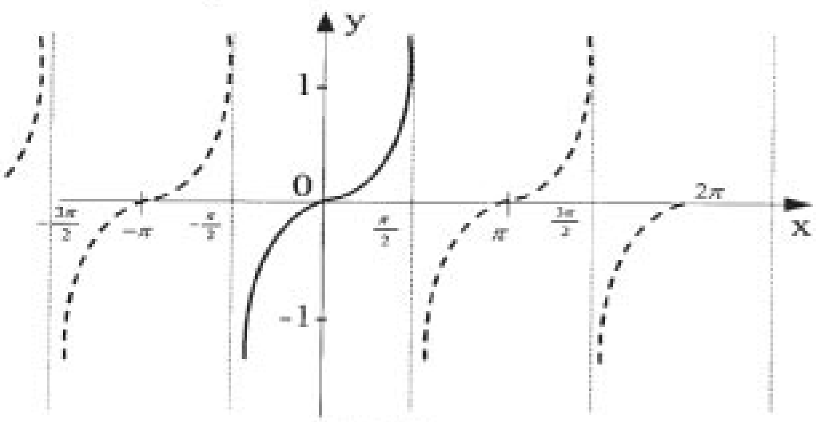
(C) $\cos(\cos^{-1} 0{,}5) = 0{,}5$ ← ($f[f^{-1}(x)] = x$ özdeşliğinden)

ALIŞTIRMA 24⇝ Aşağıdaki trigonometrik oranların değerlerini bulunuz.

(A) $\arccos\frac{1}{2}$ (B) $\sin(\arccos\frac{1}{2})$ (C) $\cos^{-1}(\cos 0,\ 5)$

Ters Tanjant Fonksiyonu (Arktanjant Fonksiyonu)

Tanjant fonksiyonunun esas periyodu π dir. Bu fonksiyon $\frac{\pi}{2}$ nin tek katları için tanımsızdır. O halde, tanjant fonksiyonunun bire bir ve örten olduğu tanım aralıklarından bir tanesi aşağıdaki şekilden görüldüğü üzere $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ dir.



Şekil 1.12

Tanjant Fonksiyonunun Tersi

$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ sınırlı aralığındaki $y = \tan x$ fonksiyonunun tersi $\tan^{-1}$ veya arctan simgelerinden birisiyle gösterilir.

$$y = \tan^{-1} x \text{ ve } y = \arctan x$$

fonksiyonu $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ ve $x \in R$ olmak üzere

$$\tan y = x$$

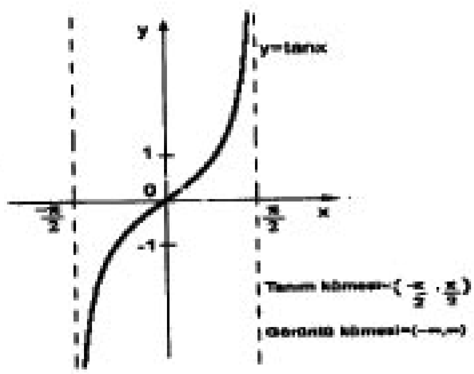
fonksiyonuna denktir.

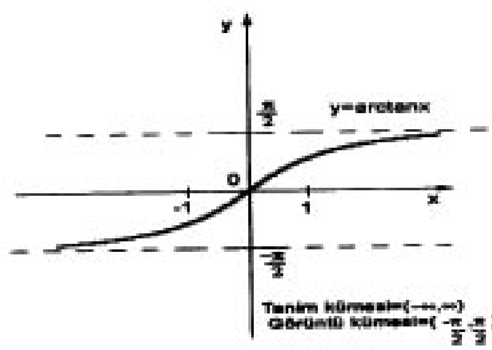
$$\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow R$$

$$\arctan : R \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$y = \arctan x$ fonksiyonunun değişim tablosu ve $y = \tan x$ ile $y = \arctan x$ grafiği şekil 1.13 te verilmektedir.

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
arctanx	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$





Şekil 1.13

ÖRNEK 35 ⇒ Aşağıdaki trigonometrik oranların değerlerini bulunuz.

(A) $\tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ (B) $\tan(\tan^{-1} 0{,}63)$ (C) $\csc[\tan^{-1}(-1)]$

ÇÖZÜM ⇒(A) $\tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=y \Rightarrow \tan y = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan y = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ise $y = -\frac{\pi}{6}$ dır.

(B) $\tan(\tan^{-1} 0{,}63) = 0{,}63$ ←($f[f^{-1}(x)] = x$ özdeşliğinden)

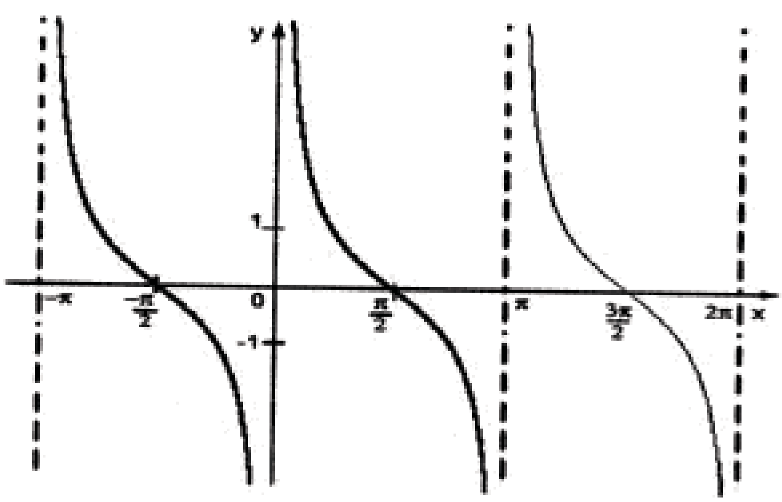
(C) $\csc\left[\tan^{-1}(-1)\right] = \csc\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\frac{-\sqrt{2}}{2}} = \frac{-2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$

ALIŞTIRMA 25 ⇒ Aşağıdaki trigonometrik oranların değerlerini bulunuz.

(A) $\arctan(-\sqrt{3})$ (B) $\tan(\tan^{-1} 43)$ (C) $\cos\left[\tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]$

Kotanjant Fonksiyonunun Tersi (Arkkotanjant Fonksiyonu)

Kotanjant fonksiyonunun esas periyodu π dir. Bu fonksiyon $k \in Z$ olmak üzere $k\pi$ değerleri için tanımsızdır. O halde kotanjant fonksiyonunun birebir ve örten olduğu tanım aralıklarından bir tanesi aşağıdaki şekilden görüldüğü gibi (θ, π) dir



Şekil 1.14 y = cotx

Kotanjant Fonksiyonunun Tersi

$0 < x < \pi$ sınırlı aralığındaki $y = \cot x$ fonksiyonunun tersi $\cot^{-1}$ veya arc cot simgelerinden birisiyle gösterilir.

$$y = \cot^{-1} x \text{ ve } y = arc\cot x$$

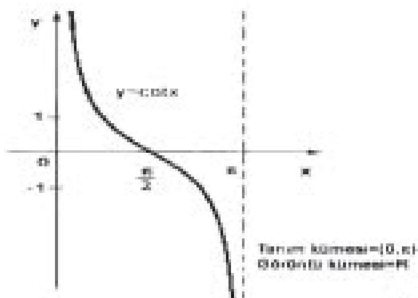
fonksiyonu $0 < y < \pi$ ve $x \in R$ olmak üzere

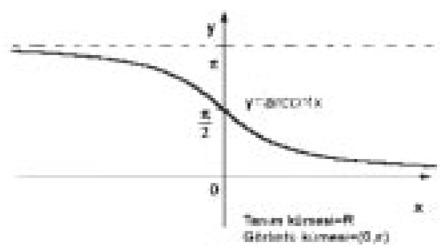
$$\cot y = x$$

fonksiyonuna denktir.

$$\cot : (0,\pi) \to R$$
$$\text{arccot}: R \to (0,\pi)$$

$y = \cot x$ ve $y = arc\cot x$ fonksiyonlarının grafiği şekil 1.15 de verilmektedir.





Şekil 1.15

ÖRNEK 36 ⇨ Aşağıdaki trigonometrik oranların değerlerini bulunuz.

(A) $\cot^{-1}\left(\sqrt{3}\right)$ (B) $\cos\left(\cot^{-1}(1)\right)$

ÇÖZÜM ⇨ (A) $\cot^{-1}\left(\sqrt{3}\right) = y \Rightarrow \cot y = \sqrt{3}$

$$0 < y < \pi \Rightarrow \cot y = \sqrt{3} \text{ ise } y = \frac{\pi}{6}$$

(B) $\cos\left(\cot^{-1}(1)\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

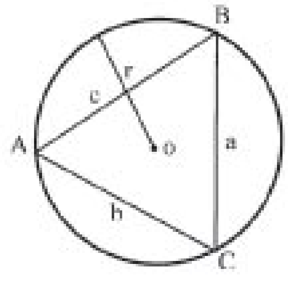
$$\cot^{-1}(1) = u \Rightarrow \cot u = 1 \Rightarrow u = \frac{\pi}{4}$$

ALIŞTIRMA 26 ⇨ Aşağıdaki trigonometrik oranların değerlerini bulunuz.

(A) $\cot^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)$ (B) $\cos\left(\cot^{-1}(-1)\right)$

◆ *SİNÜS, KOSİNÜS ve TANJANT TEOREMLERİ*

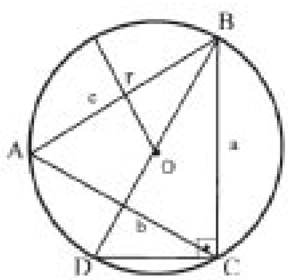
Sinüs Teoremi



Çevrel çemberinin yarıçapı r birim, kenarlarının uzunlukları a, b, c birim, açılarının ölçüleri A, B, C olan ABC üçgeninde,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2r \text{ dir.}$$

İspat:



ABC üçgeninin çevrel çemberinin, D noktasından geçen $[BD]$ çapını çizelim :

$|BD| = 2r$ birimdir.

Çapı gören çevre açının ölçüsü 90° olduğundan, $m(\widehat{BCD}) = 90°$ dir.

Bir çemberde, aynı yayı gören çevre açılarının ölçüleri eşit olduğundan, $m(\hat{D}) = D$, $m(\hat{A}) = A$ ise, $D = A$ dır.

BCD dik üçgeninde,

$$\sin D = \frac{|BC|}{|BD|} \Rightarrow \sin D = \frac{a}{2r}$$

$$\Rightarrow \sin A = \frac{a}{2r} \qquad \leftarrow (m(\hat{D}) = m(\hat{A}))$$

$$\Rightarrow 2r = \frac{a}{\sin A}$$

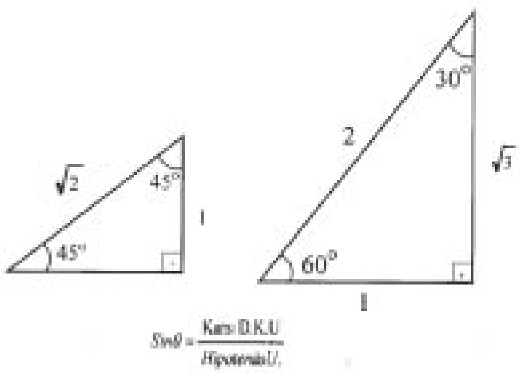
ALIŞTIRMA 27➪ Çevrel çemberinin yarıçapı r birim, kenarlarının uzunlukları a, b, c birim, açılarının ölçüleri A, B, C olan ABC üçgeninde $2r = \dfrac{b}{\sin B}$ olduğunu da benzer şekilde siz gösteriniz.

I. Açılarının ölçüleri ve çevrel çemberinin yarıçapı verilen üçgenin, kenarlarının uzunluklarını hesaplamada *sinüs teoreminden*, yararlanırız.

ÖRNEK 37 ⇒ Bir ABC üçgeninde, $c = 4$ cm , $m(\hat{C}) = 30°$, $m(\hat{B}) = 45°$ olduğuna göre, b kaç cm dir ?

ÇÖZÜM ⇒ Sinüs teoremine göre,

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{b}{\sin 45°} = \frac{4}{\sin 30°} \quad \leftarrow \left(\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \; ; \sin 30° = \frac{1}{2} \right)$$



$$\Rightarrow \frac{b}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4}{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow b \cdot \frac{1}{2} = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{b}{2} = 2 \cdot \sqrt{2} \quad \leftarrow \text{(Sadeleştirme)}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \frac{b}{2} = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2}$$

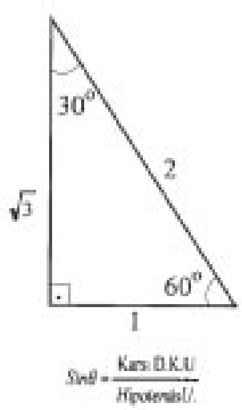
$$\Rightarrow b = 4\sqrt{2} \text{ cm}$$

ALIŞTIRMA 28 ⇒ ABC üçgeninde $a = 8$ cm , $m(\hat{A}) = 45°$, $m(\hat{C}) = 75°$ ise, c kaç cm dir?

II. Çevrel çemberinin yarıçapı ve kenarlarının uzunlukları verilen üçgenin, açılarının ölçülerini hesaplamada *sinüs teoreminden*, yararlanırız.

ÖRNEK 38 ⇒ ABC üçgeninde $c = 4$ cm, $m(\hat{A}) = 30°$, $a = 2$ cm ise $m(\hat{C})$ neye eşittir?

ÇÖZÜM ⇒ Sinüs teoremine göre,



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{2}{\sin 30°} = \frac{4}{\sin C}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \sin C = 4 \cdot \sin 30°$$

$$\Rightarrow \sin C = \frac{4}{2} \cdot \sin 30°$$

$$\Rightarrow \sin C = 2 \cdot \sin 30°$$

$$\Rightarrow \sin C = 2 \cdot \frac{1}{2}$$

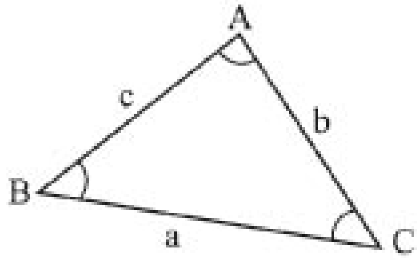
$$\Rightarrow \sin C = 1$$

$$\Rightarrow m(\hat{C}) = 90° \text{ dir.}$$

ALIŞTIRMA 29 ➾ ABC üçgeninde $a = 10\sqrt{2}$ cm, $m(\hat{C}) = \frac{\pi}{3}$, $c = 5\sqrt{6}$ cm olduğuna göre $m(\hat{A})$ neye eşittir?

Kosinüs Teoremi

ABC üçgeninde $m(\hat{A}) = A$, $m(\hat{B}) = B$, $m(\hat{C}) = C$, $|BC| = a$ birim, $|AC| = b$ birim, $|AB| = c$ birim ise,



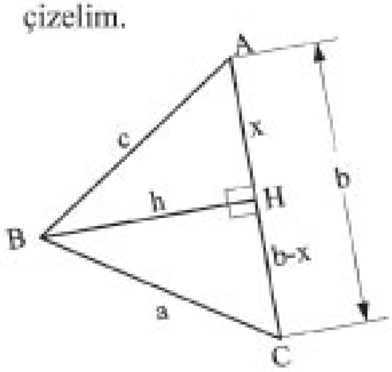
$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A$,

$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos B$,

$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos C$ dir.

İspat:

$m(\hat{A}) < 90°$ olan ABC üçgeninin, $[AC]$ kenarına ait $[BH]$ yüksekliğini çizelim.



$|BH| = h$ birim, $|AH| = x$ birim olsun.

$|HC| = b - x$ birimdir.

$|BC| = a$ birim, $|AC| = b$ birim,
$|AB| = c$ birim,

BHC dik üçgeninde, Pisagor teoremine göre,

$|BC|^2 = |BH|^2 + |HC|^2 \Rightarrow a^2 = h^2 + (b - x)^2$

$\Rightarrow a^2 = h^2 + b^2 - 2 \cdot b \cdot x + x^2$

$\Rightarrow a^2 = b^2 + h^2 + x^2 - 2 \cdot b \cdot x$........(*)

$\leftarrow ((y - z)^2 = y^2 - 2yz + z^2)$

AHB dik üçgeninde , Pisagor teoremine göre ,

$$|AB|^2 = |BH|^2 + |AH|^2 \Rightarrow |AB|^2 = h^2 + x^2$$

$$\Rightarrow c^2 = h^2 + x^2 \ldots\ldots..(**)$$

AHB dik üçgeninde,

$$\cos A = \frac{|AH|}{|AB|} \Rightarrow \cos A = \frac{x}{c}$$

$$\Rightarrow x = c \cdot \cos A \ldots\ldots..(***)$$

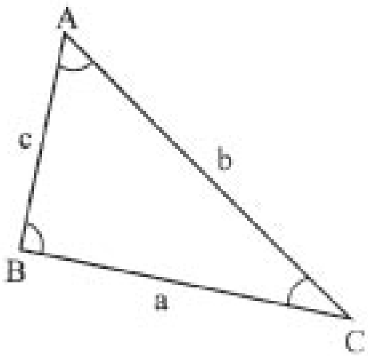
$(*)$, $(**)$ ve $(***)$ e göre,

$$a^2 = b^2 + h^2 + x^2 - 2 \cdot b \cdot x$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A \text{ dır.}$$

ALIŞTIRMA 30⇨ ABC üçgeninde $m(\hat{A}) = A$, $m(\hat{B}) = B$, $m(\hat{C}) = C$, $|BC| = a$ birim, $|AC| = b$ birim, $|AB| = c$ birim ise, $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos B$ olduğunu ispatlayınız.

ABC üçgeninde kosinüs teoremine göre;



$$\left.\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos C \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c} \\ \cos B &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c} \\ \cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b} \end{aligned}$$

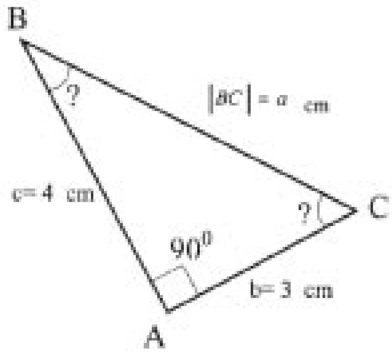
I. İki kenarı ile bu iki kenarın belirttiği açısı verilen üçgenin, üçüncü kenarının uzunluğunu hesaplamada kosinüs teoreminden yararlanırız.

ÖRNEK 39 ⇨ ABC üçgeninde $m(\hat{A}) = 90°$, $b = 3$ cm , $c = 4$ cm olduğuna göre $|BC|$ uzunluğunu, $m(\hat{B})$ ve $m(\hat{C})$ değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ $|BC| = a$ cm olsun.

Kosinüs teoremine göre,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A \Rightarrow a^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos 90°$$



$$\Rightarrow a^2 = 9 + 16 - 24 \cdot 0$$

$$\Rightarrow a^2 = 9 + 16$$

$$\Rightarrow a^2 = 25$$

$$\Rightarrow a = \pm 5$$

$\Rightarrow a = 5$ cm ← (a uzunluk olduğu için negatif olamaz.)

Kosinüsü 0,6 olan açının ölçüsünü trigonometrik değerler tablosundan yararlanarak bulacağız.

Kosinüs sütununa yukarıdan aşağı bakıldığında 0,6 değerinin olmadığı görülmektedir. Daha sonra kosinüs sütununa aşağıdan yukarı bakıldığında da 0,6 değerinin olmadığı görülmektedir. Son olarak 0,6 değerine en yakın değeri belirlemek amacıyla kosinüs sütunlarına hem yukarıdan aşağı, hem de aşağıdan yukarı bakıldığında bu değerin 53° ile 54° arasında olduğu görülmektedir.

$\cos 53° = 0{,}6018$

$$\Rightarrow \begin{array}{ccccc} 0{,}5878 & < & 0{,}6 & < & 0{,}6018 \\ \uparrow & & \updownarrow & & \uparrow \\ \cos 54° & & ? & & \cos 53° \end{array}$$

$\cos 54° = 0{,}5878$

O halde , $53° < B < 54°$ dir.

$\cos 53° - \cos 54° = 0{,}6018 - 0{,}5878 = 0{,}014$ azalma için $1° = 60'$ artma olduğundan, $\cos 53° - 0{,}6 = 0{,}6018 - 0{,}6 = 0{,}0018$ azalma için, açı ölçüsünde ne kadar artma olacağını bulmak için orantıdan yararlanalım:

$$\begin{array}{ll} 60' \text{ için} & 0{,}014 \text{ azalma} \\ & \times \\ ? & 0{,}0018 \text{ azalma} \\ \hline \end{array}$$

$$? = \frac{60' \cdot 0{,}0018}{0{,}014} = \frac{0{,}108}{0{,}014} \approx (7{,}714)' \approx 8' \text{ artma olur.}$$

Buna göre , $m(\hat{B}) = 53°\,8'$ dir.

$m(\hat{A}) = 90°$ ve $m(\hat{B}) = 53°\,8'$ ise,

$m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180°$ dir. ←(Bir üçgenin iç açılarının ölçülerinin toplamı 180° dir.)

$$\begin{aligned} m(\hat{C}) &= 180° - [\, m(\hat{A}) + m(\hat{B}) \,] \\ &= 180° - (90° + 53°\,8') \\ &= 180° - 90° - 53°\,8' \\ &= 90° - 53°\,8' \quad \text{dır.} \end{aligned}$$

90° den 53° 8′ yı çıkaralım:

$$\begin{array}{rr} 90° & 0' \\ -\ 53° & 8' \\ \hline \end{array}$$

$89° \quad 60'$ ←(90° den 1° =60′ alıp 0′ ya ekleyeceğiz.)

$$\begin{array}{rr} 89° & 60' \\ -\ 53° & 8' \\ \hline 36° & 52' \end{array}$$

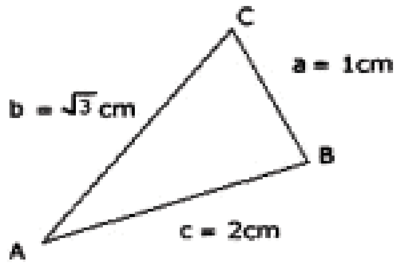
O halde,

$m(\hat{C}) = 36°\,52'$ dır.

II. Kosinüs teoreminden, üç kenarı verilen üçgenin açılarının ölçülerini hesaplamada yararlanırız.

ÖRNEK 40 ⇨ Kenarlarının uzunlukları $|BC| = 1$ cm, $|AC| = \sqrt{3}$ cm, $|AB| = 2$ cm olan ABC üçgeninin, A açısının ölçüsünü bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ Bu soruyu çözmek için kosinüs teoreminden yararlanacağız.



$a = |BC| = 1\,\text{cm}$

$b = |AC| = \sqrt{3}$ cm

$c = |AB| = 2$ cm

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A \Rightarrow 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A = b^2 + c^2 - a^2$$

← (Eşitliğin her iki tarafına $-a^2 + 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A$ yazıldı.)

$$\Rightarrow \frac{2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A}{2 \cdot b \cdot c} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}$$ ←(Sadeleştirme)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A \Rightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}$$

$$\cos A = \frac{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 2^2 - 1^2}{2 \cdot \sqrt{3}.2}$$

$$= \frac{3 + 4 - 1}{4\sqrt{3}}$$

$$= \frac{6}{4\sqrt{3}}$$

$$= \frac{6\sqrt{3}}{4\left(\sqrt{3}\right)^2}$$ ← (Paydayı kökten kurtarma)

$$= \frac{6\sqrt{3}}{4 \cdot 3}$$ ←($\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$)

$$= \frac{6\sqrt{3}}{12}$$ ← (Sadeleştirme yapmak için pay ve paydayı 6 ya bölme)

$$\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A = 30°$$

ALIŞTIRMA 3 ⇒ Kenarlarının uzunlukları $|BC| = 1$ cm , $|AC| = \sqrt{3}$ cm , $|AB| = 2$ cm olan ABC üçgeninin B ve C açılarının ölçülerini bulunuz.

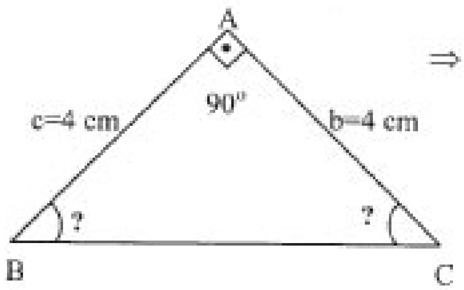
Tanjant Teoremi

Bir ABC üçgeninin kenar uzunlukları $|BC| = a$ birim , $|AC| = b$ birim, $|AB| = c$ birim ve açılarının ölçüleri $m(\hat{A}) = A$, $m(\hat{B}) = B$, $m(\hat{C}) = C$ ve $b > c$ ise,

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{\tan\frac{B+C}{2}}{\tan\frac{B-C}{2}} \quad \text{veya} \quad \frac{b-c}{b+c} = \frac{\tan\frac{B-C}{2}}{\tan\frac{B+C}{2}} \text{ dir.}$$

ÖRNEK 41 ⇒ $m(\hat{A}) = 90°$ olan ABC dik üçgeninde $|AC| = 4$ cm, $|AB| = 4$ cm olduğuna göre, $m(\hat{B})$ ve $m(\hat{C})$ nin kaç derece olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM ⇒ $m(\hat{A}) = 90° \Rightarrow m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 90°$ $\leftarrow (A+B+C=180°)$



$$\Rightarrow B + C = 90° \ldots (*)$$

$$|AC| = b = 4\,cm$$

$$|AB| = c = 4\,cm$$

B ve C açılarının ölçülerini bulmak için *tanjant teoreminden* yararlanacağız.

Elimizdeki verileri uygun yerlere yazalım:

$$\frac{\tan\frac{B-C}{2}}{\tan\frac{B+C}{2}} = \frac{b-c}{b+c} \Rightarrow \frac{\tan\frac{B-C}{2}}{\tan\frac{90°}{2}} = \frac{4-4}{4+4}$$

$$\Rightarrow \frac{\tan\frac{B-C}{2}}{\tan 45°} = \frac{0}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{\tan\frac{B-C}{2}}{\tan 45°} = 0$$

$$\Rightarrow \tan\frac{B-C}{2} = 0.\tan 45^\circ$$
$$\Rightarrow \tan\frac{B-C}{2} = 0$$
$$\Rightarrow \frac{B-C}{2} = 0 \qquad \leftarrow (\tan 0^\circ = 0)$$
$$\Rightarrow B-C = 2\cdot 0 \ldots\ldots..(**)$$
$$\Rightarrow B-C = 0$$

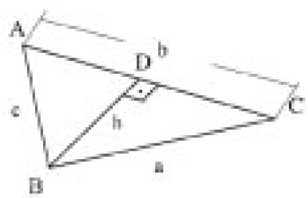
(*) ve (**) dan,

$$\begin{array}{r} B+C=90^\circ \\ +\ B-C=0 \\ \hline 2B=90^\circ \end{array} \qquad \leftarrow\text{(Sadeleştirme)}$$
$$\frac{2B}{2}=\frac{90^\circ}{2}$$
$$B=45^\circ \text{ dir.}$$

$$B+C=90^\circ \Rightarrow 45^\circ + C = 90^\circ$$
$$\Rightarrow C = 90^\circ - 45^\circ$$
$$\Rightarrow C = 45^\circ \text{ dir.}$$

◆*ÜÇGENİN ALANININ HESAPLANMASI*

Üçgenin Alanı –I



ABC üçgeninde ;

$|AC| = b$ birim, $|AB| = c$ birim, $|BC| = a$ birim, $m(\hat{A}) = A$, $m(\hat{B}) = B$, $m(\hat{C}) = C$ olsun.

ABC üçgeninin alanı,

$$S = \frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot \sin A\,,\ S = \frac{1}{2}\cdot a\,.\,c.\,\sin B\,,\ S = \frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot \sin C \quad \text{dir.}$$

İspat :

ABC üçgeninin alanının , $S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin A$ olduğunu gösterelim :
ABC üçgeninin, $[AC]$ kenarına ait yüksekliği $[BD]$ ise, alanı

$$S = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD| \text{ dir.}$$

ABD dik üçgeninde,

$$\sin A = \frac{|BD|}{|AB|} \text{ olduğundan,}$$

$$|BD| = |AB| \cdot \sin A \text{ dır.}$$

Buna göre, ABC üçgeninin alanı,

$$S = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD| = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |AB| \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin A \text{ dır.}$$

ALIŞTIRMA 32 ⇨ Yukarıdaki verileri kullanarak ABC üçgeninin alanının, $S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin B$ olduğunu gösteriniz.

ÖRNEK 42 ⇨ ABC üçgeninde $a = 9$ cm, $b = 4$ cm ve $m(\hat{C}) = 30°$ olduğuna göre, ABC üçgeninin alanını bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ ABC üçgeninin alanını bulurken, $S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin C$ yi kullanacağız.

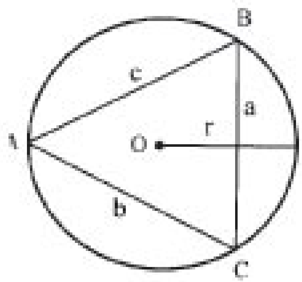
$a = 9$, $b = 4$, $C = 30°$ ise,

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin C \Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 4 \cdot \sin 30° = \frac{36}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{36}{4} = 9 \ cm^2 \text{ dir.}$$

ALIŞTIRMA 33 ⇨ABC üçgeninde $b = 3$ cm, $c = 4$ cm ve $m(\hat{A}) = 60°$ olduğuna göre, ABC üçgeninin alanını bulunuz.

Üçgenin Alanı - II

Kenarlarının uzunlukları $a\ ,b,c$ birim, çevrel çemberinin yarıçapı r birim olan üçgenin alanının $S=\frac{a\cdot b\cdot c}{4r}$ olduğunu gösterelim:



ABC üçgeninin alanı, $S=\frac{1}{2}a\cdot b\cdot \sin C$ dir.

Sinüs teoremine göre,

$$2r=\frac{c}{\sin C}\Rightarrow 2r\cdot \sin C=c$$
$$\Rightarrow \sin C=\frac{c}{2r}$$

olduğundan,

ABC üçgeninin alanı,

$$S=\frac{1}{2}a\cdot b\cdot \sin C=\frac{1}{2}a\cdot b\cdot \frac{c}{2r}=\frac{a\cdot b\cdot c}{4r}$$ olur.

ÖRNEK 43 ⇨ ABC üçgeninde $a=3cm$, $b=4cm$, $c=5cm$ dir. ABC üçgeninin alanı 6 cm^2 olduğuna göre çevrel çemberinin yarıçapını bulalım.

ÇÖZÜM ⇨ ABC üçgeninin alanı

$$S=\frac{a\cdot b\cdot c}{4r}$$

den bulunur.

$a=3cm$, $b=4cm$, $c=5cm$, $S=6\text{cm}^2$ olduğuna göre

$$6=\frac{3\cdot 4\cdot 5}{4r} \quad \Rightarrow 6\cdot 4r=60$$
$$\Rightarrow 24r=60 \qquad \leftarrow\text{(Sadeleştirme)}$$
$$\Rightarrow \frac{24\,r}{24}=\frac{60}{24}$$
$$\Rightarrow r=2{,}5 \text{ cm dir.}$$

ALIŞTIRMA 34 ⇨ ABC üçgeninin kenar uzunlukları 9 cm, 12cm, 15cm ve alanı 54 cm^2 olduğuna göre ABC üçgeninin çevrel çemberinin yarıçapını bulunuz.

Üçgenin Alanı - III

Kenarlarının uzunlukları a, b, c birim, çevresinin uzunluğu, $a+b+c=2u$ birim olan ABC üçgeninin alanı,

$$S=\sqrt{u\cdot(u-a)\cdot(u-b)\cdot(u-c)} \text{ dir.}$$

ÖRNEK 44 ⇨ Kenarlarının uzunlukları $a=|BC|=7\,\text{cm}$, $b=|AC|=4\,\text{cm}$, $c=|AB|=5\ \text{cm}$ olan ABC üçgeninin alanını hesaplayınız.

ÇÖZÜM ⇨ ABC üçgeninin alanını bulmak için,

$$S=\sqrt{u.(u-a)\cdot(u-b)\cdot(u-c)} \text{ den yararlanacağız.}$$

Bunun için u yu bulmamız gerekmektedir.

$a=7$ cm , $b=4$ cm ve $c=5$ cm dir.

$$a+b+c=2u \Rightarrow 7+4+5=2u$$

$$\Rightarrow 16=2u$$

$$\Rightarrow 2u=16$$

$$\Rightarrow \frac{2u}{2}=\frac{16}{2}$$

$$\Rightarrow u=8\ \text{cm}$$

O halde,

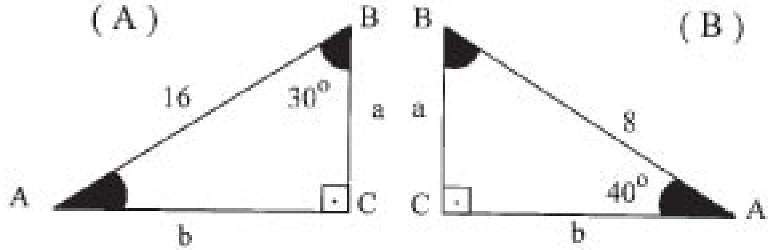
$$S=\sqrt{u\cdot(u-a)\cdot(u-b)\cdot(u-c)}=\sqrt{8\cdot(8-7)\cdot(8-4)\cdot(8-5)}$$

$$=\sqrt{8\cdot 1\cdot 4\cdot 3}$$
$$=\sqrt{96}$$
$$\approx 9{,}8\ \text{cm}^2 \text{ dir.}$$

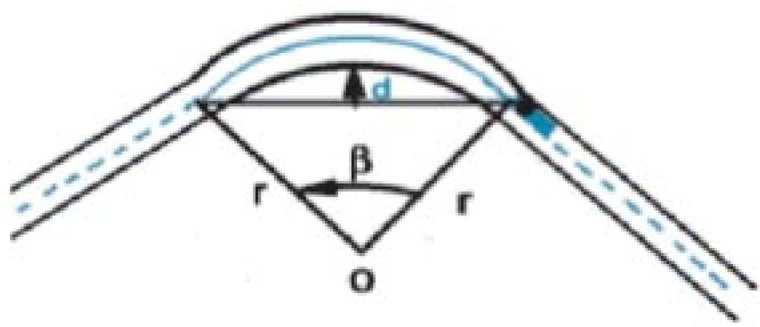
ALIŞTIRMA 35 ⇨ Bir çocuk parkında kenar uzunlukları $4m$, $10m$ ve $8m$ olan üçgensel bir alan çimlendirilecektir. Bu alanın ne kadar olduğunu hesaplayınız.

ARAŞTIRMALAR

1- Dik üçgenlerde bilinmeyen kenar uzunluklarını bulunuz.



2- Bir otomobil yarıçapı r olan bir viraj boyunca giderken viraj içindeki ağaçlar ve evler sürücünün görüşünü engelleyebilir. S mesafesinde güvenli bir şekilde durabilmek için viraj içinde boş olması gereken en kısa mesafe $d = r(1-\cos\frac{\beta}{2})$ olarak veriliyor. Burada β radyan olarak $\beta = \frac{S}{r}$ dir. (Kaynak: F. Mannering)



(A) Saatte 60 km hızla, S=390 feet. Eğer r=600 feet ise, yaklaşık d yi bulunuz. (1 foot = 30,48 cm)
(B) Saatte 90 km hızla, S=620 feet. Aynı viraj için yaklaşık d yi bulunuz.
(C) Hız sınırı viraj içinde boş olması gereken toprak miktarını nasıl etkilemektedir?

3) Kenarlarının uzunlukları a, b, c birim, çevresinin uzunluğu $a+b+c=2u$ birim olan ABC üçgeninin alanının,

$S = \sqrt{u\cdot(u-a)\cdot(u-b)\cdot(u-c)}$ olduğunu gösteriniz.

4) Tanjant teoremini ispatlayınız.

BÖLÜMÜN ÖZETİ

Aşağıdaki tablo dik üçgen trigonometrisinin bazı özeliklerini özetlemektedir.

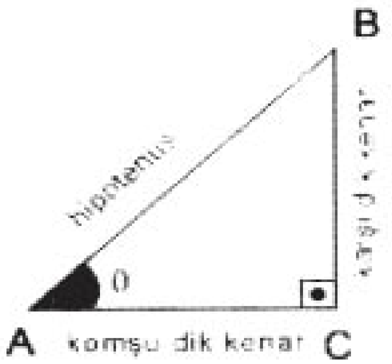
Dik Üçgen Trigonometrisi

θ, ABC dik üçgeninde bir dar açı olsun.

$$\sin\theta = \frac{\text{Karşı dik kenar uzunluğu}}{\text{Hipotenüs uzunluğu}} \qquad \cos\theta = \frac{\text{Komşu dik kenar uzunluğu}}{\text{Hipotenüs uzunluğu}}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{Karşı dik kenar uzunluğu}}{\text{Komşu dik kenar uzunluğu}} \qquad \cot\theta = \frac{\text{Komşu dik kenar uzunluğu}}{\text{Karşı dik kenar uzunluğu}}$$

$$\sec\theta = \frac{\text{Hipotenüs uzunluğu}}{\text{Komşu dik kenar uzunluğu}} \qquad \csc\theta = \frac{\text{Hipotenüs uzunluğu}}{\text{Karşı dik kenar uzunluğu}}$$

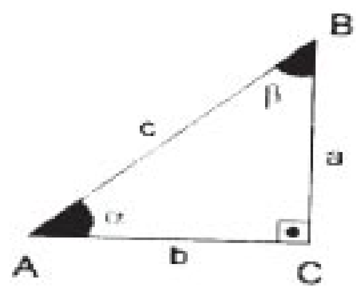


α ve β tümler açılar olsun.

$\sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha) = \cos\beta$

$\tan\alpha = \cot(90^\circ - \alpha) = \cot\beta$

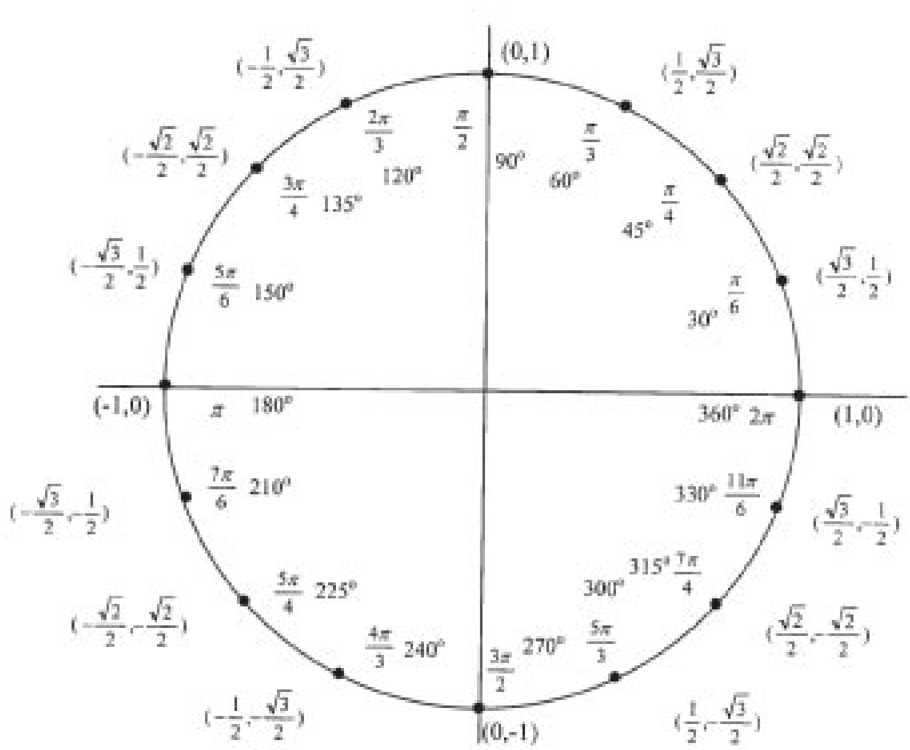
$\sec\alpha = \csc(90^\circ - \alpha) = \csc\beta$



sin, cos, tan, cot, sec ve csc olmak üzere altı tane trigonometrik fonksiyon bulunmaktadır. Her trigonometrik fonksiyonun, tanım kümesi, görüntü kümesi ve periyodu takip eden tabloda özetlenmektedir. Bu tabloda n bir tamsayı ve t bir reel sayıdır.

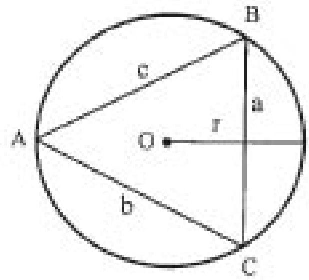
Fonksiyon	Tanım Kümesi	Görüntü Kümesi	Periyot
$\sin t$	$-\infty < t < \infty$	$-1 \le \sin t \le 1$	2π
$\cos t$	$-\infty < t < \infty$	$-1 \le \cos t \le 1$	2π
$\tan t$	$t \ne \pi/2 + \pi n$	$-\infty < \tan t < \infty$	π
$\cot t$	$t \ne \pi n$	$-\infty < \cot t < \infty$	π
$\sec t$	$t \ne \pi/2 + \pi n$	$\lvert \sec t \rvert \ge 1$	2π
$\csc t$	$t \ne n\pi$	$\lvert \csc t \rvert \ge 1$	2π

Aşağıdaki şekil belli açıların trigonometrik fonksiyonlarını bulmak için kullanılabilir. Örneğin, eğer $\theta = 135°$ veya $\frac{3\pi}{4}$ radyan ise açının bitim kenarı çemberi $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ noktasında keser. Böylece $\cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ dir. Diğer trigonometrik fonksiyonlar aynı şekilde bulunabilir.



Birim çember ve Özel açılar

Sinüs Teoremi:

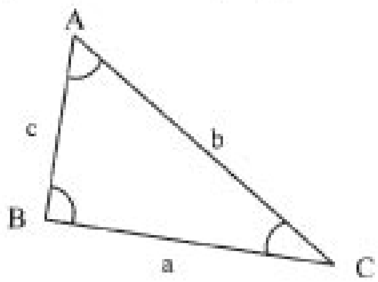


Çevrel çemberinin yarıçapı r birim, kenarlarının uzunlukları a, b, c, birim, açılarının ölçüleri A, B, C olan ABC üçgeninde

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2\cdot r$$

Kosinüs Teoremi:

ABC üçgeninde $m(\hat{A})=A$, $m(\hat{B})=B$, $m(\hat{C})=C$, $|BC|=a$ birim, $|AC|=b$ birim, $|AB|=c$ birim ise,

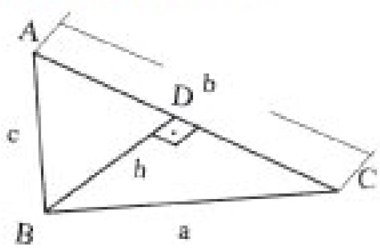


$$a^2=b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot \cos A,$$

$$b^2=a^2+c^2-2\cdot a\cdot c\cdot \cos B,$$

$$c^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot \cos C \text{ dir.}$$

Üçgenin Alanı – I :



ABC üçgeninde ;

$|AC|=b$ birim, $|AB|=c$ birim, $|BC|=a$ birim, $m(\hat{A})=A$, $m(\hat{B})=B$, $m(\hat{C})=C$ dir.

ABC üçgeninin alanı,

$$S=\frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot \sin A\,,S=\frac{1}{2}\cdot a.c.\sin B\,,S=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot \sin C \text{ dir.}$$

Üçgenin Alanı – II :

Kenarlarının uzunlukları $a\,,b\,,c$ birim, çevrel çemberinin yarıçapı r birim olan üçgenin alanı, $S=\dfrac{a\cdot b\cdot c}{4r}$ dir.

Üçgenin Alanı – III :

Kenarlarının uzunlukları $a\,,b\,,c$ birim, çevresinin uzunluğu, $a+b+c=2u$ birim olan ABC üçgeninin alanı,

$$S=\sqrt{u\cdot(u-a)\cdot(u-b)\cdot(u-c)} \text{ dir.}$$

DEĞERLENDİRME SORULARI

1) Eğer bir açı IV. bölgede ve $\sin\theta = -\frac{5}{13}$ ise $\cos\theta$ nın değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-\frac{12}{13}$ B) $\frac{12}{13}$ C) $\frac{5}{12}$ D) $-\frac{5}{12}$ E) $-\frac{5}{13}$

2) Eğer bir θ açısının bitim kenarı çember üzerindeki (−3,2) noktasından geçiyorsa, $\sin\theta$ nın değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-\frac{2}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $-\frac{2\sqrt{3}}{13}$ D) $\frac{2\sqrt{13}}{13}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{13}$

3) $\sin^2 20° + \tan 20° \cdot \tan 70° + \sin^2 70°$ toplamının değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) 2 D) $1+\sqrt{2}$ E) Hiçbiri

4) $y = \frac{1}{2}\cos(x - \frac{\pi}{4})$ fonksiyonunun periyodu aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2π B) π C) $\frac{\pi}{2}$ D) $\frac{9\pi}{4}$ E) $\frac{\pi}{4}$

5) $f(x) = \cos x + \sin 2x + \tan 3x$ fonksiyonunun periyodu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{\pi}{2}$ B) $\frac{\pi}{6}$ C) $\frac{\pi}{3}$ D) 2π E) π

6) $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ ve $\tan x = -\frac{1}{2}$ ise, $\cos x$ in değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ B) $-\frac{2}{\sqrt{5}}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{2}{5}$

7) Bir ABC üçgeninde $a = 5\,cm$, $b = 8\ cm$ ve $m(\hat{C}) = 30°$ olduğuna göre, ABC üçgeninin alanı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2 cm^2 B) 4 cm^2 C) 6 cm^2 D) 10 cm^2 E) 20 cm^2

8) Bir ABC üçgeninde $a = \frac{7}{3}c$, $b = \frac{8}{3}c$ olduğuna göre A açısının ölçüsü aşağıdakilerden hangisidir?

A) 20^o B) 30^o C) 45^o D) 50^o E) 60^o

9) Bir ABC üçgeninde $m(\hat{A}) = 45°$, $b = 4\,cm$, $c = \sqrt{2}\ cm$ ise, a kenarının uzunluğu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\sqrt{10}\ cm$ B) $8\ cm$ C) $10\ cm$ D)$18\ cm$ E) $26\ cm$

10) Kenar uzunlukları $2\ cm, 1\ cm$ ve $2\ cm$ olan LTF üçgeninin alanı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{\sqrt{15}}{4}\ cm^2$ B) $6\,cm^2$ C) $6\sqrt{5}\ cm^2$ D) $25\,cm^2$ E) $30\sqrt{5}\ cm^2$

- ***TRİGONOMETRİK ÖZDEŞLİĞİN ANLAMI***
- ***TEMEL TRİGONOMETRİK ÖZDEŞLİKLER***
- ***TOPLAM -FARK ÖZDEŞLİKLERİ***
- ***BİR AÇININ KATLARI İLE İLGİLİ ÖZDEŞLİKLER***
- ***TOPLAM-ÇARPIM ÖZDEŞLİKLERİ***
- ***ÇARPIM-TOPLAM ÖZDEŞLİKLERİ***
- ***TRİGONOMETRİK DENKLEMLERİN ANLAMI***
- ***sin x=a, cos x=a, tan x=a ve cot x=a BİÇİMİNDEKİ DENKLEMLER***
- ***sin x=sin a, cos x=cos a, tan x=tan a ve cot x=cot a BİÇİMİNDEKİ DENKLEMLER***
- ***sin(f(x))=sin(g(x)), cos(f(x))=cos(g(x)), tan(f(x))=tan(g(x)) ve cot(f(x))=cot(g(x)) BİÇİMİNDEKİ DENKLEMLER***
- ***sin x ve cos x e GÖRE LİNEER DENKLEMLER***
- ***sin x ve cos x e GÖRE HOMOJEN DENKLEMLER***
- ***TRİGONOMETRİK DENKLEMLERLE İLGİLİ GENEL ÖRNEKLER***

GİRİŞ

Bu bölümde trigonometrik özdeşlikler ve denklemler örneklerle açıklanacaktır.

◆ *TRİGONOMETRİK ÖZDEŞLİĞİN ANLAMI*

Eğer eşitliğin iki tarafındaki trigonometrik ifadeler birbirinden farklı ise, trigonometrik problemleri çözebilmek için trigonometrik ifadelerin bir ifade şeklinden diğer bir ifade şekline çevrilmesi gerekmektedir.

Bir veya birden fazla değişkenli eşitliklerin **özdeşlik** olabilmesi için eşitliğin her iki tarafındaki değişkenlere bütün değerler yerleştirildiğinde eşitliğin bozulmaması gerekmektedir. Başka bir deyişle, her x reel sayısı için sağlanan eşitliklere (açık önermelere), **özdeşlik** denir.

ÖRNEK 1 ➾ Özdeşlik için örnek verelim:

- $\forall x \in R$, $\quad x^2 + x - 6 = (x+3)\cdot(x-2)$
- $\forall A \in R$, $\quad \csc A = \dfrac{1}{\sin A}$
- $\forall \theta \in R$, $\quad \tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$
- $\forall \alpha \in R$, $\quad \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
- $\forall x \in R$, $\quad \cos(-x) = \cos x$

ÖRNEK 2 Özdeşlik olmayan ifadeler (denklemler) için örnek verelim:

$$x^2+x-6=0 \qquad \sin\theta=\frac{1}{2} \qquad \tan x+\sqrt{3}=0$$

Özdeşlik ve denklemi kendi cümlelerinizle tanımlayınız ve karşılaştırınız.

Trigonometrik Özdeşlik

Eğer özdeşlikte trigonometrik fonksiyon (sinüs, kosinüs, tanjant, kotanjant, sekant, kosekant) bulunuyorsa bu özdeşliğe **trigonometrik özdeşlik** denir.

◆ *TEMEL TRİGONOMETRİK ÖZDEŞLİKLER*

$$\csc A=\frac{1}{\sin A} \qquad \sec A=\frac{1}{\cos A} \qquad \tan A=\frac{1}{\cot A} \qquad \cot A=\frac{1}{\tan A}$$

$$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A} \qquad \cot A=\frac{\cos A}{\sin A}$$

$$\sin(-\mathrm{A})=-\sin \mathrm{A} \qquad \cos(-A)=\cos A \qquad \tan(-A)=-\tan A$$

$$\cot(-A)=-\cot A$$

$$\underset{\text{(I)}}{\sin^2 A+\cos^2 A=1} \qquad \underset{\text{(II)}}{\tan^2 A+1=\sec^2 A} \qquad \underset{\text{(III)}}{1+\cot^2 A=\csc^2 A}$$

Yukarıda verilen II. ve III. trigonometrik özdeşlikleri, I. özdeşlikten yararlanarak kolaylıkla nasıl elde edebileceğinizi yazınız.

Özdeşliklerin Doğruluğunun Gösterilmesinde İzlenecek Yöntem

Özdeşliklerin doğruluğunu göstermek için, eşitliğin bir tarafından başlanarak diğer tarafa ulaşılmaya çalışılır. Bunun için, genellikle eşitliğin en karmaşık tarafından başlanarak daha az karmaşık taraf elde edilmeye çalışılır. Bundan sonra, temel trigonometrik özdeşlikler, cebirsel işlemler ve diğer doğruluğu kabul edilmiş veya gösterilmiş özdeşlikler kullanılır. Bu işlemler yapılırken ulaşılmaya çalışılan taraf sürekli gözönünde bulundurularak uygun yöntemlere karar verilir ve uygulanır.

ÖRNEK 3 ⇨ $\cot A \cdot \sin A = \cos A$ özdeşliğinin doğruluğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM ⇨ $\cot A \cdot \sin A = \dfrac{\cos A}{\sin A} \cdot \sin A$ $\leftarrow (\cot A = \dfrac{\cos A}{\sin A})$

$= \cos A$ dır. $\leftarrow (\dfrac{a}{b} \cdot b = a)$

ALIŞTIRMA 1 ⇨ $\cos A \cdot \tan A = \sin A$ özdeşliğinin doğruluğunu gösteriniz.

ÖRNEK 4 ⇨ $\csc(-A) = -\csc A$ özdeşliğinin doğruluğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM ⇨ $\csc(-A) = \dfrac{1}{\sin(-A)}$ $\leftarrow (\csc A = \dfrac{1}{\sin A})$

$= \dfrac{1}{-\sin A}$ $\leftarrow (\sin(-A) = -\sin A)$

$= -\dfrac{1}{\sin A}$ $\leftarrow (\dfrac{1}{-a} = -\dfrac{1}{a})$

$= -\csc A$ dır. $\leftarrow (\csc A = \dfrac{1}{\sin A})$

ALIŞTIRMA 2 ⇨ $\sec(-A) = \sec A$ özdeşliğinin doğruluğunu gösteriniz.

ÖRNEK 5 ⇨ $\tan A \cdot \sin A + \cos A = \sec A$ özdeşliğinin doğruluğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM ⇨ $\tan A \cdot \sin A + \cos A = \dfrac{\sin A}{\cos A} \cdot \sin A + \cos A$ $\leftarrow (\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A})$

$= \dfrac{\sin A \cdot \sin A}{\cos A} + \cos A$ $\leftarrow (\dfrac{a}{b} \cdot a = \dfrac{a \cdot a}{b})$

$= \dfrac{\sin^2 A}{\cos A} + \cos A$ $\leftarrow (a \cdot a = a^2)$

$= \dfrac{\sin^2 A}{\cos A} + \underset{(\cos A)}{\dfrac{\cos A}{1}})$ $\leftarrow$(Rasyonel sayılarda payda eşitleme)

$$=\frac{\sin^2 A}{\cos A}+\frac{\cos^2 A}{\cos A}$$

$$=\frac{\sin^2 A+\cos^2 A}{\cos A} \qquad \leftarrow\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}\right)$$

$$=\frac{1}{\cos A} \qquad \leftarrow\left(\sin^2 A+\cos^2 A=1\right)$$

$$=\sec A \text{ dır.} \qquad \leftarrow\left(\sec A=\frac{1}{\cos A}\right)$$

ALIŞTIRMA 3 ⇨ $\cot A\cdot\cos A+\sin A=\csc A$ özdeşliğinin doğruluğunu gösteriniz.

ÖRNEK 6 ⇨ $\cot A-\tan A=\dfrac{2\cos^2 A-1}{\sin A\cdot\cos A}$ özdeşliğinin doğruluğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM ⇨ $\cot A-\tan A=\dfrac{\cos A}{\sin A}-\dfrac{\sin A}{\cos A}$ $\qquad \leftarrow\left(\tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A},\ \cot A=\dfrac{\cos A}{\sin A}\right)$

$$=\frac{\cos A}{\sin A}-\frac{\sin A}{\cos A} \qquad \leftarrow\text{(Rasyonel sayılarda payda eşitleme)}$$

$(\cos A)\quad(\sin A)$

$$=\frac{\cos^2 A-\sin^2 A}{\sin A\cdot\cos A} \qquad \leftarrow\left(\sin^2 A+\cos^2 A=1\right)$$

$$=\frac{\cos^2 A-(1-\cos^2 A)}{\sin A\cdot\cos A}$$

$$=\frac{\cos^2 A-1+\cos^2 A}{\sin A\cdot\cos A} \qquad \leftarrow\left(-(a-b)=-a+b\right)$$

$$=\frac{2\cos^2 A-1}{\sin A\cdot\cos A} \text{ dır.}$$

ALIŞTIRMA 4 ⇨ $\dfrac{\tan A-\cot A}{\tan A+\cot A}=1-2\cos^2 A$ özdeşliğinin doğruluğunu gösteriniz.

Uyarı: Sadece yapılanları gözlemlemeniz/okumanız sizi özdeşliklerin doğruluğunu göstermede iyi yapmaz. Sizlerin de örneklerde verilen özdeşliklerin doğruluğunu göstermeniz ve bol alıştırma yapmanız gerekmektedir.

◆ *TOPLAM - FARK ÖZDEŞLİKLERİ*

Bu bölümde A ve B birer reel sayı olduğuna göre; sin(A+B), sin(A-B), cos(A+B), cos(A-B), tan(A+B), tan(A-B), cot(A+B) ve cot(A-B) ile ilgili ifadelerin özdeşliklerini inceleyeceğiz.

Toplam - Fark Özdeşlikleri

A, B ∈R ise,

$$\cos(A+B)=\cos A\cdot\cos B-\sin A\cdot\sin B$$

$$\cos(A-B)=\cos A\cdot\cos B+\sin A\cdot\sin B$$

$$\sin(A+B)=\sin A\cdot\cos B+\cos A\cdot\sin B$$

$$\sin(A-B)=\sin A\cdot\cos B-\cos A\cdot\sin B$$

$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\cdot\tan B}$$

$$\tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\cdot\tan B}$$

$$\cot(A+B)=\frac{\cot A\cdot\cot B-1}{\cot A+\cot B}$$

$$\cot(A-B)=\frac{-\cot A\cdot\cot B-1}{\cot A-\cot B}$$

Uyarı: Ders notunuzda doğruluğu gösterilen ve gösterilmeyen toplam ve fark özdeşliklerinin doğruluklarını gösteriniz.

ÖRNEK 7 ⇒ sin(A+B)= $\sin A\cdot\cos B+\cos A.\sin B$ olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM ⇒ İlk önce, sin(A+B)= $\cos\left[\frac{\pi}{2}-(A+B)\right]$ olduğunu gösterelim:

$$\cos(\frac{\pi}{2}-x)=\cos\frac{\pi}{2}\cdot\cos x+\sin\frac{\pi}{2}\cdot\sin x$$

← ($\cos(A-B)=\cos A\cdot\cos B+\sin A\cdot\sin B$)

$$=0\cdot\cos x+1\cdot\sin x=\sin x \text{ tir.}$$

O halde, $\cos\left[\frac{\pi}{2}-\underbrace{(A+B)}_{x}\right]=\sin\underbrace{(A+B)}_{x}$ dir.

Şimdi, yukarıdaki ifadeyi kullanalım:

$$\sin(A+B)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(A+B)\right]=\cos\left[(\frac{\pi}{2}-A)-B\right] \quad \leftarrow (-(x+y)=-x-y)$$

$$\cos\left[(\frac{\pi}{2}-A)-B\right]=\cos(\frac{\pi}{2}-A)\cdot\cos B+\sin(\frac{\pi}{2}-A)\cdot\sin B$$

$$\leftarrow (\cos(\frac{\pi}{2}-x)=\sin x \text{ ve } \sin(\frac{\pi}{2}-x)=\cos x)$$

$\cos\left[(\frac{\pi}{2}-A)-B\right]=\sin A\cdot\cos B+\cos A\cdot\sin B$ dir. ....(*)

$\sin(A+B)=\cos\left[(\frac{\pi}{2}-A)-B\right]$ olduğunu yukarıda ifade etmiştik.(**)

O halde, (*) ve (**) dan yararlanarak,

$\sin(A+B)=\sin A\cdot\cos B+\cos A\cdot\sin B$ olur.

sin(A-B)=sinA·cosB-cosA·sin B olduğunu gösteriniz.

ÖRNEK 8 ⇒ $k\in Z, A\neq\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi,\ B\neq\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi,\ A+B\neq\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi$ olmak üzere,

$\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\cdot\tan B}$ olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM ⇒ $\tan(A+B)=\dfrac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}$

$=\dfrac{\sin A\cdot\cos B+\cos A\cdot\sin B}{\cos A\cdot\cos B-\sin A\cdot\sin B}$ dir. ←(Pay ve paydayı $\cos A\cdot\cos B$ ile bölelim.)

$$\tan(A+B)=\frac{\dfrac{\sin A\cdot\cos B+\cos A\cdot\sin B}{\cos A\cdot\cos B}}{\dfrac{\cos A\cdot\cos B-\sin A\cdot\sin B}{\cos A\cdot\cos B}}$$

$$\frac{\dfrac{\sin A\cdot\cos B}{\cos A\cdot\cos B}+\dfrac{\cos A\cdot\sin B}{\cos A\cdot\cos B}}{\dfrac{\cos A\cdot\cos B}{\cos A\cdot\cos B}-\dfrac{\sin A\cdot\sin B}{\cos A\cdot\cos B}} \qquad \leftarrow \left(\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)$$

$$=\frac{\dfrac{\sin A}{\cos A}\cdot\dfrac{\cos B}{\cos B}+\dfrac{\sin B}{\cos B}\cdot\dfrac{\cos A}{\cos A}}{1-\dfrac{\sin A}{\cos A}\cdot\dfrac{\sin B}{\cos B}} \qquad \leftarrow \left(\frac{x\cdot y}{z\cdot t}=\frac{x}{z}\cdot\frac{y}{t}\right)$$

$$=\frac{\dfrac{\sin A}{\cos A}+\dfrac{\sin B}{\cos B}}{1-\dfrac{\sin A}{\cos A}\cdot\dfrac{\sin B}{\cos B}}$$

$$=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\cdot\tan B}\ \text{dir.} \qquad \leftarrow \left(\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}\right)$$

ÖRNEK 9 ⤻ sin 75° nin değerini hesap makinası ve trigonometrik değerler tablosunu kullanmadan hesaplayınız.

ÇÖZÜM ⤻ Yukarıda ifade edilen şartlar nedeniyle 75° yi birim çember veya özel dik üçgenlerden yararlanarak bulabileceğimiz şekilde ifade etmeliyiz.

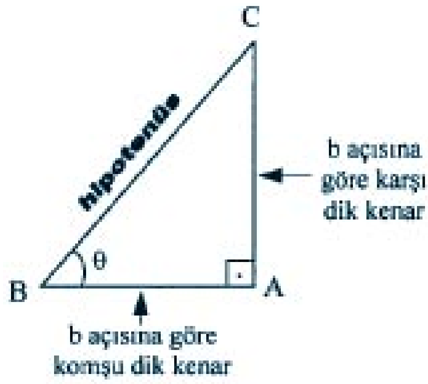
Bu nedenle, $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$ dir.

$$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ+30^\circ) \qquad \leftarrow (\sin(A+B)=\sin A\cdot\cos B+\cos A\cdot\sin B)$$

$$= \sin 45^\circ\cdot\cos 30^\circ + \cos 45^\circ\cdot\sin 30^\circ \text{ dir.}$$

Kosinüs ve sinüs fonksiyonlarının 45° ve 30° deki değerlerini bulalım ve daha sonra yukarıdaki ifadede yerine koyalım.

Bir dik üçgende, bir dar açının ölçüsünün sinüs ve kosinüsünü yazalım:



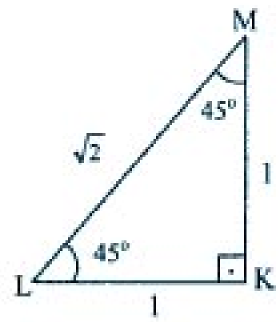
$m(\hat{B}) = \theta$

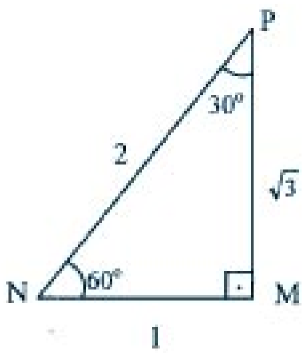
$$\sin\theta = \frac{\text{Karşı Dik Kenarın Uzunluğu}}{\text{Hipotenüsün Uzunluğu}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{Komşu Dik Kenarın Uzunluğu}}{\text{Hipotenüsün Uzunluğu}}$$

$\sin 45° = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ dir.

$\cos 45° = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ dir.





$\sin 30° = \dfrac{1}{2}$ dir.

$\cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ dir.

$$\sin 75° = \sin(45° + 30°)$$

$$= \sin 45° \cdot \cos 30° + \cos 45° \cdot \sin 30°$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{2}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)}{4} = 0{,}9659 \text{ dur.}$$

sin 75° nin değerini trigonometrik değerler tablosundan da yararlanarak hesaplayabiliriz. Ayrıca sin75° nin değerini hesap makinasını kullanarak da bulabiliriz. Bazı hesap makinalarında derece (deg), radyan (rad) ve grad (grad) seçenekleri bulunmaktadır. Eğer hesap makinanızda bu seçenekler var ise açımızın ölçüsü **derece** cinsinden olduğu için hesap makinanızda derece seçeneğini seçmeniz gerekmektedir.

Hesap makinasını ve trigonometrik değerler tablosunu kullanarak sin 75° nin değerini hesaplayınız.

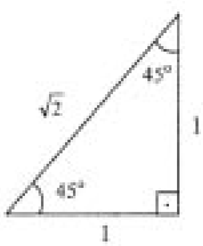
ALIŞTIRMA 5 Aşağıdaki sinüs değerlerini toplam özdeşliklerinden ve hesap makinasından yararlanarak hesaplayınız.

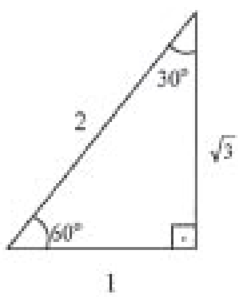
(A) sin 105° (B) sin 240°

ÖRNEK 10 cos 105° nin değerini hesaplayınız.

ÇÖZÜM Özel dik üçgenden yararlanarak hesaplayabilmek için 105° yi aşağıdaki gibi yazarız.

105°= 60°+ 45° olduğundan,





$\sin\theta = \dfrac{\text{Karşı D.K.U}}{\textit{Hipotenüs U}}$ $\cos\theta = \dfrac{\text{Komşu D.K.U}}{\textit{HipotenüsU}}$

$$\cos 105° = \cos(60° + 45°)$$

$$= \cos 60° \cdot \cos 45° - \sin 60° \cdot \sin 45°$$

←(cos(A+B)=cosA·cosB-sinA·sinB)

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$ ←(Paydayı köklü ifadeden kurtarma)

$$= \frac{\sqrt{2}\cdot(1-\sqrt{3})}{2\cdot 2}$$ ←($\sqrt{a}\cdot\sqrt{a} = a$)

$$= \frac{\sqrt{2}\cdot(1-\sqrt{3})}{4}$$ tür.

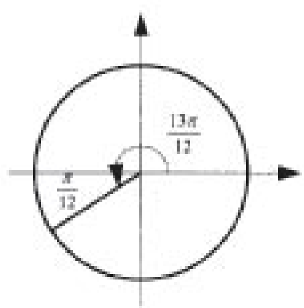
Not: Trigonometrik oranları ifade ederken, Dik Kenarın Uzunluğu, "D.K.U." biçiminde; Hipotenüsün Uzunluğu, "Hipotenüs U." biçiminde yazılacaktır.

ALIŞTIRMA 6 ⇒ Aşağıdaki kosinüs değerlerini toplam özdeşliklerinden ve hesap makinasından yararlanarak hesaplayınız:
(A) cos 105°   (B) cos 240°

ÖRNEK11 ⇒ $\cos\frac{13\pi}{12}$ değerini trigonometrik tablo ve hesap makinası kullanmadan hesaplayınız.

ÇÖZÜM ⇒ Yukarıda sorulan soruyu cevaplarken aşağıda verilmiş olan şekli inceleyiniz.

$$\frac{13\pi}{12}=\pi+\frac{\pi}{12}$$



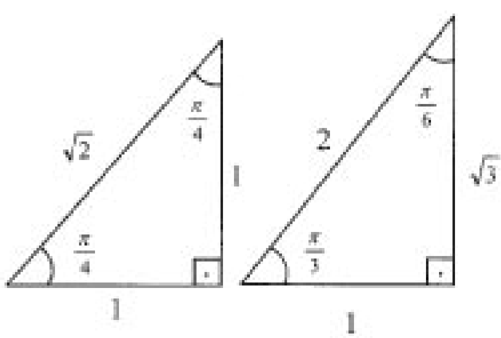
$$\cos\frac{13\pi}{12}=\cos(\pi+\frac{\pi}{12}) \qquad \leftarrow (\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta)$$

$$=-\cos\frac{\pi}{12}$$

$$=-\cos\left(\overbrace{\frac{\pi}{3}}^{A}-\overbrace{\frac{\pi}{4}}^{B}\right) \qquad \leftarrow (\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})$$

$$=-\left(\cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$\leftarrow$(cos(A-B)=cosA·cosB+sinA·sinB)



$\sin\theta=\frac{\text{Karşı D.K.U}}{\text{Hipotenüs .U}}$ $\cos\theta=\frac{\text{Komşu D.K.U}}{\text{HipotenüsU}}$

$$=-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=-\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right) \qquad \leftarrow (\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}}{a})$$

$$=-\frac{\sqrt{2}\cdot(1+\sqrt{3})}{2\cdot 2}$$

$$=-\frac{\sqrt{2}\cdot(1+\sqrt{3})}{4} \text{ tür.}$$

ALIŞTIRMA 7 ⇒ $\cos\frac{11\pi}{12}$ değerini fark özdeşliklerini, trigonometrik tabloyu ve hesap makinasını kullanarak ayrı ayrı hesaplayınız. (Not: Hesap makinanızın seçeneğini (modunu) radyana çevirmelisiniz çünkü $\frac{11\pi}{12}$ radyandır.)

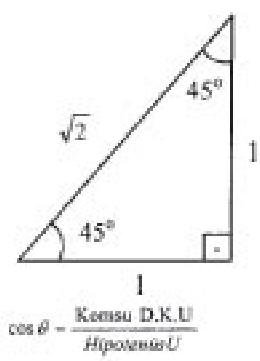
ÖRNEK 12 ⇒ $\cos 30° \cdot \cos 15° - \sin 30° \cdot \sin 15°$ ifadesinin değerini hesaplayınız.

ÇÖZÜM ⇒ $\cos 30° \cdot \cos 15° - \sin 30° \cdot \sin 15°$ ifadesinin değerini bulmak için toplam-fark özdeşliklerini inceleyerek hangisinin uygun olduğunu saptayalım:

İnceleme sonucu,

$$\cos(A+B) = \cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B$$

olduğunu bulduk.



$$\cos 30° \cdot \cos 15° - \sin 30° \cdot \sin 15° = \cos(\underbrace{30°}_{A} + \underbrace{15°}_{B})$$

$$= \cos 45°$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ dir.}$$

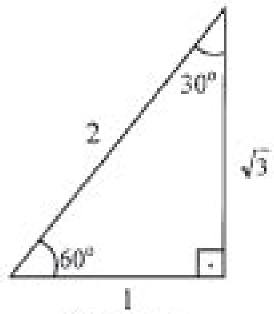
ÖRNEK 13 ⇒ $\sin\alpha \cdot \cos(\alpha - 30°) - \sin(\alpha - 30°) \cdot \cos\alpha$ ifadesinin değerini hesaplayınız.

ÇÖZÜM ⇒ Bir önceki örnekte olduğu gibi toplam-fark formüllerini incelediğimizde yukarıdaki ifade,

$$\sin(A-B) = \sin A \cdot \cos B - \sin B \cdot \cos A$$

ifadesine benzemektedir.

O halde,



$\sin\theta = \dfrac{\text{Karsı D.K.U}}{\text{Hipotenüs } U}$

$$\sin\underbrace{\alpha}_{\uparrow\,A}\cdot\cos(\underbrace{\alpha-30^\circ}_{\uparrow\,B})-\sin(\alpha-30^\circ)\cdot\cos\alpha=\sin(\underbrace{\alpha}_{\uparrow\,A}-(\underbrace{\alpha-30^\circ}_{\uparrow\,B}))$$

$$=\sin(\alpha-\alpha+30^\circ) \qquad \leftarrow(\,-(a+b)=-a-b\,)$$

$$=\sin 30^\circ$$

$$=\frac{1}{2}\ \text{dir.}$$

ÖRNEK 14 ⇒ tan15° nin değerini toplam-fark özdeşliklerinden yararlanarak hesaplayınız.

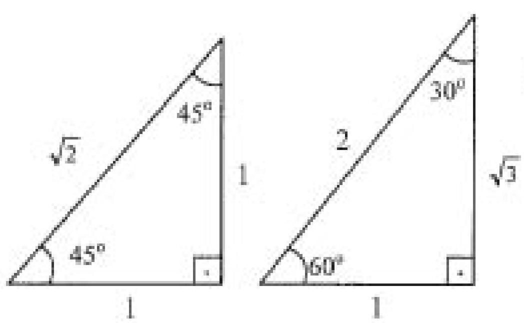
ÇÖZÜM ⇒ Özel dik üçgenlerden yararlanarak trigonometrik oranlarını bulabileceğimiz reel sayıları kullanarak tan15° nin değerini hesaplayacağız:

$15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$ olduğundan,

$\tan 15^\circ = \tan(45^\circ - 30^\circ)$ olur.

$\tan(A-B)=\dfrac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\cdot\tan B}$ özdeşliğini kullanarak, tan15° nin

değerini hesaplayacağız.



$\tan\theta = \dfrac{\text{Karsı Dik kenar U}}{\text{Komsu Dik Kenar U}}$

$$\tan 15^\circ = \tan(\underbrace{45^\circ}_{\uparrow\,A}-\underbrace{30^\circ}_{\uparrow\,B})$$

$$=\frac{\tan 45^\circ-\tan 30^\circ}{1+\tan 45^\circ\cdot\tan 30^\circ}$$

$$=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}} \qquad \leftarrow\left(\tan 45^\circ=\frac{1}{1}=1 \quad \tan 30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$$

$$=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)\cdot(\sqrt{3}-1)}$$ ← (Paydayı köklü ifadeden kurtarma)

$$=\frac{(\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3})^2-1}$$ ←($(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2$ ve $a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)$)

$$=\frac{3-2\sqrt{3}+1}{3-1}$$

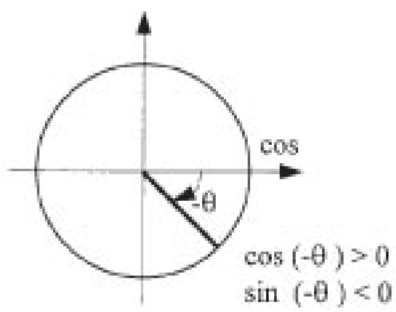
$$=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}$$ ← ($\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$)

$$=\frac{4}{2}-\frac{2\sqrt{3}}{2}$$

$=2-\sqrt{3}$ tür.

ÖRNEK 15 ⇨ cot(-15°) ifadesinin değerini hesaplayınız.

ÇÖZÜM ⇨ $\cot(-\theta)=?$



$$\cot(-\theta)=\frac{\cos(-\theta)}{\sin(-\theta)}$$

$$=\frac{\cos\theta}{-\sin\theta}$$

$$=-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

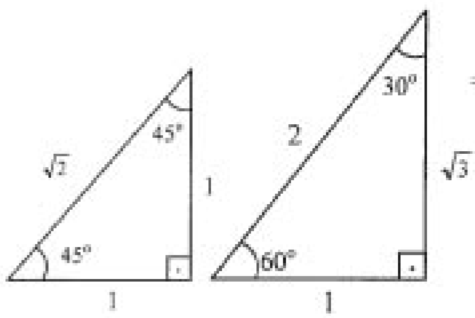
$\cot(-\theta)=-\cot\theta$ dır.

O halde, $\cot(-15^\circ)=-\cot 15^\circ$ dir.

$15^\circ=60^\circ- 45^\circ$ olduğundan,

$$\cot(-15^\circ) = -\cot 15^\circ = -\cot(\overbrace{60^\circ}^{\substack{A\\ \downarrow}} - \overbrace{45^\circ}^{\substack{B\\ \downarrow}})$$

$$-\cot(\overbrace{60^\circ}^{\substack{A\\ \downarrow}} - \overbrace{45^\circ}^{\substack{B\\ \downarrow}}) = -\frac{\cot 60^\circ \cdot \cot 45^\circ + 1}{\cot 45^\circ - \cot 60^\circ} \quad \leftarrow \left(\cot(A-B) = \frac{\cot A \cdot \cot B + 1}{\cot B - \cot A}\right)$$



$\cot\theta = \dfrac{\text{Komsu Dik Kenar U}}{\text{Karsı Dik kenar U}}$

$$= -\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot 1 + 1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} \quad \leftarrow \left(\cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\ ;\ \cot 45^\circ = \frac{1}{1} = 1\right)$$

$$= -\frac{\underset{(1)}{\frac{\sqrt{3}}{3}} + \underset{(3)}{\frac{1}{1}}}{\underset{(3)}{\frac{1}{1}} - \underset{(1)}{\frac{\sqrt{3}}{3}}} \quad \leftarrow \text{(Payda eşitleme)}$$

$$= -\frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{3}{3}}{\frac{3}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$= -\frac{\frac{\sqrt{3}+3}{3}}{\frac{3-\sqrt{3}}{3}} \quad \leftarrow \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}\right)$$

$$= -\frac{\sqrt{3}+3}{3} \cdot \frac{3}{3-\sqrt{3}} \quad \leftarrow \left(\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}\right)$$

$$= -\frac{\sqrt{3}+3}{\underset{(3+\sqrt{3})}{3-\sqrt{3}}} \quad \leftarrow \text{(Paydayı kökten kurtarma)}$$

$$= -\frac{(\sqrt{3}+3)\cdot(\sqrt{3}+3)}{3^2 - (\sqrt{3})^2}$$

$$= -\frac{(\sqrt{3})^2 + 2\cdot\sqrt{3}\cdot 3 + 3^2}{3^2 - (\sqrt{3})^2}$$ ← ((a+b).(a+b)= $a^2 + 2ab + b^2$)

$$= -\frac{3 + 6\sqrt{3} + 9}{9 - 3}$$

$$= -\frac{12 + 6\sqrt{3}}{6}$$

$$= -\left[\frac{12}{6} + \frac{6\sqrt{3}}{6}\right]$$ ← ($\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$)

$$= -(2 + \sqrt{3})$$ ← ($-(a+b) = -a-b$))

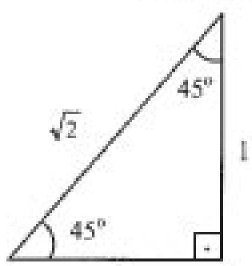
$= -2 - \sqrt{3}$ tür.

ÖRNEK 16 ⇒ $\frac{\tan 27^\circ + \tan 18^\circ}{1 - \tan 27^\circ \cdot \tan 18^\circ}$ ifadesinin değerini hesaplayınız.

ÇÖZÜM ⇒ Toplam-fark özdeşliklerini incelediğimizde yukarıdaki ifadenin,

$$\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \cdot \tan B} = \tan(A + B)$$

ifadesi ile kolaylıkla çözülebileceği görülmektedir.



$\tan\theta = \frac{\text{Karsı Dik kenar U}}{\text{Komsu Dik Kenar U}}$

A=27° ve B=18° olduğuna göre,

$$\frac{\tan 27^\circ + \tan 18^\circ}{1 - \tan 27^\circ \cdot \tan 18^\circ} = \tan(27^\circ + 18^\circ)$$

$$= \tan 45^\circ = 1 \text{ dir.}$$

$\frac{\tan 27^\circ + \tan 18^\circ}{1 - \tan 27^\circ \cdot \tan 18^\circ}$ ifadesinin değerini $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ ve toplam-fark özdeşliklerinden yararlanarak hesaplayınız.

ÖRNEK 17 ➾ $\dfrac{\cos 25^\circ + \tan 45^\circ \cdot \sin 25^\circ}{\tan 60^\circ \cdot \cos 20^\circ}$ ifadesinin değerini hesap makinası ve trigonometrik değerler tablosunu kullanmadan hesaplayınız.

ÇÖZÜM ➾ $\dfrac{\cos 25^\circ + \tan 45^\circ \cdot \sin 25^\circ}{\tan 60^\circ \cdot \cos 20^\circ} = \dfrac{\cos 25^\circ + \dfrac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ} \cdot \sin 25^\circ}{\tan 60^\circ \cdot \cos 20^\circ}$ ← ($\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$)

$$= \frac{\underset{(\cos 45^\circ)}{\dfrac{\cos 25^\circ}{1}} + \underset{(1)}{\dfrac{\sin 45^\circ \cdot \sin 25^\circ}{\cos 45^\circ}}}{\tan 60^\circ \cdot \cos 20^\circ}$$

←(Paydaki ifadenin paydalarının eşitlenmesi)

$$= \frac{\dfrac{\overbrace{\cos 45^\circ}^{A} \cdot \overbrace{\cos 25^\circ}^{B} + \sin 45^\circ \cdot \sin 25^\circ}{\cos 45^\circ}}{\tan 60^\circ \cdot \cos 20^\circ}$$

← (cos(A-B)=cosA·cosB+sinA·SinB)

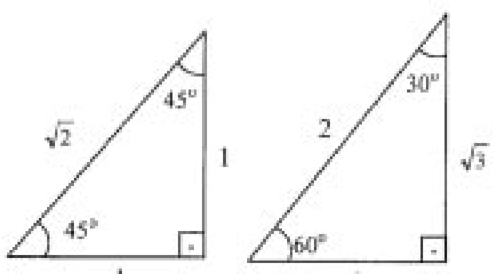
$$= \frac{\dfrac{\cos(45^\circ - 25^\circ)}{\cos 45^\circ}}{\tan 60^\circ \cdot \cos 20^\circ}$$

$$= \frac{\dfrac{\cos 20^\circ}{\cos 45^\circ}}{\tan 60^\circ \cdot \cos 20^\circ} \qquad \leftarrow \left(\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} \right)$$

$$= \frac{\cos 20^\circ}{\cos 45^\circ} \cdot \frac{1}{\tan 60^\circ \cdot \cos 20^\circ}$$

$$= \frac{\cos 20^\circ}{\cos 45^\circ \cdot \tan 60^\circ \cdot \cos 20^\circ}$$

$$= \frac{1}{\cos 45^\circ \cdot \tan 60^\circ} \qquad \leftarrow \text{(Sadeleştirme)}$$



$\cos\theta = \dfrac{\text{Komşu D.K.U}}{\text{Hipotenüs U}}$ $\quad \tan\theta = \dfrac{\text{Karşı Dik kenar U}}{\text{Komşu Dik Kenar U}}$

$$= \frac{1}{\dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{3}} \leftarrow \left(\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \ \tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \right)$$

$$= \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ tür.} \quad \leftarrow \left(\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a} \text{ ve } \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \right)$$

$\dfrac{\cos 25^\circ + \tan 45^\circ \cdot \sin 25^\circ}{\tan 60^\circ \cdot \cos 20^\circ}$ ifadesinin değerini hesap makinası ve trigonometrik değerler tablosunu kullanarak hesaplayınız. (Not:Trigonometrik fonksiyonun değerlerini doğrudan bulup ifadede yerine koyarak hesaplayacaksınız.)

BİR AÇININ KATLARI İLE İLGİLİ ÖZDEŞLİKLER

A açısının ölçüsü ile ilgili özdeşlikler belirliyken, 2A , 3A ve $\frac{A}{2}$ gibi açıların ölçüleri ile ilgili özdeşliklerin bulunması açıklanacaktır.

İki Kat Açı Özdeşlikleri

İki Kat Açı Özdeşlikleri

$A \in R$ *ise,*

$$\sin 2A = 2 \cdot \sin A \cdot \cos A$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$$

$$\cos 2A = 2 \cdot \cos^2 A - 1$$

$$\cos 2A = 1 - 2 \cdot \sin^2 A$$

$$\tan 2A = \frac{2 \cdot \tan A}{1 - \tan^2 A}$$

$$\cot 2A = \frac{\cot^2 A - 1}{2 \cdot \cot A}$$

İki kat açı özdeşliklerinden bazılarının doğruluğunu göstereceğiz.

Uyarı: Ders notunuzda doğruluğu gösterilen veya gösterilmeyen iki kat açı özdeşliklerinin doğruluğunu gösteriniz.

ÖRNEK 18 ➾ $\sin 2A = 2\cdot\sin A\cdot\cos A$ özdeşliğinin doğruluğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM ➾ Yukarıda yazılı olan özdeşliği elde etmek için, sinüs için toplam özdeşliğini kullanacağız.

$$\sin(A+B) = \sin A\cdot\cos B + \cos A\cdot\sin B$$

B=A ise,

$$\sin(A+A) = \sin A\cdot\cos A + \cos A\cdot\sin A$$

$$\sin 2A = 2\cdot\sin A\cdot\cos A \text{ dır.}$$

ÖRNEK 19 ➾ $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$ özdeşliğinin doğruluğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM ➾ Yukarıda yazılı olan özdeşliği elde etmek için, kosinüs için toplam özdeşliğini kullanacağız.

$$\cos(A+B) = \cos A\cdot\cos B - \sin A\cdot\sin B$$

B=A ise,

$$\cos(A+A) = \cos A\cdot\cos A - \sin A\cdot\sin A \text{ dır.}$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A \text{ dır.}$$

ÖRNEK 20 ➾ $\cos 2A = 2\cdot\cos^2 A - 1$ özdeşliğinin doğruluğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM ➾ Yukarıda yazılı olan özdeşliği elde etmek için,

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A \quad \leftarrow \text{(Kosinüs için iki kat açı özdeşliği)}$$

ve

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

özdeşliklerini kullanalım:

$$\begin{aligned}\cos 2A &= \cos^2 A - \sin^2 A \\ &= \cos^2 A - (1-\cos^2 A) \quad \leftarrow (\sin^2 A + \cos^2 A = 1) \\ &= \cos^2 A - 1 + \cos^2 A \\ &= 2\cdot\cos^2 A - 1 \text{ dir.}\end{aligned}$$

ÖRNEK 21 ➾ $\cos 2A = 1 - 2\cdot\sin^2 A$ özdeşliğinin doğruluğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM ➾ Bu özdeşliği elde etmek için,

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A \quad \leftarrow \text{(Kosinüs için iki kat açı özdeşliği)}$$

ve

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

özdeşliklerini kullanalım:

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$$

$$= (1 - \sin^2 A) - \sin^2 A \quad \leftarrow (\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \Rightarrow \cos^2 A = 1 - \sin^2 A)$$

$$= 1 - \sin^2 A - \sin^2 A$$

$$= 1 - 2\cdot\sin^2 A \text{ dır.}$$

> $\tan 2A = \dfrac{2\cdot\tan A}{1-\tan^2 A}$ ve $\cot 2A = \dfrac{\cot^2 A - 1}{2.\cot A}$ özdeşliklerinin doğruluklarını gösteriniz.

ÖRNEK 22 ➾ $\cos^2 A = \frac{1}{2}(1 + \cos 2A)$ özdeşliğinin doğruluğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM ➾ Yukarıda yazılı olan özdeşliğin doğruluğunu göstermek için kosinüs için iki kat açı özdeşliğinden yararlanacağız:

$$\cos 2A = 2\cos^2 A - 1 \Rightarrow 2\cos^2 A = 1 + \cos 2A$$

$$\Rightarrow \cos^2 A = \frac{1}{2}(1 + \cos 2A) \text{ dır.}$$

ALIŞTIRMA 8 ➾ $\sin^2 A = \frac{1}{2}(1 - \cos 2A)$ özdeşliğinin doğruluğunu gösteriniz.

ÖRNEK 23⇒ $\sin 2A = \dfrac{2\tan A}{\tan^2 A + 1}$ özdeşliğinin doğruluğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM ⇒ Yukarıda sorulan soruyu iki farklı yolla çözeceğiz:

I.Yol:
Yukarıda yazılı olan özdeşliğin doğruluğunu göstermek için,

$$\sin 2A = 2\cdot\sin A\cdot\cos A \qquad \leftarrow\text{(Sinüs için iki kat açı özdeşliği)}$$

ve

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

özdeşliklerini kullanacağız.

$$\sin 2A = 2\sin A\cdot\cos A = \frac{2\sin A\cdot\cos A}{\underbrace{\sin^2 A + \cos^2 A}_{1}}$$

$$= \frac{(2\sin \mathrm{A}\cdot\cos \mathrm{A})\cdot\dfrac{1}{\cos^2 \mathrm{A}}}{(\sin^2 \mathrm{A}+\cos^2 \mathrm{A})\cdot\dfrac{1}{\cos^2 \mathrm{A}}}$$

$$\leftarrow\left(\frac{a}{b}=\frac{a\cdot c}{b\cdot c} \text{ ve } c=\frac{1}{\cos^2 A}\right)$$

$$= \frac{\dfrac{2\sin \mathrm{A}\cdot\cos \mathrm{A}}{\cos^2 \mathrm{A}}}{\dfrac{\sin^2 \mathrm{A}+\cos^2 \mathrm{A}}{\cos^2 \mathrm{A}}}$$

$$= \frac{\dfrac{2\sin \mathrm{A}}{\cos \mathrm{A}}\cdot\dfrac{\cos \mathrm{A}}{\cos \mathrm{A}}}{\dfrac{\sin^2 \mathrm{A}}{\cos^2 \mathrm{A}}+\dfrac{\cos^2 \mathrm{A}}{\cos^2 \mathrm{A}}}$$

$$\leftarrow\left(\frac{a\cdot b}{c^2}=\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{c} \text{ ve } \frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)$$

$$= \frac{2\cdot\dfrac{\sin \mathrm{A}}{\cos \mathrm{A}}\cdot 1}{\left(\dfrac{\sin \mathrm{A}}{\cos \mathrm{A}}\right)^2+1}$$

$$= \frac{2\tan A}{\tan^2 A + 1} \quad \text{dir.} \qquad \leftarrow\left(\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}\right)$$

II. Yol:

$\sin 2A = \dfrac{2\tan A}{\tan^2 A+1}$ özdeşliğinin doğruluğunu eşitliğin sağ tarafından başlayarak gösterelim:

$$\frac{2\tan A}{\tan^2 A+1}=\frac{2\cdot\dfrac{\sin A}{\cos A}}{\dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}+1} \qquad \leftarrow \left(\tan^2 A=(\tan A)^2=\left(\frac{\sin A}{\cos A}\right)^2=\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}\right)$$

$$=\frac{2\cdot\dfrac{\sin A}{\cos A}}{\dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}+\dfrac{1}{\underset{(\cos^2 A)}{1}}} \qquad \leftarrow \text{(Rasyonel sayılarda payda eşitleme)}$$

$$=\frac{2\cdot\dfrac{\sin A}{\cos A}}{\dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}+\dfrac{\cos^2 A}{\cos^2 A}}$$

$$=\frac{2\cdot\dfrac{\sin A}{\cos A}}{\dfrac{\sin^2 A+\cos^2 A}{\cos^2 A}} \qquad \leftarrow \left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}\right)$$

$$=\frac{2\cdot\dfrac{\sin A}{\cos A}}{\dfrac{1}{\cos^2 A}} \qquad \leftarrow \left(\sin^2 A+\cos^2 A=1\right)$$

$$=2\cdot\frac{\sin A}{\cos A}\cdot\frac{\cos^2 A}{1} \qquad \leftarrow \left(\frac{a}{\dfrac{1}{b}}=a\cdot\frac{b}{1}=a\cdot b\right)$$

$$=2\cdot\frac{\sin A\cos A\cdot\cos A}{\cos A}$$

$$=2\cdot\sin A\cdot\cos A \qquad \leftarrow \text{(Sadeleştirme)}$$

$$=\sin 2A \text{ dır.} \qquad \leftarrow \left(\sin 2A=2\cdot\sin A\cdot\cos A\right)$$

ALIŞTIRMA 9 ⇒ Aşağıda verilen trigonometrik özdeşliklerin doğruluklarını gösteriniz.

(A) $\cos 2A = \dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$ (B) $\tan 2A = \dfrac{2\cdot \cot A}{\cot^2 A - 1}$

(C) $\tan 2A = \dfrac{2}{\cot A - \tan A}$

ÖRNEK 24 ⇒ $\dfrac{\cos 35^\circ \cdot \cos 15^\circ + \sin 35^\circ \cdot \sin 15^\circ}{3\cdot(\cos^2 10^\circ - \sin^2 10^\circ)}$ ifadesinin değerini hesaplayınız.

ÇÖZÜM ⇒ Yukarıda verilen ifadenin değerini bulmak için şimdiye kadar öğrendiklerimizden yararlanacağız.

$$\frac{\cos 35^\circ \cdot \cos 15^\circ + \sin 35^\circ \cdot \sin 15^\circ}{3\cdot(\cos^2 10^\circ - \sin^2 10^\circ)} = \frac{\cos(35^\circ - 15^\circ)}{3\cdot \cos 20^\circ}$$

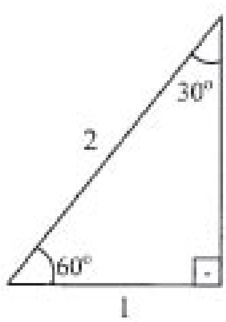
$\leftarrow$ ($\cos(A-B) = \cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B$ ve $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$)

$$= \frac{\cos 20^\circ}{3\cdot \cos 20^\circ}$$

$= \dfrac{1}{3}$ tür. $\leftarrow$ ($\dfrac{a}{b\cdot a} = \dfrac{1}{b}$)

ÖRNEK 25 ⇒ $1 - 2\cdot \sin^2 15^\circ$ ifadesinin değerini hesaplayınız.

ÇÖZÜM ⇒ $1 - 2\cdot \sin^2 15^\circ$ ifadesine uygun trigonometrik özdeşliği belirledikten sonra bu ifadenin değerini hesaplayacağız.



$\cos\theta = \dfrac{\text{Komşu D.K.U}}{\text{HipotenüsU}}$

$1 - 2\cdot \sin^2 15^\circ = \cos(2\cdot 15^\circ)$ $\leftarrow$ ($\cos 2A = 1 - 2\cdot \sin^2 A$)

$= \cos 30^\circ$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ dir.

ALIŞTIRMA 10 ⇒ Aşağıdaki ifadelerin değerlerini trigonometrik özdeşlikleri kullanarak hesaplayınız.

(A) $2 \cdot \cos^2 15° - 1$ (B) $\cos^2 15° - \sin^2 15°$

Üç Kat Açı Özdeşlikleri

Üç Kat Açı Özdeşlikleri

$A \in R$ *ise,*

$$\sin 3A = 3 \cdot \sin A - 4 \cdot \sin^3 A$$

$$\cos 3A = 4 \cdot \cos^3 A - 3 \cdot \cos A$$

$$\tan 3A = \frac{3 \cdot \tan A - \tan^3 A}{1 - 3 \cdot \tan^2 A}$$

Bu bölümde sinüs ve kosinüs için üç kat açı özdeşliklerinin doğruluğunu göstereceğiz.

ÖRNEK 26 ⇒ $\sin 3A = 3 \cdot \sin A - 4 \cdot \sin^3 A$ özdeşliğinin doğruluğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM ⇒ Yukarıda yazılı özdeşliğin doğruluğunu göstermek için,

$\sin(A + B) = \sin A \cdot \cos B + \cos A \cdot \sin B$ ←(Sinüs için toplam özdeşliği)

$\sin 2A = 2 \cdot \sin A \cdot \cos A$ ← (Sinüs için iki kat açı özdeşliği)

$\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A$ ← (Kosinüs için iki kat açı özdeşliği)

$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

özdeşliklerini kullanacağız.

B=2A ise,

$$\sin 3A = \sin(A + 2A) = \sin A \cdot \cos 2A + \cos A \cdot \sin 2A$$

← (Sinüs için toplam özdeşliği)

$$= \sin A \cdot (1 - 2 \cdot \sin^2 A) + \cos A \cdot (2 \cdot \sin A \cdot \cos A)$$

← (Kosinüs ve sinüs ve için iki kat açı özdeşliği)

$= \sin A - 2 \cdot \sin^3 A + 2 \cdot \sin A \cdot \cos^2 A$

$= \sin A - 2 \cdot \sin^3 A + 2 \cdot \sin A \cdot (1 - \sin^2 A)$ ←($\cos^2 A = 1 - \sin^2 A$)

$= \sin A - 2 \cdot \sin^3 A + 2 \sin A - 2 \cdot \sin^3 A$

$= 3 \cdot \sin A - 4 \cdot \sin^3 A$ dır.

ÖRNEK 27 ➩ $\cos 3A = 4 \cdot \cos^3 A - 3 \cdot \cos A$ özdeşliğinin doğruluğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM ➩Yukarıda yazılı özdeşliğin doğruluğunu göstermek için,

$\cos(A + B) = \cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B$ ←(Kosinüs için toplam özdeşliği)

$\cos 2A = 2 \cdot \cos^2 A - 1$ ←(Kosinüs için iki kat açı özdeşliği)

$\sin 2A = 2 \cdot \sin A \cos A$ ←(Sinüs için iki kat açı özdeşliği)

$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

özdeşliklerini kullanacağız.

$\cos 3A = \cos(2A + A) = \cos 2A \cdot \cos A - \sin 2A \cdot \sin A$
←(Kosinüs için toplam özdeşliği)

$= (2 \cdot \cos^2 A - 1) \cdot \cos A - 2 \cdot \sin A \cdot \cos A \cdot \sin A$
←(Kosinüs ve sinüs için iki kat açı özdeşliği)

$= 2 \cdot \cos^3 A - \cos A - 2 \cdot \sin^2 A \cdot \cos A$

$= 2 \cdot \cos^3 A - \cos A - 2 \cdot (1 - \cos^2 A) \cdot \cos A$ ←($\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$)

$= 2 \cdot \cos^3 A - \cos A - 2 \cdot \cos A + 2 \cdot \cos^3 A$

$= 4 \cdot \cos^3 A - 3 \cdot \cos A$ dır.

$\tan 3A = \dfrac{3 \cdot \tan A - \tan^3 A}{1 - 3 \cdot \tan^2 A}$ özdeşliğinin doğruluğunu gösteriniz.

ALIŞTIRMA 11 ⇒ Aşağıda verilen ifadelerin değerlerini "üç kat açı özdeşliklerinden" yararlanarak hesaplayınız.

(A) $\sin 135°$ (B) $4 \cdot \cos^3 30° - 3 \cdot \cos 30°$ (C) $\tan 135°$

Yarım Açı Özdeşlikleri

Yarım Açı Özdeşlikleri

$A \in R$ *ise,*

$$\sin A = 2 \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{A}{2}$$

$$\cos A = \cos^2 \frac{A}{2} - \sin^2 \frac{A}{2}$$

$$\cos A = 2 \cdot \cos^2 \frac{A}{2} - 1$$

$$\cos A = 1 - 2 \cdot \sin^2 \frac{A}{2}$$

$$\tan A = \frac{2 \cdot \tan \frac{A}{2}}{1 - \tan^2 \frac{A}{2}}$$

$$\cot A = \frac{\cot^2 \frac{A}{2} - 1}{2 \cdot \cot \frac{A}{2}}$$

Yarım açı özdeşliklerinin doğruluklarını göstermek için "iki kat açı özdeşliklerini" kullanacağız.

ÖRNEK 28 ⇨ $A \in R$ ise, $\sin A = 2 \cdot \sin\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{A}{2}$ trigonometrik özdeşliğinin doğruluğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM ⇨ Yukarıda yazılı özdeşliğin doğruluğunu göstermek için, $B \in R$ ise, $\sin 2 \cdot B = 2 \cdot \sin B \cdot \cos B$ özdeşliğini kullanacağız.

$B = \frac{A}{2}$ alalım ve bir önceki trigonometrik özdeşlikte yerine koyalım:

$$\sin 2 \cdot \frac{A}{2} = 2 \cdot \sin\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{A}{2}$$

$$\sin A = 2\sin\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{A}{2} \text{ dir.}$$

ÖRNEK 29 ⇨ $A \in R$ ise, $\cos A = \cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2}$ trigonometrik özdeşliğinin doğruluğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM ⇨ Yukarıda yazılı olan trigonometrik özdeşliğin doğruluğunu göstermek için,

$$B \in R, \ \cos 2 \cdot B = \cos^2 B - \sin^2 B$$

özdeşliğini kullanacağız.

B yerine, $\frac{A}{2}$ yi bir önceki özdeşlikte yerine koyalım.

$$\cos 2 \cdot \frac{A}{2} = \cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2}$$

$$\cos A = \cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2} \text{ dir.}$$

ÖRNEK 30 ⇨ $A \in R$ ise, $\cos A = 1 - 2 \cdot \sin^2\frac{A}{2}$ özdeşliğinin doğruluğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM ⇨ Yukarıda yazılı özdeşliğin doğruluğunu göstermek için,

$$B \in R, \ \cos 2 \cdot B = 1 - 2 \cdot \sin^2 B$$

özdeşliğini kullanacağız.

B yerine, $\frac{A}{2}$ yi bir önceki özdeşlikte yerine koyalım.

$$\cos 2\cdot\frac{A}{2} = 1-2\cdot\sin^2\frac{A}{2}$$

$$\cos A = 1-2\cdot\sin^2\frac{A}{2} \text{ dir.}$$

ALIŞTIRMA 12⇨ Aşağıda verilen alıştırmaları yapınız.

(A) Aşağıda verilen ifadelerin değerlerini "yarım açı özdeşliklerinden" yararlanarak hesaplayınız.

(a) $\sin 90°$ (b) $\cos 90°$ (c) $\tan 60°$

(B) Aşağıda verilen özdeşliklerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $\cos A = 2\cdot\cos^2\frac{A}{2}-1$ (b) $\tan A = \dfrac{2\cdot\tan\frac{A}{2}}{1-\tan^2\frac{A}{2}}$

(c) $\cot A = \dfrac{\cot^2\frac{A}{2}-1}{2\cdot\cot\frac{A}{2}}$

ÖRNEK 31 ⇨ sinA ifadesini, $\tan\frac{A}{2}$ cinsinden hesaplayınız.

ÇÖZÜM ⇨ Yukarıda verilen soruyu $\sin A = 2\cdot\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}$ ve $1=\cos^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{A}{2}$ özdeşliklerini kullanarak çözelim:

$$\frac{\sin A}{1} = \frac{2\cdot\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{A}{2}}$$ ←(Verilen ifadeleri taraf tarafa bölme)

$$\sin A = \frac{\dfrac{2\cdot\sin\dfrac{A}{2}\cdot\cos\dfrac{A}{2}}{\cos^2\dfrac{A}{2}}}{\dfrac{\cos^2\dfrac{A}{2}+\sin^2\dfrac{A}{2}}{\cos^2\dfrac{A}{2}}}$$

$\leftarrow$(İfadenin pay ve paydasını $\cos^2\dfrac{A}{2}$ ile bölme)

$$= \frac{\dfrac{2\cdot\sin\dfrac{A}{2}\cdot\cos\dfrac{A}{2}}{\cos\dfrac{A}{2}\cdot\cos\dfrac{A}{2}}}{\dfrac{\cos^2\dfrac{A}{2}}{\cos^2\dfrac{A}{2}}+\dfrac{\sin^2\dfrac{A}{2}}{\cos^2\dfrac{A}{2}}} \quad \leftarrow \left(\frac{a\cdot b}{c\cdot b}=\frac{a}{c} \text{ ve } \frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)$$

$$= \frac{2\cdot\dfrac{\sin\dfrac{A}{2}}{\cos\dfrac{A}{2}}}{1+\dfrac{\sin^2\dfrac{A}{2}}{\cos^2\dfrac{A}{2}}} \quad \leftarrow \text{(Sadeleştirme)}$$

$$= \frac{2\cdot\tan\dfrac{A}{2}}{1+\tan^2\dfrac{A}{2}} \text{ dir.} \leftarrow \left(\tan B=\frac{\sin B}{\cos B} \text{ ve } \tan^2 B=\left(\frac{\sin B}{\cos B}\right)^2=\frac{\sin^2 B}{\cos^2 B}\right)$$

$\cos A = \dfrac{1-\tan^2\dfrac{A}{2}}{1+\tan^2\dfrac{A}{2}}$ ifadesinin doğruluğunu gösteriniz.

◆ *TOPLAM-ÇARPIM ÖZDEŞLİKLERİ*

Toplam-Çarpım Özdeşlikleri

x,y ∈R ise,

$$\sin x+\sin y=2\cdot\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$$
$$\sin x-\sin y=2\cdot\sin\frac{x-y}{2}\cdot\cos\frac{x+y}{2}$$
$$\cos x+\cos y=2\cdot\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x-\cos y=-2\cdot\sin\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2}$$
$$\tan x+\tan y=\frac{\sin(x+y)}{\cos x\cdot\cos y}$$
$$\tan x-\tan y=\frac{\sin(x-y)}{\cos x\cdot\cos y}$$
$$\cot x+\cot y=\frac{\sin(x+y)}{\sin x\cdot\sin y}$$
$$\cot x-\cot y=\frac{\sin(y-x)}{\sin x\cdot\sin y}$$

Uyarı: Ders notunuzda doğruluğu gösterilen ve gösterilmeyen toplam-çarpım özdeşliklerinin doğruluklarını gösteriniz.

ÖRNEK 32 ⇒ $\sin x+\sin y=2\cdot\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$ özdeşliğinin doğruluğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM ⇒

$$\left.\begin{array}{r}\sin(\mathrm{A}+\mathrm{B})=\sin\mathrm{A}\cdot\cos\mathrm{B}+\cos\mathrm{A}\cdot\sin\mathrm{B}\\ +\ \sin(\mathrm{A}-\mathrm{B})=\sin\mathrm{A}\cdot\cos\mathrm{B}-\cos\mathrm{A}\cdot\sin\mathrm{B}\\ \hline\end{array}\right\}$$ ifadeleri taraf tarafa toplanırsa,

$$\sin(A+B)+\sin(A-B)=\sin A\cdot\cos B+\sin A\cdot\cos B+\cos A\cdot\sin B-\cos A\cdot\sin B$$

$$\sin(A+B)+\sin(A-B)=2\sin A\cdot\cos B\ \ldots\ (*)$$

$$\begin{array}{r} A+B=x \\ +\quad A-B=y \\ \hline \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} A+B=x \\ -\quad A-B=y \\ \hline \end{array}$$

$$2A+B-B=x+y \qquad\qquad (A+B)-(A-B)=x-y$$
$$2A=x+y \qquad\qquad A+B-A+B=x-y$$
$$A=\frac{x+y}{2} \qquad\qquad B=\frac{x-y}{2}$$

$$A+B=\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}=\frac{x+y+x-y}{2}=\frac{2x}{2}=x$$

$$A-B=\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}=\frac{x+y-(x-y)}{2}=\frac{x+y-x+y}{2}=\frac{2y}{2}=y \text{ dir.}$$

A, B, $(A+B)$ ve $(A-B)$ değerlerini, (*) da yerlerine yazalım:

$$\sin x+\sin y=2\cdot\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2} \text{ olur.}$$

ÖRNEK 33 ⇨ $\sin x-\sin y=2\cdot\sin\frac{x-y}{2}\cdot\cos\frac{x+y}{2}$ özdeşliğinin doğruluğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM ⇨

$$\left.\begin{array}{r} \sin(\mathrm{A}+\mathrm{B})=\sin\mathrm{A}\cdot\cos\mathrm{B}+\cos\mathrm{A}\cdot\sin\mathrm{B} \\ -\sin(\mathrm{A}-\mathrm{B})=\sin\mathrm{A}\cdot\cos\mathrm{B}-\cos\mathrm{A}\cdot\sin\mathrm{B} \end{array}\right\} \text{ifadeleri taraf tarafa çıkarılırsa}$$

$$\sin(\mathrm{A}+\mathrm{B})-\sin(\mathrm{A}-\mathrm{B})=\sin\mathrm{A}\cdot\cos\mathrm{B}-\sin\mathrm{A}\cdot\cos\mathrm{B}+\cos\mathrm{A}\cdot\sin\mathrm{B}-(-\cos\mathrm{A}\cdot\sin\mathrm{B})$$
$$\sin(A+B)-\sin(A-B)=2\cos A\cdot\sin B$$
$$=2\cdot\sin\mathrm{B}\cdot\cos\mathrm{A} \text{ olur.}$$

Bir önceki özdeşliğin doğruluğunu gösterirken bulmuş olduğumuz

$$A=\frac{x+y}{2} \qquad B=\frac{x-y}{2} \qquad A+B=x \qquad A-B=y$$

ifadelerini,

$$\sin(\mathrm{A}+\mathrm{B})-\sin(\mathrm{A}-\mathrm{B})=2\cdot\sin\mathrm{B}\cdot\cos\mathrm{A}$$

eşitliğinde yerlerine koyalım:

$$\sin\mathrm{x}-\sin\mathrm{y}=2\cdot\sin\frac{\mathrm{x}-\mathrm{y}}{2}\cdot\cos\frac{\mathrm{x}+\mathrm{y}}{2} \text{ olur.}$$

ÖRNEK 34 ⇒ $\tan x + \tan y = \dfrac{\sin(x+y)}{\cos x \cdot \cos y}$ özdeşliğinin doğruluğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM ⇒ $\tan x + \tan y = \dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\sin y}{\cos y}$ ← $(\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A})$

$$= \frac{\sin x}{\underset{(\cos y)}{\cos x}} + \frac{\sin y}{\underset{(\cos x)}{\cos y}}$$ ← (Rasyonel sayılarda payda eşitleme)

$$= \frac{\sin x \cdot \cos y}{\cos x \cdot \cos y} + \frac{\sin y \cdot \cos x}{\cos y \cdot \cos x}$$

$$= \frac{\sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x}{\cos x \cdot \cos y}$$

← $(\sin(A+B) = \sin A \cdot \cos B + \sin B \cdot \cos A)$

$$= \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cdot \cos y} \text{ dir.}$$

ÖRNEK 35 ⇒ $\sin 75^\circ + \sin 15^\circ$ ifadesinin değerini hesaplayınız.

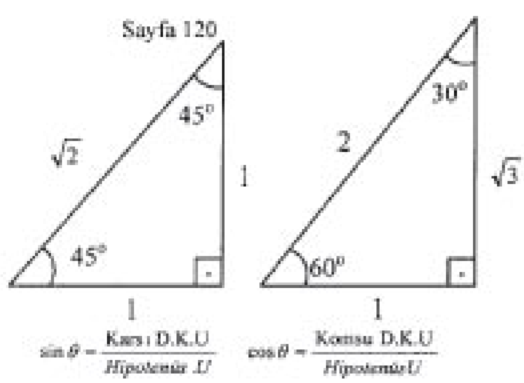
ÇÖZÜM ⇒ Yukarıdaki ifadenin değerini bulmak için, toplam-çarpım özdeşliklerinden,

$$\sin A + \sin B = 2 \cdot \sin \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} \qquad \ldots(*)$$

ifadesinden yararlanacağız.

$A = 75^\circ$ ve $B = 15^\circ$ değerlerini (*) da yerine koyalım:

$$\sin 75^\circ + \sin 15^\circ = 2 \cdot \sin \frac{75^\circ + 15^\circ}{2} \cdot \cos \frac{75^\circ - 15^\circ}{2}$$



$\sin\theta = \dfrac{\text{Karşı D.K.U}}{\text{Hipotenüs U}}$ $\cos\theta = \dfrac{\text{Komşu D.K.U}}{\text{Hipotenüs U}}$

$$= 2 \cdot \sin \frac{90^\circ}{2} \cdot \cos \frac{60^\circ}{2}$$

$$= 2 \cdot \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ$$

$$= 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ dir.}$$

$(\sin 45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ve $\cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2})$

ALIŞTIRMA 13⇨ Aşağıda verilen ifadelerin değerlerini hesaplayınız.

(A) $\cos 75^\circ + \cos 15^\circ$ (B) $\sin 45^\circ - \sin 15^\circ$

ÖRNEK 36 ⇨ $x = \dfrac{\pi}{4}$ ise, $\dfrac{\sin 4x - \sin 2x}{\cos 4x + \cos 2x}$ ifadesinin değerini hesaplayınız.

ÇÖZÜM ⇨ Yukarıda yazılı olan ifadenin $x=\dfrac{\pi}{4}$ deki değerini bulmak için,

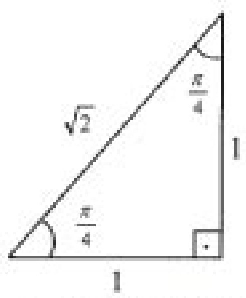
$$\sin A - \sin B = 2 \cdot \sin \frac{A-B}{2} \cdot \cos \frac{A+B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cdot \cos \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2}$$

özdeşliklerinden yararlanacağız.

$A = 4x$ ve $B = 2x$ ise,

$$\frac{\sin 4x - \sin 2x}{\cos 4x + \cos 2x} = \frac{2 \cdot \sin \dfrac{4x-2x}{2} \cdot \cos \dfrac{4x+2x}{2}}{2 \cdot \cos \dfrac{4x+2x}{2} \cdot \cos \dfrac{4x-2x}{2}}$$



$\tan\theta = \dfrac{\text{Karşı Dik kenar U}}{\text{Komşu Dik Kenar U}}$

$$= \frac{2 \cdot \sin \dfrac{2x}{2} \cdot \cos \dfrac{6x}{2}}{2 \cdot \cos \dfrac{6x}{2} \cdot \cos \dfrac{2x}{2}}$$

$$= \frac{2 \cdot \sin x \cdot \cos 3x}{2 \cdot \cos 3x \cdot \cos x}$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x \text{ tir.}$$

O halde, $x = \dfrac{\pi}{4}$ ise, verilen ifadenin değeri $\tan x = \tan \dfrac{\pi}{4} = 1$ olur.

ALIŞTIRMA 14 ⇨ $x = \dfrac{\pi}{15}$ ise, $\dfrac{\cos 6x + \cos 4x}{\sin 6x + \sin 4x}$ ifadesinin değerini hesaplayınız.

ÖRNEK 37 ⇨ $\frac{1}{2}\cdot\left(\cot 15^\circ + \cot 75^\circ\right)$ ifadesinin değerini hesaplayınız.

ÇÖZÜM ⇨ Yukarıda yazılı ifadenin değerini hesaplamak için kotanjant için toplam-çarpım özdeşliğini kullanacağız:

$$\cot A + \cot B = \frac{\sin(A+B)}{\sin A \cdot \sin B} \quad \ldots (*)$$

$A = 15^o$ ve $B = 75^o$ değerlerini (*) da yerlerine koyalım:

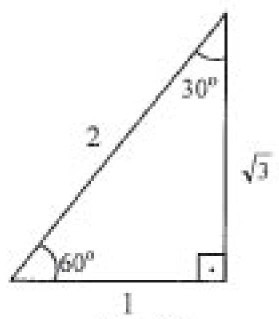
$$\frac{1}{2}\cdot\left(\cot 15^\circ + \cot 75^\circ\right) = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{\sin(15^\circ + 75^\circ)}{\sin 15^\circ \cdot \sin 75^\circ}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{\sin 90^o}{\sin 15^\circ \cdot \cos(90^\circ - 75^\circ)}\right] \quad \leftarrow (\sin 0 = \cos(90^o - 0))$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{\sin 90^o}{\sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ}\right]$$

$$= \frac{\sin 90^\circ}{2\cdot\sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ}$$

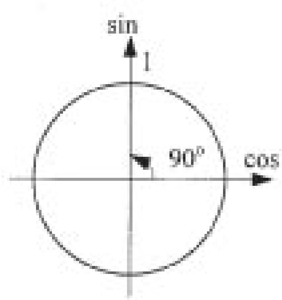
$$= \frac{\sin 90^o}{\sin(2\cdot 15^\circ)} \quad \leftarrow (\sin 2A = 2\cdot\sin A\cdot\cos A)$$



$\sin\theta = \frac{\text{Karşı D.K.U}}{\text{Hipotenüs U}}$

$$= \frac{\sin 90^o}{\sin 30^o}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}} \quad \leftarrow \left(\sin 90^o = 1 \text{ ve } \sin 30^o = \frac{1}{2}\right)$$



$=2$ dir. $\quad \leftarrow \left(\frac{1}{\frac{a}{b}} = 1\cdot\frac{b}{a} = \frac{b}{a}\right)$

ALIŞTIRMA 15⇨ Aşağıdaki ifadelerin değerlerini hesaplayınız.
(A) $\tan 75^\circ - \tan 15^\circ$ (B) $\cot 15^\circ - \cot 75^\circ$

◆ ÇARPIM-TOPLAM ÖZDEŞLİKLERİ

Çarpım-Toplam Özdeşlikleri

$A, B \in R$ *ise,*

$$\sin A \cdot \cos B = \frac{1}{2} \cdot [\sin(A+B) + \sin(A-B)]$$

$$\cos A \cdot \sin B = \frac{1}{2} \cdot [\sin(A+B) - \sin(A-B)]$$

$$\cos A \cdot \cos B = \frac{1}{2} \cdot [\cos(A+B) + \cos(A-B)]$$

$$\sin A \cdot \sin B = -\frac{1}{2} \cdot [\cos(A+B) - \cos(A-B)]$$

Yukarıda yazılı olan çarpım-toplam özdeşliklerinin doğruluğunu gösterirken, aşağıda verilmiş olan toplam-fark özdeşliklerini kullanacağız.

(I) $\sin(A+B) = \sin A \cdot \cos B + \cos A \cdot \sin B$

(II) $\sin(A-B) = \sin A \cdot \cos B - \cos A \cdot \sin B$

(III) $\cos(A+B) = \cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B$

(IV) $\cos(A-B) = \cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B$

ÖRNEK 38 ➾ $\sin A \cdot \cos B = \frac{1}{2} \cdot [\sin(A+B) + \sin(A-B)]$ çarpım-toplam özdeşliğinin doğruluğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM ➾ Yukarıda verilen (I)ve (II) özdeşliklerini taraf tarafa toplayalım:

$$\begin{array}{l} \sin(A+B) = \sin A \cdot \cos B + \cos A \cdot \sin B \\ \sin(A-B) = \sin A \cdot \cos B - \cos A \cdot \sin B \\ + \\ \hline \end{array}$$

$$\sin(A+B) + \sin(A-B) = \sin A \cdot \cos B + \sin A \cdot \cos B + \cos A \cdot \sin B - \cos A \cdot \sin B$$

$$\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2 \cdot \sin A \cdot \cos B + 0$$

←(Eşitliğin her iki tarafını $\frac{1}{2}$ ile çarpma)

$$\frac{1}{2}\cdot\left[\sin(A+B)+\sin(A-B)\right]=\frac{1}{2}\cdot\left[2\cdot\sin A\cdot\cos B\right]$$

$$=\sin A\cdot\cos B \text{ dir.}$$

O halde, $\sin A\cdot\cos B=\frac{1}{2}\cdot\left[\sin(A+B)+\sin(A-B)\right]$ dir.

> $\cos A\cdot\sin B=\frac{1}{2}\cdot\left[\sin(A+B)-\sin(A-B)\right]$ özdeşliğinin doğruluğunu gösteriniz.

ÖRNEK 39 ⇨ $\sin A\cdot\sin B=-\frac{1}{2}\cdot\left[\cos(A+B)-\cos(A-B)\right]$ çarpım-toplam özdeşliğinin doğruluğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM ⇨ III ve IV toplam-fark özdeşliklerini taraf tarafa çıkaralım:

$$\left.\begin{array}{rl} & \cos(A+B)=\cos A\cdot\cos B-\sin A\cdot\sin B \\ - & \cos(A-B)=\cos A\cdot\cos B+\sin A\cdot\sin B \end{array}\right\}\text{ ifadeleri taraf tarafa çıkarılırsa}$$

$$\cos(A+B)-\cos(A-B)=(\cos A\cdot\cos B-\sin A\cdot\sin B)-(\cos A\cdot\cos B+\sin A\cdot\sin B)$$

$$\cos(A+B)-\cos(A-B)=\cos A\cdot\cos B-\sin A\cdot\sin B-\cos A\cdot\cos B-\sin A\cdot\sin B$$

$$\cos(A+B)-\cos(A-B)=-2\cdot\sin A\cdot\sin B$$

←(Eşitliğin her iki tarafını $-\frac{1}{2}$ ile çarpma)

$$-\frac{1}{2}\cdot\left[\cos(A+B)-\cos(A-B)\right]=-\frac{1}{2}\cdot(-2\cdot\sin A\cdot\sin B) \qquad \leftarrow\left(-\frac{1}{a}\cdot(-a)=\frac{a}{a}=1\right)$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\left[\cos(A+B)-\cos(A-B)\right]=\sin A\cdot\sin B$$

O halde, $\sin A\cdot\sin B=-\frac{1}{2}\cdot\left[\cos(A+B)-\cos(A-B)\right]$dir.

$$\cos A \cdot \cos B = \frac{1}{2} \cdot \left[\cos(A+B) + \cos(A-B)\right]$$ özdeşliğinin doğruluğunu gösteriniz.

ÖRNEK 40 ⇨ $\dfrac{2 \cdot \sin 155^\circ \cdot \cos 25^\circ}{\sin 130^\circ}$ ifadesinin değerini hesaplayınız.

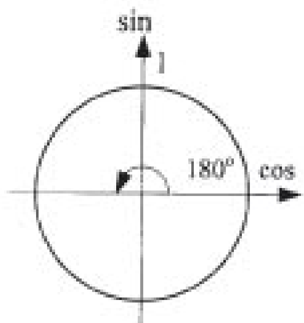
ÇÖZÜM ⇨ Yukarıda yazılı ifadenin değerini hesaplamak için çarpım-toplam özdeşliklerini incelediğimiz zaman, ifadenin

$$\sin A \cdot \cos B = \frac{1}{2} \cdot \left[\sin(A+B) + \sin(A-B)\right] \ldots \quad (*)$$

özdeşliğine benzediği görülmektedir.

A=155° ve B=25° değerlerini (*) da yerlerine koyalım:

$$\frac{2 \cdot \sin 155^\circ \cdot \cos 25^\circ}{\sin 130^\circ} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[\sin(155^\circ + 25^\circ) + \sin(155^\circ - 25^\circ)\right]}{\sin 130^\circ}$$



$$= \frac{\sin 180^\circ + \sin 130^\circ}{\sin 130^\circ} \qquad \leftarrow (\sin 180^\circ = 0)$$

$$= \frac{\sin 130^\circ}{\sin 130^\circ}$$

$=1$ dir.

ALIŞTIRMA 16⇨ Aşağıdaki ifadelerin değerlerini hesaplayınız.

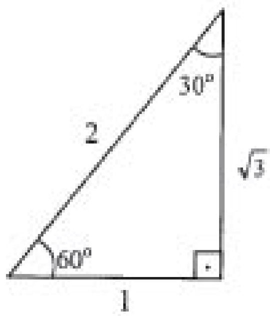
(A) $\dfrac{2 \cdot \cos 68^\circ \cdot \cos 22^\circ}{3 \cdot \cos 46^\circ}$ (B) $\dfrac{4 \cdot \cos 95^\circ \cdot \sin 85^\circ}{\sin 10^\circ}$

ÖRNEK 41 ➪ $4 \cdot \sin 50^\circ - \dfrac{1}{\cos 20^\circ}$ ifadesinin değerini hesaplayınız.

ÇÖZÜM ➪ $\dfrac{4 \cdot \sin 50^\circ}{\underset{(\cos 20^\circ)}{1}} - \dfrac{1}{\cos 20^\circ} = \dfrac{4 \cdot \sin 50^\circ \cdot \cos 20^\circ - 1}{\cos 20^\circ}$

← ($\sin A \cdot \cos B = \dfrac{1}{2} \cdot [\sin(A+B) + \sin(A-B)]$)

$$= \frac{4 \cdot \frac{1}{2}[\sin(50^\circ + 20^\circ) + \sin(50^\circ - 20^\circ)] - 1}{\cos 20^\circ}$$



$\sin\theta = \dfrac{\text{Karşı D.K.U}}{\text{Hipotenüs U}}$

$$= \frac{2 \cdot \sin 70^\circ + 2 \cdot \sin 30^\circ - 1}{\cos 20^\circ}$$

$$= \frac{2 \cdot \sin 70^\circ + 2 \cdot \frac{1}{2} - 1}{\cos 20^\circ}$$

$$= \frac{2 \cdot \sin 70^\circ + 1 - 1}{\cos 20^\circ}$$

$$= \frac{2 \cdot \sin 70^\circ}{\cos 20^\circ} \text{ dir.}$$

← (Birbirini 90° ye tümleyen iki açının ölçülerinden birinin kosinüsü diğerinin sinüsüne eşittir. $\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$)

$$= \frac{2 \cdot \sin 70^\circ}{\sin 70^\circ}$$ ← (Sadeleştirme)

$= 2$ dir.

ÖRNEK 42 ➪ $A \in R$ ise, $1 + \sin A$ ifadesini, toplam-çarpım özdeşliği şeklinde yazınız.

ÇÖZÜM ➪ $\sin\dfrac{\pi}{2} = 1$ olduğuna göre,

$1 + \sin A = \sin\dfrac{\pi}{2} + \sin A$ dır.

← ($\sin x + \sin y = 2 \cdot \sin\dfrac{x+y}{2} \cdot \cos\dfrac{x-y}{2}$; $x = \dfrac{\pi}{2}$, $y = A$)

$$=2\cdot\sin\frac{\frac{\pi}{2}+A}{2}\cdot\cos\frac{\frac{\pi}{2}-A}{2} \qquad \leftarrow\left(\frac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}{e}=\frac{a}{b\cdot e}+\frac{c}{d\cdot e}\right)$$

$$=2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A}{2}\right)$$

$$=2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A}{2}\right)\cdot\sin\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A}{2}\right)\right] \leftarrow\left(\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)$$

$$=2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}+\frac{A}{2}\right)$$

$$\leftarrow\left(\underset{(2)}{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{4}+\frac{A}{2}=\frac{2\pi}{4}-\frac{\pi}{4}+\frac{A}{2}=\frac{\pi}{4}+\frac{A}{2}\right)$$

$$=2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A}{2}\right) \qquad \leftarrow\left(\sin x\cdot\sin x=\sin^2 x\right)$$

$$=2\cdot\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A}{2}\right)\text{dir.}$$

ÖRNEK 43 ➫ $A\in R$ ise, $1+\cos A$ ifadesini toplam-çarpım özdeşliği şeklinde yazınız.

ÇÖZÜM ➫ $1+\cos A=1+(2\cdot\cos^2\frac{A}{2}-1)$ $\qquad\leftarrow\left(\cos A=2\cdot\cos^2\frac{A}{2}-1\right)$

$$=1+2\cos^2\frac{A}{2}-1$$

$$=2\cos^2\frac{A}{2}\ \text{dir.}$$

ALIŞTIRMA 17 ➫ Aşağıdaki ifadelerin değerlerini çarpım-toplam özdeşliklerini kullanarak hesaplayınız:

(A) $\cos 45^{\circ}\cdot\cos 15^{\circ}$ (B) $\sin 45^{\circ}\cdot\sin 15^{\circ}$ (C) $\cos 45^{\circ}\cdot\sin 15^{\circ}$

Aşağıdaki ifadelerin doğruluğunu gösteriniz:

$$1+\tan A=\frac{\sqrt{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}+A\right)}{\cos A}$$

$$1+\cot A=\frac{\sqrt{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}+A\right)}{\sin A}$$

Not: $\tan\frac{\pi}{4}=1$ ve $\cot\frac{\pi}{4}=1$ dir.

ÖRNEK 44 ⇨ $A\in R$ ise, $1-\sin A$ ifadesini toplam-çarpım özdeşliği şeklinde yazınız.

ÇÖZÜM ⇨ $1-\sin A=\sin\frac{\pi}{2}-\sin A$ $\leftarrow(\sin\frac{\pi}{2}=1)$

$$=2\cdot\sin\frac{\frac{\pi}{2}-A}{2}\cdot\cos\frac{\frac{\pi}{2}+A}{2} \quad \leftarrow(\sin x-\sin y=2\cdot\sin\frac{x-y}{2}\cdot\cos\frac{x+y}{2})$$

$$=2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A}{2}\right) \quad \leftarrow(\cos(\frac{\pi}{2}-x)=\sin x)$$

$$=2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A}{2}\right)\cdot\sin\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A}{2}\right)\right]$$

$$=2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}-\frac{A}{2}\right) \quad \leftarrow(\underset{(2)}{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{4}=\frac{2\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4})$$

$$=2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A}{2}\right) \quad \leftarrow(\sin x\cdot\sin x=\sin^2 x)$$

$$=2\cdot\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A}{2}\right)$$

$1-\cos A$, $1-\tan A$ ve $1-\cot A$ ifadelerini toplam-çarpım özdeşlikleri şeklinde yazınız.

◆ TRİGONOMETRİK DENKLEMLERİN ANLAMI

Bilinmeyene verilen bazı reel sayı değerleri için sağlanan açık önermelere **denklem** denir.

Denklemi sağlayan reel sayı değerlerine, **denklemin kökü** denir. Denklemin köklerini bulmak için yapılan işlemlere, denklemi çözme denir.

Denklemin köklerinin kümesine, **denklemin çözüm kümesi** denir.

Trigonometrik Denklemler

Eğer denklemde bilinmeyen, trigonometrik fonksiyon (sinüs, kosinüs, tanjant, kotanjant, sekant, kosekant) ise bu denkleme **trigonometrik denklem** denir.

ÖRNEK 45 ⇨ $\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$ önermesi bir özdeşliktir. x e verilen her reel sayı için eşitlik sağlanır. Bu nedenle,

$$\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$$

bir özdeşliktir.

ÖRNEK 46 ⇨ $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ açık önermesi bir denklemdir. Çünkü bu önerme sadece

$$\left\{ x : x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \quad \vee \quad x = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi \;, \quad k \in Z \right\}$$

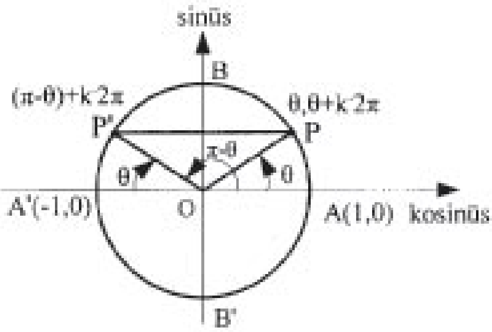
için doğrudur. Başka bir deyişle, her reel sayı için eşitlik sağlanmamaktadır.

O halde,

$\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ bir denklemdir.

sin x=a, cos x=a, tan x=a ve cot x=a BİÇİMİNDEKİ DENKLEMLER

$a \in R$ **ve** $-1 \le a \le 1$ **Olmak Üzere,** $\sin x = a$ **Denkleminin Çözümü**



Yandaki birim çemberde belirtilenleri inceleyiniz.

$\theta \in R$, $0 \le \theta < 2\pi$, $k \in Z$ dir.

$\sin\theta = a$, $\sin(\theta + k \cdot 2\pi) = a$,

$\leftarrow(\sin A = \sin(A + k \cdot 2\pi))$

$\sin[(\pi - \theta) + k \cdot 2\pi] = a$ dır.

O halde, $0 \le \theta < 2\pi$ olmak üzere,

$\sin x = a$ ve $\sin\theta = a$ ise $\sin x = \sin\theta$,

$x = \theta + k \cdot 2\pi \quad \vee \quad x = (\pi - \theta) + k \cdot 2\pi$ dir. ($\vee$: veya)

$\sin x = a$ denkleminin çözüm kümesi,

$Ç = \{x : x = \theta + k \cdot 2\pi \quad \vee \quad x = (\pi - \theta) + k \cdot 2\pi, \quad k \in Z\}$ olur.

$x = \theta + k \cdot 2\pi$ ve $x = (\pi - \theta) + k \cdot 2\pi$ eşitliklerinde, k yerine yazılan her tamsayı için, x in bir değeri bulunur.

$k = 0$ için, $x = \theta + k \cdot 2\pi$ eşitliğinden, $x = \theta$;

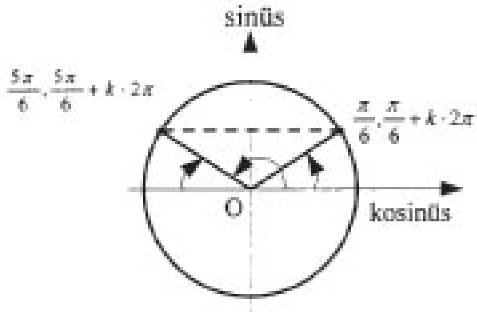
$x = (\pi - \theta) + k \cdot 2\pi$ eşitliğinden, $x = \pi - \theta$ bulunur.

$k = 1$ için, $x = \theta + k \cdot 2\pi$ eşitliğinden $x = \theta + 2\pi$;

$x = (\pi - \theta) + k \cdot 2\pi$ eşitliğinden, $x = (\pi - \theta) + 2\pi = 3\pi - \theta$ bulunur.

ÖRNEK 47 ➾ $\sin x = \frac{1}{2}$ denkleminin R deki çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM ➾ Bir sonraki sayfada verilen birim çemberi inceleyelim. Önce sinüsü $\frac{1}{2}$ olan $0 \le \theta < 2\pi(\theta \in R)$ aralığındaki açıların ölçüsünü bulalım:



$$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{6}$$

$$\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=\frac{5\pi}{6} \text{ dır.}$$

$\sin x=\frac{1}{2}$ denkleminin köklerini bulalım:

$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ ve $\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}$ olduğundan, $\sin x=\frac{1}{2}$ denkleminin kökleri,

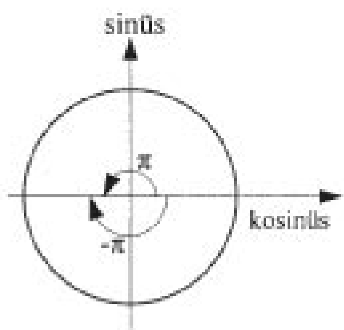
$$k\in Z,\quad x=\frac{\pi}{6}+k\cdot 2\pi \quad \vee \quad x=\frac{5\pi}{6}+k\cdot 2\pi \text{ dir.}$$

O halde, $\sin x=\frac{1}{2}$ denkleminin R deki çözüm kümesi,

$$Ç=\left\{x : x=\frac{\pi}{6}+k\cdot 2\pi \quad \vee \quad x=\frac{5\pi}{6}+k\cdot 2\pi,\quad k\in Z\right\} \text{ dir.}$$

ÖRNEK 48 ⇛ $\sin x=0$ denkleminin R deki çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM ⇛ Aşağıda verilmiş olan birim çemberi inceleyelim:



Önce sinüsü sıfır olan

$0\le\theta<2\pi \qquad (\theta\in R)$

aralığındaki açıların ölçüsünü bulalım:

$\sin 0=0\Rightarrow\theta=0$

$\sin\pi=0\Rightarrow\theta=\pi$ dir.

$\sin x=0$ denkleminin köklerini bulalım:

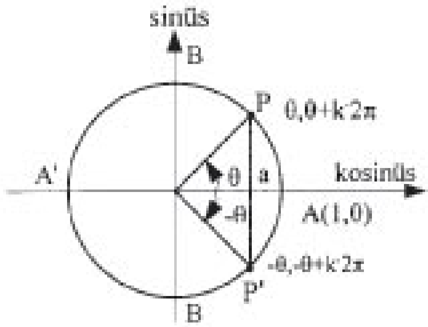
$\sin 0=0$ ve $\sin(\pi-0)=\sin\pi=0$ olduğundan $\sin x=0$ denkleminin kökleri, $k\in Z$, $x=k\cdot\pi$ dir.

Sonuç olarak, $\sin x=0$ denkleminin çözüm kümesi,

$$Ç=\{x : x=k\cdot\pi,\quad k\in Z\} \text{ dir.}$$

ALIŞTIRMA 18 ⇨ $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ denkleminin R deki çözüm kümesini bulunuz.

$a \in R$ ve $-1 \le a \le 1$ Olmak Üzere, $\cos x = a$ Denkleminin Çözümü



Yanda verilmiş olan birim çemberi inceleyelim:

$\theta \in R$, $0 \le \theta < 2\pi$, $k \in Z$ dir.

$\cos\theta = a$, $\cos(\theta + k \cdot 2\pi) = a$,

$\cos(-\theta + k \cdot 2\pi) = a$ dır.

O halde,

$0 \le \theta < 2\pi$ olmak üzere,

$\cos x = a$ ve $\cos\theta = a$ ise, $\cos x = \cos\theta$,

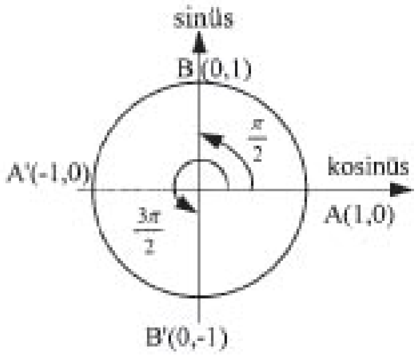
$$x = \theta + k \cdot 2\pi \quad \vee \quad x = -\theta + k \cdot 2\pi \text{ dir.}$$

Sonuç olarak, $\cos x = a$ denkleminin R deki çözüm kümesi,

$$Ç = \{x : x = \theta + k \cdot 2\pi \quad \vee \quad x = -\theta + k \cdot 2\pi, \quad k \in Z\} \text{dir.}$$

ÖRNEK 49 ⇨ $\cos x = 0$ denkleminin R deki çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ Aşağıda verilen birim çemberi inceleyelim:



Önce kosinüsü 0 olan, $0 \le \theta < 2\pi$ $(\theta \in R)$ aralığındaki açıların ölçülerini bulalım:

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\cos\frac{3\pi}{2} = 0 \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{2}$$

$\cos x = 0$ denkleminin köklerini bulalım:

$\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$, $\cos\dfrac{3\pi}{2} = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi\right) = 0$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\pi\right) = \cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ ve $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-2\pi\right) = \cos\left(-\dfrac{3\pi}{2}\right) = 0$ dır.

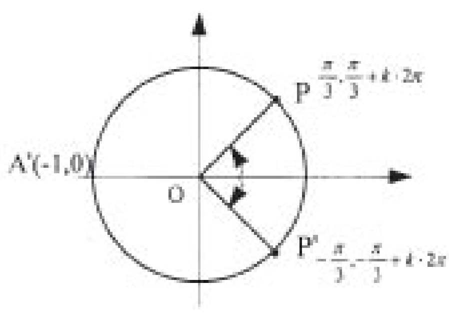
$k \in Z$ için , $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+k\cdot\pi\right) = 0$ olduğundan, $\cos x = 0$ denkleminin kökleri , $x = \dfrac{\pi}{2} + k\cdot\pi = (2k+1)\cdot\dfrac{\pi}{2}$ dir.

Sonuç olarak, $\cos x = 0$ denkleminin R deki çözüm kümesi,

$$Ç = \left\{x : x = (2k+1)\cdot\frac{\pi}{2},\ k \in Z\right\} \text{ dir.}$$

ÖRNEK 50 ⇒ $\cos x = \dfrac{1}{2}$ denkleminin R deki çözüm kümesini bulunuz.

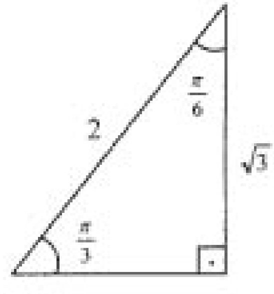
ÇÖZÜM ⇒ Aşağıda verilmiş olan birim çemberi inceleyelim:



Önce kosinüsü $\dfrac{1}{2}$ olan $0 \le \theta < 2\pi$ $(\theta \in R)$ aralığındaki açıların ölçüsünü bulalım:

$\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{3}$

$\cos\dfrac{5\pi}{3} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \theta = \dfrac{5\pi}{3}$



$\cos\theta = \dfrac{\text{Komşu D.K.U}}{\textit{HipotenüsU}}$

$\cos x = \dfrac{1}{2}$ denkleminin köklerini bulalım:

$\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$ ve $\cos\dfrac{5\pi}{3} = \cos\left(-\dfrac{\pi}{3} + 2\pi\right) = \dfrac{1}{2}$ olduğundan $\cos x = \dfrac{1}{2}$ denkleminin kökleri,

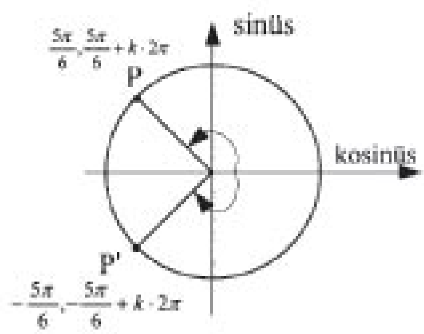
$$k \in Z\,,\; x = \frac{\pi}{3} + k\cdot 2\pi \quad \vee \quad x = \frac{-\pi}{3} + k\cdot 2\pi \text{ dir.}$$

O halde, $\cos x = \dfrac{1}{2}$ denkleminin R deki çözüm kümesi,

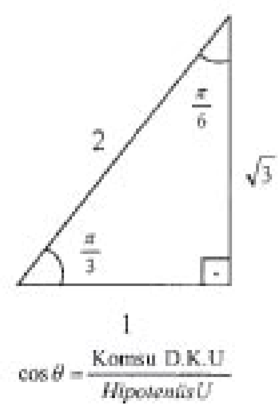
$$Ç = \left\{ x : x = \frac{\pi}{3} + k\cdot 2\pi \quad \vee \quad x = \frac{-\pi}{3} + k\cdot 2\pi\,,\; k \in Z \right\} \text{ dir.}$$

ÖRNEK 51⇒ $\cos x = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$ denkleminin R deki çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM ⇒ Aşağıda verilmiş olan birim çemberi inceleyelim:



Önce kosinüsü $\dfrac{-\sqrt{3}}{2}$ olan $0 \le \theta < 2\pi \quad (\theta \in R)$ aralığındaki açıların ölçülerini bulalım.



$$\cos\frac{5\pi}{6} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{6}$$

$$\cos\left(\frac{-5\pi}{6}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{-5\pi}{6}$$

$\cos x = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$ denkleminin kökleri,

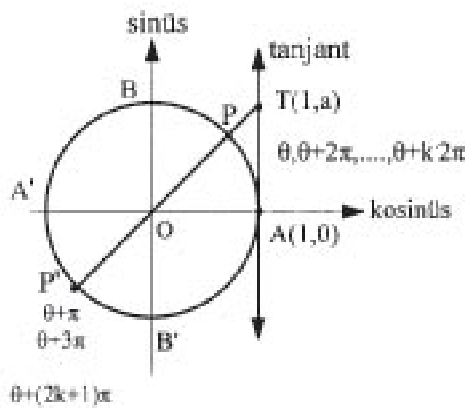
$$k \in Z\,,\ x = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi \quad \vee \quad x = \frac{-5\pi}{6} + k \cdot 2\pi \ \text{dir.}$$

O halde, $\cos x = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$ denkleminin R deki çözüm kümesi,

$$Ç = \left\{ x : x = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi \quad \vee \quad x = \frac{-5\pi}{6} + k \cdot 2\pi \right\} \ \text{dir.}$$

ALIŞTIRMA 19 ➭ $\cos x = -1$ denkleminin R deki çözüm kümesini bulunuz.

$a \in R$ Olmak Üzere $\tan x = a$ Denkleminin Çözümü



Yanda verilmiş olan birim çemberi inceleyelim:

$\theta \in R$, $0 \le \theta < \pi$ fakat $\theta \neq \dfrac{\pi}{2}$ ve $k \in Z$ dir. P ve P' noktalarına eşlenen sayıları $\theta + k \cdot \pi$ şeklinde ifade edebiliriz.

x=$\theta + k.\pi$ ise $\tan(\theta + k \cdot \pi) = a$ dır. k değerini yerine koyalım:

$k = 0$ için, $\quad \tan\theta = a$

$k = 1$ için, $\quad \tan(\theta + \pi) = a$

$k = 2$ için, $\quad \tan(\theta + 2\pi) = a$

$k = 3$ için, $\quad \tan(\theta + 3\pi) = a$

. .

. .

$k = k$ için, $\quad \tan(\theta + k \cdot \pi) = a$ dır.

Buna göre, $0 \le \theta < \pi$ ve $\theta \ne \frac{\pi}{2}$ olmak üzere,

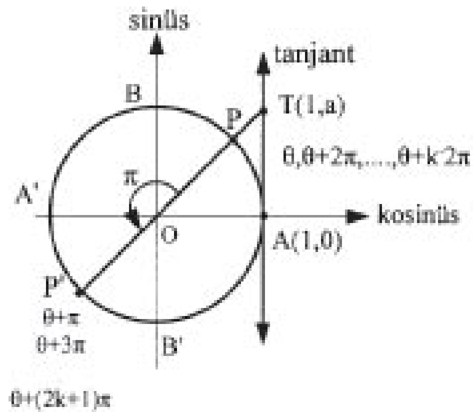
$$\tan x = a \text{ ve } \tan\theta = a \text{ ise, } \tan x = \tan\theta \text{ ve } x = \theta + k\cdot\pi \text{ dir.}$$

Sonuç olarak, $\tan x = a$ denkleminin R deki çözüm kümesi,

$$Ç = \{x : x = \theta + k\cdot\pi, \quad k \in Z\} \text{ olur.}$$

ÖRNEK 52 ⇒ $\tan x = 0$ denkleminin R deki çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM ⇒ Aşağıda verilen birim çemberi inceleyelim:



Önce tanjantı 0 olan,

$0 \le \theta < \pi$ $(\theta \in R)$ aralığında olup $\theta \ne \frac{\pi}{2}$ olan açıları bulalım:

$\tan 0 = 0 \Rightarrow \theta = 0$

$\leftarrow \left(\tan 0 = \frac{\sin 0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0 \right)$

$\tan\pi = 0 \Rightarrow \theta = \pi$

$\leftarrow \left(\tan \pi = \frac{\sin \pi}{\cos \pi} = \frac{0}{-1} = 0 \right)$

$\tan x = 0$ denkleminin kökleri, $\tan 0 = 0$, $\tan\pi = 0$, $\tan 2\pi = 0$ ve $\tan 3\pi = 0$ olduğundan $\tan x = 0$ denkleminin kökleri,

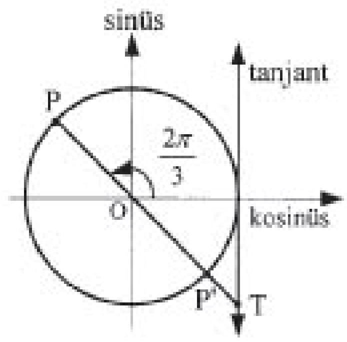
$$k \in Z,\ x = 0 + k\cdot\pi = k\cdot\pi \text{ dir.}$$

O halde, $\tan x = 0$ denkleminin R deki çözüm kümesi,

$$Ç = \{x : x = k\cdot\pi, \quad k \in Z\} \text{ dir.}$$

ÖRNEK 53 ⇨ $\tan 2x = -\sqrt{3}$ denkleminin R deki çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ Aşağıda verilen birim çemberi inceleyelim:



Önce tanjantı $-\sqrt{3}$ olan,

$0 \le \theta < \pi$ $(\theta \in R)$ aralığındaki

ve $\theta \ne \frac{\pi}{2}$ olan açıların ölçülerini

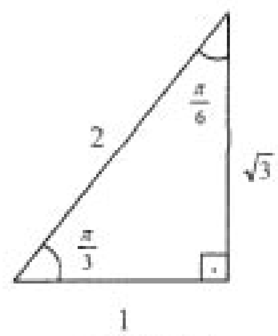
bulalım:

$\tan\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$ olduğundan,

$\tan 2x = \tan\frac{2\pi}{3} \Rightarrow 2x = \frac{2\pi}{3} + k\cdot\pi, \quad k \in Z$

$\Rightarrow x = \frac{2\pi}{2\cdot 3} + \frac{k\cdot\pi}{2}$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + k.\frac{\pi}{2}, \quad k \in Z$



$\tan\theta = \frac{\text{Karşı D.K.U}}{\text{Komşu D.K.U}}$

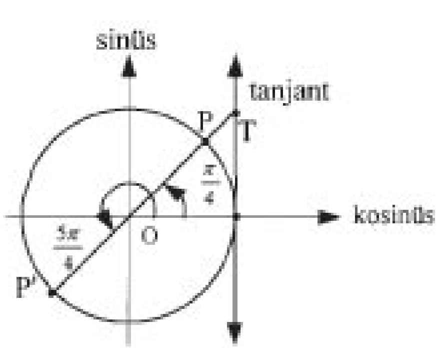
Bulduğumuz x değerleri denklemin kökleridir.

O halde, $\tan 2x = -\sqrt{3}$ denkleminin R deki çözüm kümesi,

$Ç = \{x : x = \frac{\pi}{3} + k.\frac{\pi}{2}, \quad k \in Z\}$ dir.

ÖRNEK 54 ⇨ $\tan x = 1$ denkleminin R deki çözüm kümesini bulunuz.

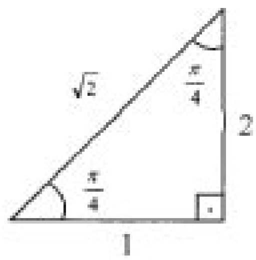
ÇÖZÜM ⇨ Aşağıda verilen birim çemberi inceleyelim:



Önce tanjantı 1 olan,

$0 \le \theta < \pi$ $(\theta \in R)$ aralığında olup

$\theta \ne \frac{\pi}{2}$ olan açıların ölçülerini bulalım:



$$\tan\frac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\tan\frac{5\pi}{4} = 1 \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{4}$$

$\tan x = 1$ denkleminin kökleri, $\tan\frac{\pi}{4} = 1$, $\tan\frac{5\pi}{4} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) = 1$

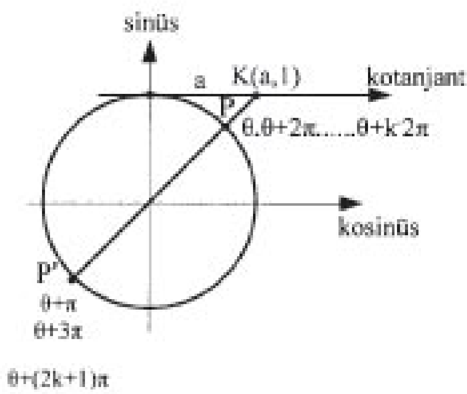
olduğundan, $k \in Z$, $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$ dir.

O halde, $\tan x = 1$ denkleminin R deki çözüm kümesi,

$$Ç = \left\{ x : x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \,,\; k \in Z \right\} \text{ dir.}$$

ALIŞTIRMA 20 ➾ $\tan x + \sqrt{3} = 0$ denkleminin R deki çözüm kümesini bulunuz.

$a \in R$ Olmak Üzere , $\cot x = a$ Denkleminin Çözümü



Yandaki birim çemberde verilenleri inceleyelim:

$\theta \in R$, $0 < \theta < \pi$, $k \in Z$ olmak üzere, P veya P' noktalarına eşlenen sayılar, $\theta + k \cdot \pi$ şeklinde ifade edilebilir.

Buna göre $0 < \theta < \pi$ olmak üzere,

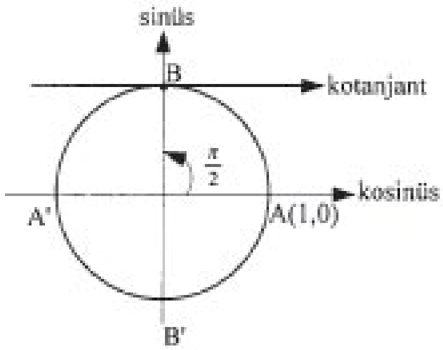
$\cot x = a$ ve $\cot\theta = a$ ise $\cot x = \cot\theta$ ve $x = \theta + k \cdot \pi$ dir.

$\cot x = a$ denkleminin R deki çözüm kümesi,

$$Ç = \{x : x = \theta + k \cdot \pi,\; k \in Z\} \text{ dir.}$$

ÖRNEK 55 ⇒ $\cot x = 0$ denkleminin R deki çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM ⇒ Aşağıdaki birim çemberi inceleyelim:



Önce kotanjantı sıfır olan, $0<\theta<\pi$ $(\theta \in R)$ aralığındaki açıların ölçülerini bulalım:

$$\cot\frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\leftarrow \left(\cot\frac{\pi}{2} = \frac{\cos\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}} = \frac{0}{1} = 0 \right)$$

$\cot x = 0$ denkleminin kökleri, $\cot\frac{\pi}{2} = 0$ ve $\cot\frac{3\pi}{2} = 0$ olduğundan, $k \in Z$, $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ dir.

Sonuç olarak, $\cot x = 0$ denkleminin R deki çözüm kümesi,

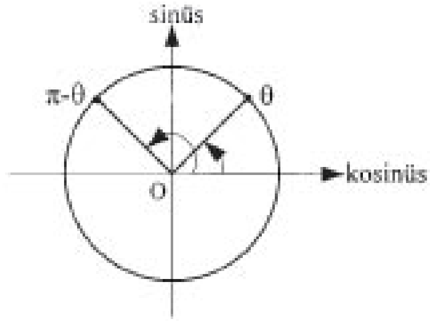
$$Ç = \left\{ x : x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, \quad k \in Z \right\} \text{ dir.}$$

ALIŞTIRMA 21 ⇒ $\cot x = 1$ denkleminin R deki çözüm kümesini bulunuz.

◆ *sin x=sina, cos x=cosa, tan x=tana ve cot x=cota BİÇİMİNDEKİ DENKLEMLER*

$a \in R$ Olmak Üzere, $\sin x = \sin a$ Denkleminin Çözümü

$0 \le \theta < 2\pi$ ve sina=sinθ ise, sinx=sinθ denklemi yazalım.



Yanda verilmiş olan birim çemberi inceleyelim.

Sinüsü, $\sin\theta$ olan $0 \le \theta < 2\pi$ aralığında iki açı vardır. Bunlardan birisinin ölçüsünün θ, diğerinin ölçüsünün $\pi - \theta$ olduğu yandaki birim çemberde görülmektedir.

Bunların her birine $k \cdot 2\pi$ eklendiğinde denklemin çözüm kümesi elde edilir.

Sonuç olarak, $\sin x = \sin a$ denkleminin R deki çözüm kümesi,

$$Ç = \{x : x = \theta + k \cdot 2\pi \ \vee \ x = (\pi - \theta) + k \cdot 2\pi, \ k \in Z\} \text{dir.}$$

ÖRNEK 56 ⇨ $\sin x = \sin \frac{13\pi}{6}$ denkleminin R deki çözüm kümesini yazınız.

ÇÖZÜM ⇨ $\frac{13\pi}{6} = 2\pi + \frac{\pi}{6}$ olduğundan, $\sin \frac{13\pi}{6} = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6}$ olur.

Buna göre,

$$\sin x = \sin \frac{13\pi}{6} \Rightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \qquad \leftarrow (\theta = \frac{\pi}{6})$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \ \vee \ x = \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + k \cdot 2\pi, \ k \in Z$$

Yukarıda bulduğumuz x değerleri denklemin kökleridir.

Sonuç olarak, $\sin x = \sin \frac{13\pi}{6}$ denkleminin R deki çözüm kümesi,

$$Ç = \left\{ x : x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \ \vee \ x = \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + k \cdot 2\pi = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi, \ k \in Z \right\} \text{dir.}$$

ÖRNEK 57 ⇨ $\sin x = \cos \frac{3\pi}{8}$ denkleminin R deki çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ İki açının ölçülerinin toplamı $\frac{\pi}{2}$ ise , bunlardan birisinin ölçüsünün kosinüsünün değeri, diğerinin ölçüsünün sinüsünün değerine eşittir.

Bundan yararlanarak aşağıdaki işlemleri yapacağız.

$$\frac{3\pi}{8} + A = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \quad A = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{8} \text{ dir.}$$

$\cos\dfrac{3\pi}{8} = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{3\pi}{8}\right) = \sin\dfrac{\pi}{8}$ olduğundan,

$\sin x = \cos\dfrac{3\pi}{8} \Rightarrow \sin x = \sin\dfrac{\pi}{8}$ dir. $\leftarrow\left(\dfrac{3\pi}{8} + \dfrac{\pi}{8} = \dfrac{4\pi}{8} = \dfrac{\pi}{2}\right)$

Buna göre, $x = \dfrac{\pi}{8} + k \cdot 2\pi \quad \vee \quad x = \left(\pi - \dfrac{\pi}{8}\right) + k \cdot 2\pi$, $k \in Z$ olur.

Bulduğumuz x değerleri denklemin kökleridir.

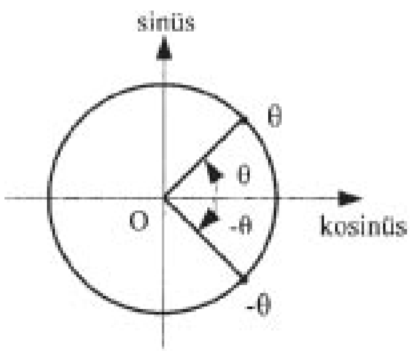
Sonuç olarak, $\sin x = \cos\dfrac{3\pi}{8}$ denkleminin çözüm kümesi,

$$Ç = \left\{x : x = \frac{\pi}{8} + k \cdot 2\pi \ \vee \ x = \left(\pi - \frac{\pi}{8}\right) + k \cdot 2\pi = \frac{7\pi}{8} + k \cdot 2\pi, \ \ k \in Z\right\} \text{ dir.}$$

ALIŞTIRMA 22 ✍ $\sin x = \sin\dfrac{4\pi}{3}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

$a \in R$ **Olmak Üzere** $\cos x = \cos a$ **Denkleminin Çözümü**

$0 \le \theta < 2\pi$ ve cosa=cosθ ise, cosx=cosθ denklemi yazalım.



Yanda verilmiş olan birim çemberi inceleyelim.

Kosinüsü, $\cos\theta$ olan $0 \le \theta < 2\pi$ aralığında iki açı vardır.

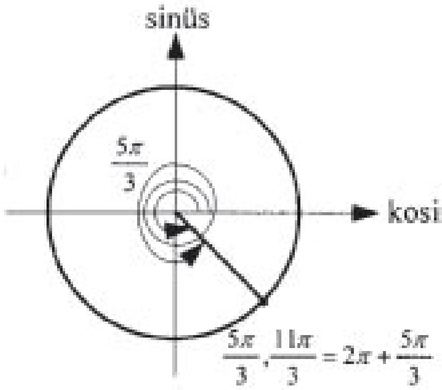
Bunlardan birisinin ölçüsü θ, diğerinin ölçüsü ise $-\theta$ dır. Bunlara $k \cdot 2\pi$ eklendiğinde denklemin çözüm kümesi elde edilir.

Sonuç olarak, $\cos x = \cos a$ denkleminin çözüm kümesi,

$$Ç = \{x : x = \theta + k \cdot 2\pi \quad \vee \quad x = -\theta + k \cdot 2\pi, \ \ k \in Z\} \text{ dir.}$$

ÖRNEK 58 ⇨ $\cos x = \cos\frac{11\pi}{3}$ denkleminin R deki çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨



$\frac{11\pi}{3} = 2\pi + \frac{5\pi}{3}$ olduğundan,

$$\cos\frac{11\pi}{3} = \cos\left(2\pi + \frac{5\pi}{3}\right)$$

$$= \cos 2\pi \cdot \cos\frac{5\pi}{3} - \sin 2\pi \cdot \sin\frac{5\pi}{3}$$

← ($\cos(A+B) = \cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B$)

$$= 1 \cdot \cos\frac{5\pi}{3} - 0 \cdot \sin\frac{5\pi}{3} = \cos\frac{5\pi}{3} \text{ tür.}$$

Buna göre,

$$\cos x = \cos\frac{11\pi}{3} \Rightarrow \cos x = \cos\frac{5\pi}{3}$$ ← ($\theta = \frac{5\pi}{3}$)

$$\Rightarrow x = \frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi \quad \vee \quad x = -\frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi,\ k \in Z$$

Bulduğumuz bu x değerleri denklemin kökleridir.

Sonuç olarak, $\cos x = \cos\frac{11\pi}{3}$ denkleminin R deki çözüm kümesi,

$$Ç = \left\{x : x = \frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi \quad \vee \quad x = -\frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi,\quad k \in Z\right\} \text{ dir.}$$

ALIŞTIRMA 23 ⇨ Aşağıdaki denklemlerin R deki çözüm kümelerini bulunuz.

(A) $\cos x = \cos\frac{21\pi}{4}$ (B) $\cos x = \sin\frac{3\pi}{5}$

$a \in \mathrm{R} - \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k \cdot \pi, \ \ k \in \mathrm{Z} \right\}$ **Olmak Üzere ,** $\tan x = \tan a$

Denkleminin Çözümü

$0 \leq \theta < \pi$, $\theta \neq \dfrac{\pi}{2}$ ve $\tan a = \tan \theta$ ise, $\tan x = \tan \theta$ denklemi yazılır.
Bu denklemden $x = \theta + k \cdot \pi$, $k \in Z$ bulunur.

Sonuç olarak, $\tan x = \tan a$ denkleminin R deki çözüm kümesi,

$$Ç = \{ x : x = \theta + k \cdot \pi, \ \ k \in Z \} \text{ olur.}$$

ÖRNEK 59 ⇨ $\tan x = \tan \dfrac{13\pi}{6}$ denkleminin R deki çözüm kümesini yazınız.

ÇÖZÜM ⇨ $\dfrac{13\pi}{6} = 2\pi + \dfrac{\pi}{6}$ olduğundan,

$$\tan \frac{13\pi}{6} = \tan\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \tan \frac{\pi}{6} \text{ dır.}$$

Buna göre,

$$\tan x = \tan \frac{13\pi}{6} \Rightarrow \tan x = \tan \frac{\pi}{6} \qquad \leftarrow (\theta = \frac{\pi}{6})$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi \text{ olur.}$$

Bulduğumuz bu x değerleri denklemin kökleridir.

Sonuç olarak, $\tan x = \tan \dfrac{13\pi}{6}$ denkleminin R deki çözüm kümesi,

$$Ç = \left\{ x : x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi, \ \ k \in Z \right\} \text{ olur.}$$

ALIŞTIRMA 24 ⇨ $\tan x = \tan \dfrac{25\pi}{6}$ denkleminin R deki çözüm kümesini yazınız.

$\theta \in R - \{k \cdot \pi, k \in Z\}$ Olmak Üzere $\cot x = \cot a$ Denkleminin Çözümü

$0<\theta<\pi$ ve $\cot a = \cot\theta$ ise, $\cot x = \cot\theta$ yazılır. Bu denklemden, $x = \theta + k \cdot \pi$ bulunur.

Sonuç olarak, $\cot x = \cot a$ denkleminin R deki çözüm kümesi,

$$Ç = \{x : x = \theta + k \cdot \pi, \quad k \in Z\} \text{ olur.}$$

ÖRNEK 60 ⇨ $\cot x = \cot\dfrac{14\pi}{3}$ denkleminin R deki çözüm kümesini yazınız.

ÇÖZÜM ⇨ $\dfrac{14\pi}{3} = 4\pi + \dfrac{2\pi}{3}$ olduğundan, $\cot\dfrac{14\pi}{3} = \cot\left(4\pi + \dfrac{2\pi}{3}\right) = \cot\dfrac{2\pi}{3}$ olur.

Buna göre,

$$\cot x = \cot\frac{14\pi}{3} \Rightarrow \cot x = \cot\frac{2\pi}{3} \qquad \leftarrow\left(\theta = \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} + k \cdot \pi$$

Bulduğumuz x değerleri denklemin kökleridir.

Sonuç olarak, $\cot x = \cot\dfrac{14\pi}{3}$ denkleminin R deki çözüm kümesi,

$$Ç = \left\{x : x = \frac{2\pi}{3} + k \cdot \pi, \quad k \in Z\right\} \text{ dir.}$$

ALIŞTIRMA 25 ⇨ $\cot x = \cot\dfrac{9\pi}{4}$ denkleminin R deki çözüm kümesini yazınız.

◆ *sin(f(x))=sin(g(x)), cos(f(x))=cos(g(x)), tan(f(x))=tan(g(x)) ve cot(f(x))=cot(g(x)) BİÇİMİNDEKİ DENKLEMLER*

f ve g, R den R ye birer fonksiyon olmak üzere, sin(f(x))=sin(g(x)), cos(f(x))=cos(g(x)), tan(f(x))=tan(g(x)) ve cot(f(x))=cot(g(x)) Biçimindeki Denklemlerin Çözümleri

$\sin(f(x)) = \sin(g(x))$ ise,

$$f(x) = g(x) + k \cdot 2\pi \vee f(x) = (\pi - g(x)) + k \cdot 2\pi ,$$

$\cos(f(x)) = \cos(g(x))$ ise,

$$f(x) = g(x) + k \cdot 2\pi \vee f(x) = -g(x) + k \cdot 2\pi ,$$

$\tan(f(x)) = \tan(g(x))$, ise, $f(x) = g(x) + k \cdot \pi$,

$\cot(f(x)) = \cot(g(x))$ ise, $f(x) = g(x) + k \cdot \pi$ olur. $(k \in Z)$

ÖRNEK 61 ⇨ $\sin x - \cos 4x = 0$ denkleminin R deki çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ $\sin x - \cos 4x = 0 \Rightarrow \sin x = \cos 4x$

$$\Rightarrow \cos 4x = \sin x$$

$$\Rightarrow \cos 4x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$$

$$\Rightarrow \underbrace{4x = (\frac{\pi}{2} - x) + k \cdot 2\pi}_{I} \quad \vee \quad \underbrace{4x = -(\frac{\pi}{2} - x) + k \cdot 2\pi}_{II}, \ k \in Z$$

I. ifadeyi çözelim:

$$4x = (\frac{\pi}{2} - x) + k \cdot 2\pi$$

$$4x = \frac{\pi}{2} - x + k \cdot 2\pi$$

$$5x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$$

$$\frac{5x}{5} = \frac{\pi}{2 \cdot 5} + \frac{k \cdot 2\pi}{5}$$ ←(x i bulmak için eşitliğin her iki tarafını 5 ile bölme)

$$x = \frac{\pi}{10} + \frac{k \cdot 2\pi}{5}$$ tir.

II. ifadeyi çözelim:

$$4x = -(\frac{\pi}{2} - x) + k \cdot 2\pi$$

$$4x = -\frac{\pi}{2} + x + k \cdot 2\pi \qquad \leftarrow (-(a-b) = -a+b)$$

$$4x - x = -\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$$

$$3x = -\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$$

$$\frac{3x}{3} = -\frac{\pi}{2 \cdot 3} + \frac{k \cdot 2\pi}{3} \qquad \leftarrow (\text{ Eşitliğin her iki tarafını 3 ile bölme})$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k \cdot 2\pi}{3}$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{2\pi}{3} \text{ tür.}$$

O halde, $\sin x - \cos 4x = 0$ denkleminin R deki çözüm kümesi,

$$Ç = \left\{ x : x = \frac{\pi}{10} + k \cdot \frac{2\pi}{5} \quad \vee \quad x = -\frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{2\pi}{3},\ k \in Z \right\} \text{ dir.}$$

ÖRNEK 62 ⇒ $\sin 3x = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$ denkleminin R deki çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM ⇒ Denklemdeki açı ölçülerinden birisini θ olarak alalım.

$2x + \frac{\pi}{3} = \theta$ ise,

$$\sin 3x = \sin(2x + \frac{\pi}{3}) \Rightarrow \sin 3x = \sin \theta$$

Görüldüğü üzere, en son elde ettiğimiz denklem $\sin x = \sin\theta$ ya benzemektedir. Daha önceden bu denklemin çözüm kümesinin,

$$Ç = \{x : x = \theta + k\cdot 2\pi \quad \vee \quad x = (\pi-\theta) + k\cdot 2\pi,\ k \in Z\}$$

olduğunu görmüştük.

O halde,

$$\sin 3x = \sin\theta \quad \Rightarrow 3x = \theta + k\cdot 2\pi \ \vee\ 3x = (\pi-\theta) + k\cdot 2\pi,\ k \in Z \ \ldots(*)$$

$\theta = 2x + \dfrac{\pi}{3}$ olduğuna göre θ değerini (*) da yerine koyalım.

$$\underbrace{3x = (2x+\frac{\pi}{3}) + k\cdot 2\pi}_{I} \ \vee\ \underbrace{3x = \left[\pi - (2x+\frac{\pi}{3})\right] + k\cdot 2\pi}_{II}$$

I. ifadeyi çözelim:

$$3x = (2x+\frac{\pi}{3}) + k\cdot 2\pi\ ,\ k \in Z$$

$$3x = 2x + \frac{\pi}{3} + k\cdot 2\pi$$

$$3x - 2x = \frac{\pi}{3} + k\cdot 2\pi$$

$$x = \frac{\pi}{3} + k\cdot 2\pi \text{ dir.}$$

II. ifadeyi çözelim:

$$3x = \left[\pi - (2x+\frac{\pi}{3})\right] + k\cdot 2\pi,\ k \in Z$$

$$3x = \pi - 2x - \frac{\pi}{3} + k\cdot 2\pi \qquad \leftarrow (-(a-b) = -a+b)$$

$$3x = -2x + \pi - \frac{\pi}{3} + k\cdot 2\pi$$

$$3x + 2x = \pi - \frac{\pi}{3} + k\cdot 2\pi$$

$$5x = \underset{(3)}{\frac{\pi}{1}} - \frac{\pi}{3} + k\cdot 2\pi \qquad \leftarrow \text{(Payda eşitleme)}$$

$$5x = \frac{3\pi}{3} - \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$$

$$5x = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi$$

$$\frac{5x}{5} = \frac{2\pi}{3 \cdot 5} + \frac{k \cdot 2\pi}{5}$$ ← (Eşitliğin her iki tarafını 5 ile bölme)

$$x = \frac{2\pi}{15} + k \cdot \frac{2\pi}{5}$$

O halde, $\sin 3x = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$ denkleminin R deki çözüm kümesi,

$$Ç = \left\{ x : x = \frac{\pi}{3} + k.2\pi \quad \vee \quad x = \frac{2\pi}{15} + k \cdot \frac{2\pi}{5},\ k \in Z \right\} \text{ dir.}$$

ÖRNEK 63 ⇨ $\tan(3x + \frac{\pi}{3}) = \tan(\frac{\pi}{6} - x)$ denkleminin R deki çözüm kümesini yazınız.

ÇÖZÜM ⇨ Denklemdeki açı ölçülerinden birini θ olarak alalım.

$\frac{\pi}{6} - x = \theta$ ise

$$\tan(3x + \frac{\pi}{3}) = \tan(\frac{\pi}{6} - x) \Rightarrow \tan\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \tan\theta$$

Yukarıda görüldüğü üzere, en son elde ettiğimiz denklem $\tan x = \tan\theta$ ya benzemektedir. Daha önceden bu denklemin R deki çözüm kümesinin,

$$Ç = \{ x : x = \theta + k \cdot \pi, \quad k \in Z \}$$

olduğunu görmüştük.

O halde,

$$3x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} - x + k \cdot \pi,\ k \in Z$$

$$\Rightarrow 3x + x = -\underset{(2)}{\frac{\pi}{3}} + \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$$ ← (Payda eşitleme)

$$\Rightarrow 4x = -\frac{2\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$$ ← $(-\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{-a+c}{b})$

$$\Rightarrow 4x = -\frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$$

$$\Rightarrow x = -\frac{\pi}{6 \cdot 4} + k \cdot \frac{\pi}{4} \qquad \leftarrow \text{(Eşitliğin her iki tarafını 4 ile bölme)}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{\pi}{24} + k \cdot \frac{\pi}{4}$$

Sonuç olarak, $\tan(3x + \frac{\pi}{3}) = \tan(\frac{\pi}{6} - x)$ denkleminin R deki çözüm kümesi,

$$Ç = \left\{ x : x = -\frac{\pi}{24} + k \cdot \frac{\pi}{4},\ k \in Z \right\} \text{ dir.}$$

ÖRNEK 64 ⇨ $\tan(3x - \frac{\pi}{3}) = \cot(2x - \frac{\pi}{6})$ denkleminin R deki çözüm kümesini yazınız.

ÇÖZÜM ⇨ $\cot(2x - \frac{\pi}{6}) = \tan\left[\frac{\pi}{2} - (2x - \frac{\pi}{6})\right]$ $\leftarrow(\cot\beta = \tan(\frac{\pi}{2} - \beta))$

$= \tan(\frac{4\pi}{6} - 2x)$ tir. $\leftarrow(\underset{(3)}{\frac{\pi}{2}} - 2x + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{6} - 2x + \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{6} - 2x)$

$$\tan(3x - \frac{\pi}{3}) = \cot(2x - \frac{\pi}{6}) \Rightarrow \tan(3x - \frac{\pi}{3}) = \tan(\frac{4\pi}{6} - 2x)$$

Denklemdeki açı ölçülerinden birini θ olarak alalım.

$$\theta = \frac{4\pi}{6} - 2x \quad \text{ise,}$$

$$\tan\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{4\pi}{6} - 2x\right) \Rightarrow \tan\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \tan\theta \text{ dır.}$$

Yukarıda görüldüğü üzere, en son elde ettiğimiz denklem $\tan x = \tan\theta$ denklemine benzemektedir. Daha önceden bu denklemin R deki çözüm kümesinin,

$$Ç = \{x : x = \theta + k \cdot \pi, \quad k \in Z\}$$

olduğunu biliyoruz.

O halde,

$$3x-\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{6}-2x+k\cdot\pi\,,\ k\in Z$$

$$\Rightarrow 3x+2x=\frac{4\pi}{6}+\underset{(2)}{\frac{\pi}{3}}+k\cdot\pi \qquad \leftarrow(a-b=c\Rightarrow a=c+b)$$

$$\Rightarrow 5x=\frac{4\pi}{6}+\frac{2\pi}{6}+k\cdot\pi$$

$$\Rightarrow 5x=\frac{6\pi}{6}+k\cdot\pi$$

$$\Rightarrow 5x=\pi+k\cdot\pi$$

$$\Rightarrow x=\frac{\pi}{5}+k\cdot\frac{\pi}{5}$$ ← (Eşitliğin her iki tarafını 5 ile bölme)

Sonuç olarak, $\tan(3x-\frac{\pi}{3})=\cot(2x-\frac{\pi}{6})$ denkleminin R deki çözüm kümesi,

$$Ç=\left\{x: x=\frac{\pi}{5}+k\cdot\frac{\pi}{5},\ k\in Z\right\}$$ dir.

ALIŞTIRMA 26 ⇨ Aşağıdaki denklemlerin R deki çözüm kümelerini bulunuz.

(A) $\cos x-\sin 5x=0$ (B) $\cos(2x+\frac{\pi}{4})=\cos(x-\frac{\pi}{3})$

(C) $\cot(x-\frac{\pi}{3})=\cot(\frac{\pi}{6}-x)$ (D) $\tan x=\cot x$

◆ *sin x* ve *cos x* e GÖRE LİNEER DENKLEMLER

$a,b,c\in R$ **Olmak Üzere** $(a\neq 0, b\neq 0$ ve $c\neq 0)$ $a\cdot\sin x+b\cdot\cos x=c$ **Denkleminin Çözümü**

sin x ve *cos x* e Göre Lineer Denklem

a, b ve c, sıfırdan farklı birer reel sayı olmak üzere $a\cdot\sin x+b\cdot\cos x=c$ biçimindeki denklemlere, ***sin x* ve *cos x* e göre lineer denklem** denir.

$a\neq 0$ olmak üzere, $a\cdot\sin x+b\cdot\cos x=c$ lineer denkleminin çözüm kümesini bulmak için, ifadenin iki tarafı $\sin x$ in kat sayısı olan "a" reel sayısına bölünerek daha önceden çözüm kümesini bulmayı öğrendiğimiz denklem haline getirilir:

$$a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = c \Rightarrow \frac{a \cdot \sin x}{a} + \frac{b \cdot \cos x}{a} = \frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow \sin x + \frac{b}{a} \cdot \cos x = \frac{c}{a} \qquad \leftarrow \left(\frac{b}{a} = \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)$$

$$\Rightarrow \sin x + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \cdot \cos x = \frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin x \cdot \cos\theta + \sin\theta \cdot \cos x}{\cos\theta} = \frac{c}{a} \cdot \frac{\cos\theta}{\cos\theta}$$

$$\Rightarrow \sin x \cdot \cos\theta + \sin\theta \cdot \cos x = \frac{c}{a} \cdot \cos\theta$$

$$\Rightarrow \sin(x+\theta) = \frac{c}{a} \cdot \cos\theta$$

Bu işlemden sonra, en son elde ettiğimiz denklemin çözüm kümesinden yararlanarak $a \neq 0$ olmak üzere, $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = c$ lineer denkleminin çözüm kümesi elde edilir.

ÖRNEK 65 ➾ $\cos x + \sin x = 1$ denkleminin R deki çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM ➾ $\cos x + \sin x = 1 \Rightarrow \tan\frac{\pi}{4} \cdot \cos x + \sin x = 1$ $\qquad \leftarrow \left(\tan\frac{\pi}{4} = 1\right)$

$$\Rightarrow \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}} \cdot \cos x + \sin x = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos x}{\cos\frac{\pi}{4}} + \frac{\sin x}{\frac{1}{(\cos\frac{\pi}{4})}} = \frac{1}{\frac{1}{(\cos\frac{\pi}{4})}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos x}{\cos\frac{\pi}{4}} + \frac{\sin x \cdot \cos\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{\cos\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow \sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \cos\frac{\pi}{4}$$

← (İki açının ölçülerinin toplamı $\frac{\pi}{2}$ ise birinin ölçüsünün kosinüsü diğerinin sinüsüne eşittir. $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$)

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \sin\frac{\pi}{4}$$

Yukarıda görüldüğü üzere, elde ettiğimiz denklem $\sin x = \sin\theta$ denklemine benzemektedir. Daha önceden bu denklemin R deki çözüm kümesinin, $Ç = \{x : x = \theta + k \cdot 2\pi \quad \vee \quad x = (\pi - \theta) + k \cdot 2\pi, \quad k \in Z\}$ olduğunu biliyoruz.

O halde,

$$\frac{\pi}{4}+x=\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\pi \;\Rightarrow\; x=-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\pi$$
$$\Rightarrow\; x=k\cdot 2\pi\,,\quad k\in Z$$

$$\frac{\pi}{4}+x=(\pi-\frac{\pi}{4})+k\cdot 2\pi \;\Rightarrow\; x=-\frac{\pi}{4}+\pi-\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\pi$$

$$\Rightarrow x=-\frac{2\pi}{4}+\underset{(4)}{\frac{\pi}{1}}+k\cdot 2\pi$$
$$\Rightarrow x=-\frac{2\pi}{4}+\frac{4\pi}{4}+k\cdot 2\pi$$
$$\Rightarrow x=\frac{2\pi}{4}+k\cdot 2\pi$$
$$\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi,\quad k\in Z \qquad \leftarrow\text{(Sadeleştirme)}$$

Sonuç olarak, $\cos x+\sin x=1$ denkleminin R deki çözüm kümesi,

$$Ç=\left\{x : x=k\cdot 2\pi \vee x=\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi,\; k\in Z\right\} \text{ dir.}$$

◆ *sin x* ve *cos x* e *GÖRE HOMOJEN DENKLEMLER*

$a,b\in R\;\;(a\neq 0\;\; ve\;\; b\neq 0)$ **Olmak Üzere** $a\cdot\sin x+b\cdot\cos x=0$
Denkleminin Çözümü

> **Birinci Dereceden Homojen Denklem**
>
> a ve b sıfırdan farklı birer reel sayı olmak üzere, $a\cdot\sin x+b\cdot\cos x=0$ biçimindeki denklemlere, $\sin x$ ve $\cos x$ e göre **birinci dereceden homojen denklem** denir.

$$a\cdot\sin x+b\cdot\cos x=0 \Rightarrow a\cdot\sin x=-b\cdot\cos x$$
$$\Rightarrow \frac{a\cdot\sin x}{a\cdot\cos x}=\frac{-b\cdot\cos x}{a\cdot\cos x}$$

← (Eşitliğin her iki tarafını *cos x* ile bölme)

$$\Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-b}{a}$$

$$\Rightarrow \tan x = \frac{-b}{a} \text{ dır.} \qquad \leftarrow \left(\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \right)$$

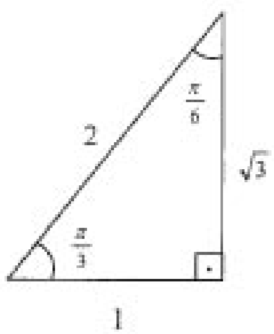
$\tan x = \frac{-b}{a}$ ise, denklemin R deki çözüm kümesi,

$$Ç = \{x : x = \theta + k\cdot\pi,\ k \in Z\} \text{ dir.}$$

ÖRNEK 66 ⇒ $\sin x - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \cos x = 0$ denkleminin R deki çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM ⇒ $\sin x - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \cos x = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{\sqrt{3}} \cos x$

←(Eşitliğin her iki tarafını *cos x* ile bölme)



$\tan\theta = \frac{\text{Karşı D.K.U}}{\text{Komşu D.K.U}}$

$$\Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}\cos x}{\cos x}$$

$$\Rightarrow \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ olur.} \qquad \leftarrow \left(\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} \right)$$

$$\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan\theta = \tan\frac{\pi}{6}$$

Yukarıda görüldüğü üzere, elde ettiğimiz denklem $\tan x = \tan\theta$ denklemine benzemektedir. Daha önceden bu denklemin R deki çözüm kümesinin,

$$Ç = \{x : x = \theta + k\cdot\pi,\ k \in Z\}$$

olduğunu biliyoruz. O halde, $\tan x = \tan\frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\cdot\pi$, $k \in Z$ dir.

Sonuç olarak, $\sin x - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \cos x = 0$ denkleminin R deki çözüm kümesi,

$$Ç = \left\{x : x = \frac{\pi}{6} + k\cdot\pi,\ k \in Z\right\} \text{ dir.}$$

ALIŞTIRMA 27 ⇒ $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0$ denkleminin R deki çözüm kümesini bulunuz.

a,b,c $\in$R (En Az İkisi Sıfırdan Farklı) Olmak Üzere
$a \cdot \cos^2 x + b \cdot \sin x \cdot \cos x + c \cdot \sin^2 x = 0$ **Denkleminin Çözümü**

İkinci Dereceden Homojen Denklem

a,b ve c reel sayılarından en az ikisi sıfırdan farklı olmak üzere,

$$a \cdot \cos^2 x + b \cdot \sin x \cdot \cos x + c \cdot \sin^2 x = 0$$

biçimindeki denklemlere $\cos x$ ve $\sin x$ e göre **ikinci dereceden homojen denklem** denir.

$\cos x \neq 0$ olmak üzere $a \cdot \cos^2 x + b \cdot \sin x \cdot \cos x + c \cdot \sin^2 x = 0$ denkleminin iki tarafı $\cos^2 x$ ile bölünerek $a + b \cdot \tan x + c \cdot \tan^2 x = 0$ denklemi elde edilir. $\tan x$ e göre ikinci dereceden olan bu denklemin çözümü yapılır.

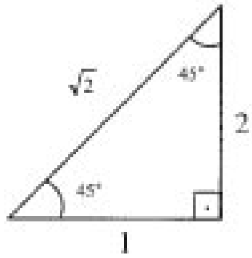
ÖRNEK 67 ⇨ $2 \cdot \cos^2 x - \sin x \cdot \cos x - \sin^2 x = 0$ denkleminin R deki çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ $2 \cdot \cos^2 x - \sin x \cdot \cos x - \sin^2 x = 0$ denkleminin her iki tarafını $\cos^2 x$ ile bölelim ($\cos x \neq 0$):

$$\frac{2.\cos^2 x}{\cos^2 x} - \frac{\sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{0}{\cos^2 x} \Rightarrow 2 - \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 0$$
$$\Rightarrow 2 - \tan x - \tan^2 x = 0$$

En son elde ettiğimiz denklemin R deki çözüm kümesini bulalım:

$$2 - \tan x - \tan^2 x = 0 \Rightarrow (1 - \tan x) \cdot (2 + \tan x) = 0$$



$\tan\theta = \frac{\text{Karşı D.K.U}}{\text{Komşu D.K.U}}$

$$\Rightarrow 1 - \tan x = 0 \quad \vee \quad 2 + \tan x = 0$$
$$\Rightarrow \tan x = 1 \quad \vee \quad \tan x = -2$$
$$\Rightarrow \tan x = \tan 45° \quad \vee \quad \tan\alpha = 2$$
$$\Rightarrow x = 45° \quad \vee \quad \tan x = -\tan\alpha = \tan(-\alpha)$$

Not: α değerini trigonometrik değerler tablosundan yararlanarak hesaplayınız.

Yukarıda görüldüğü üzere elde ettiğimiz denklemler tanx=tanθ denklemine benzemektedir. Daha önceden bu denklemin çözüm kümesinin,

$$Ç = \{x : x = 180^\circ \cdot k + \theta, k \in Z\}$$

olduğunu biliyoruz.

O halde, $2 \cdot \cos^2 x - \sin x \cdot \cos x - \sin^2 x = 0$ denkleminin R deki çözüm kümesi,

$$Ç = \{x : x = 180^\circ \cdot k + 45^\circ \vee x = 180^\circ \cdot k - \alpha, k \in Z\} \text{ dir.}$$

a,b,c, d∈R (a≠0, b≠0, c≠0 ve d≠0) Olmak Üzere $a \cdot \cos^2 x + b \cdot \sin x \cdot \cos x + c \cdot \sin^2 x = d$ Denkleminin Çözümü

$a \cdot \cos^2 x + b \cdot \sin x \cdot \cos x + c \cdot \sin^2 x = d$ şeklindeki denklemler, $\cos^2 x + \sin^2 = 1$ den yararlanılarak $d = d \cdot (\cos^2 x + \sin^2 x)$ yazılarak ikinci dereceden homojen denklem durumuna getirilir.

$$a \cdot \cos^2 x + b \cdot \sin x \cdot \cos x + c \cdot \sin^2 x = d$$
$$a \cdot \cos^2 x + b \cdot \sin x \cdot \cos x + c \cdot \sin^2 x = d \cdot (\cos^2 x + \sin^2 x)$$
$$a \cdot \cos^2 x + b \cdot \sin x \cdot \cos x + c \cdot \sin^2 x = d \cdot \cos^2 x + d \cdot \sin^2 x$$
$$a \cdot \cos^2 x + b \cdot \sin x \cdot \cos x + c \cdot \sin^2 x - d \cdot \cos^2 x - d \cdot \sin^2 x = 0$$
$$(a - d) \cdot \cos^2 x + b \cdot \sin x \cdot \cos x + (c - d) \cdot \sin^2 x = 0$$

Daha sonra denklemin R deki çözüm kümesi bulunur.

ÖRNEK 68 ⇝ $6 \cdot \cos^2 x - 2 \cdot \sin x \cdot \cos x + 6 \cdot \sin^2 x = 5$ denkleminin *R* deki çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM ⇝ $6 \cdot \cos^2 x - 2 \cdot \sin x \cdot \cos x + 6 \cdot \sin^2 x = 5$

$$6 \cdot \cos^2 x - 2 \cdot \sin x \cdot \cos x + 6 \cdot \sin^2 x = 5 \cdot (\cos^2 x + \sin^2 x)$$

$$6 \cdot \cos^2 x - 2 \cdot \sin x \cdot \cos x + 6 \cdot \sin^2 x - 5 \cdot \cos^2 x - 5 \cdot \sin^2 x = 0$$

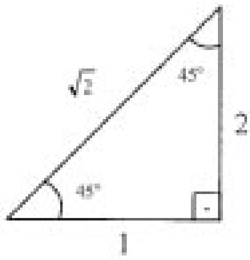
$$\cos^2 x - 2 \cdot \sin x \cdot \cos x + \sin^2 x = 0 \quad (\cos x \neq 0)$$

$$\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} - \frac{2 \cdot \sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 0$$ ←(Eşitliğin her iki tarafını $\cos^2 x$ ile bölme; $\cos x \neq 0$)

$$1-2\cdot\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=0$$

$$1-2\cdot\tan x+\tan^2 x=0$$

Elde ettiğimiz yeni denklemin köklerini bulalım:



$\tan\theta=\frac{\text{Karşı D.K.U}}{\text{Komşu D.K.U}}$

$$1-2\cdot\tan x+\tan^2 x=0\Rightarrow(\tan x-1)^2=0$$

O halde,

$$\tan x-1=0\Rightarrow\tan x=1$$

$$\Rightarrow x=45^\circ$$

Yukarıda görüldüğü üzere, elde ettiğimiz denklem tanx=tanθ denklemine benzemektedir. Daha önceden bu denklemin çözüm kümesinin,

$$Ç=\{x: x=\theta+k\cdot180^\circ,\ k\in Z\}$$

olduğunu biliyoruz.

O halde, $6\cdot\cos^2 x-2\cdot\sin x\cdot\cos x+6\cdot\sin^2 x=5$ denkleminin çözüm kümesi,

$$Ç=\{x: x=45^\circ+k\cdot180^\circ,\ k\in Z\}\text{ dir.}$$

◆ TRİGONOMETRİK DENKLEMLERLE İLGİLİ GENEL ÖRNEKLER

ÖRNEK 69 ⇨ $\sin 4x-\sin 2x+\sin x=0$ denkleminin R deki çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ Yukarıda sorulan soruyu, $\sin x-\sin y=2\cdot\sin\frac{x-y}{2}\cdot\cos\frac{x+y}{2}$ den yararlanarak çözeceğiz.

$$\sin 4x-\sin 2x+\sin x=0\ \Rightarrow 2\cdot\sin\frac{4x-2x}{2}\cdot\cos\frac{4x+2x}{2}+\sin x=0$$

$$\Rightarrow 2\cdot\sin\frac{2x}{2}\cdot\cos\frac{6x}{2}+\sin x=0$$

$$\Rightarrow 2\cdot\sin x\cdot\cos 3x+\sin x=0$$

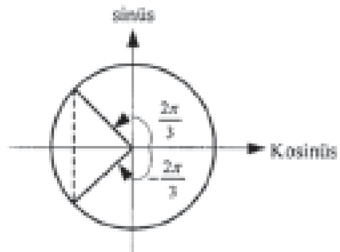
$$\Rightarrow \sin x\cdot(2\cos 3x+1)=0$$

$\sin x \cdot (2\cos 3x + 1) = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

$\underbrace{\sin x = 0}_{I} \quad \vee \quad \underbrace{2\cos 3x + 1 = 0}_{II}$ buradan x değişkeninin değerlerini bulacağız.

I. ifadeyi çözelim:

$\sin x = 0 \Rightarrow x = k \cdot \pi,\ k \in Z$

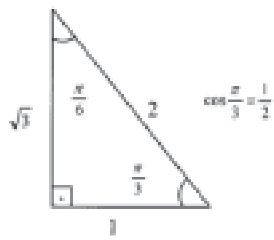


II. *ifadeyi çözelim:*

$2\cos 3x + 1 = 0 \Rightarrow 2\cos 3x = -1$

$\Rightarrow \cos 3x = \frac{-1}{2}$

$\Rightarrow \cos 3x = \cos\frac{2\pi}{3}$



Yukarıda görüldüğü üzere, elde ettiğimiz denklem $\cos x = \cos\theta$ denklemine benzemektedir. Daha önceden bu denklemin çözüm kümesinin,

$$Ç = \{x : x = \theta + k \cdot 2\pi,\ x = -\theta + k \cdot 2\pi,\ k \in Z\}$$

olduğunu biliyoruz.

O halde,

$$3x = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi \quad \vee \quad 3x = \frac{-2\pi}{3} + k \cdot 2\pi,\ k \in Z$$

$$\Rightarrow x = \frac{2\pi}{3 \cdot 3} + k \cdot \frac{2\pi}{3} \quad \vee \quad x = \frac{-2\pi}{3 \cdot 3} + k \cdot \frac{2\pi}{3},\ k \in Z$$

$$\Rightarrow x = \frac{2\pi}{9} + k \cdot \frac{2\pi}{3} \quad \vee \quad x = \frac{-2\pi}{9} + k \cdot \frac{2\pi}{3},\ k \in Z$$

Sonuç olarak, $\sin 4x - \sin 2x + \sin x = 0$ denkleminin R deki çözüm kümesi

$$Ç = \left\{x : x = k \cdot \pi \ \vee\ x = \frac{2\pi}{9} + k \cdot \frac{2\pi}{3} \ \vee\ x = \frac{-2\pi}{9} + k \cdot \frac{2\pi}{3},\ \ k \in Z\right\} \text{dir.}$$

ALIŞTIRMA 28 ⇨ $\sin 6x - \sin 4x + \sin x = 0$ denkleminin R deki çözüm kümesini bulunuz.

ÖRNEK 70 ⇨ $\sin 4x - \sin 2x + \sin x = 0$ denkleminin $0 \le x \le 2\pi$ aralığındaki çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ Bir önceki örnekte $\sin 4x - \sin 2x + \sin x = 0$ denkleminin R deki çözüm kümesini bulmuştuk.

$$Ç = \left\{x : \underbrace{x = k\cdot\pi}_{I} \vee \underbrace{x = \frac{2\pi}{9} + k\cdot\frac{2\pi}{3}}_{II} \vee \underbrace{x = \frac{-2\pi}{9} + k\cdot\frac{2\pi}{3}}_{III},\ k \in Z\right\}$$

Yukarıdaki çözüm kümesindeki k ye değerler vererek elde edeceğimiz 0 ile 2π arasında kalan x değerleri aradığımız çözüm kümesini oluşturacaktır.

I.ifadeyi çözelim:

$$x = k\cdot\pi,\ k \in Z$$

$$k = 0 \text{ için, } x = 0$$

$$k = 1 \text{ için, } x = 1\cdot\pi = \pi$$

$$k = 2 \text{ için, } x = 2\cdot\pi = 2\pi$$

$$k = 3 \text{ için, } x = 3\cdot\pi = 3\pi > 2\pi$$

O halde, $k \ge 3$ değerleri için x in aldığı değerler 0 ile 2π aralığının dışındadır.

II.ifadeyi çözelim:

$$x = \frac{2\pi}{9} + k\cdot\frac{2\pi}{3},\ k \in Z$$

$$k = 0 \text{ için, } x = \frac{2\pi}{9} + 0\cdot\frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{9}$$

$$k = 1 \text{ için, } x = \frac{2\pi}{9} + 1\cdot\frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{9} + \frac{3\cdot 2\pi}{3\cdot 3} = \frac{2\pi}{9} + \frac{6\pi}{9} = \frac{8\pi}{9}$$

$$k = 2 \text{ için, } x = \frac{2\pi}{9} + 2\cdot\frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{9} + \frac{4\pi}{3} = \frac{2\pi}{9} + \frac{12\pi}{9} = \frac{14\pi}{9}$$

$k = 3$ için,

$$x = \frac{2\pi}{9} + 3\cdot\frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{9} + \frac{6\pi}{3} = \frac{2\pi}{9} + \frac{3\cdot 6\pi}{3\cdot 3} = \frac{2\pi}{9} + \frac{18\pi}{9} = \frac{20\pi}{9} > 2\pi$$

O halde, $k \geq 3$ değerleri için x in aldığı değerler 0 ile 2π aralığının dışındadır.

III.ifadeyi çözelim:

$$x = \frac{-2\pi}{9} + k \cdot \frac{2\pi}{3},\ k \in Z$$

$k = 0$ için,

$$x = \frac{-2\pi}{9} + 0 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{-2\pi}{9}$$

$k = 1$ *için,*

$$x = \frac{-2\pi}{9} + 1 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{-2\pi}{9} + \frac{3 \cdot 2\pi}{3 \cdot 3} = \frac{-2\pi}{9} + \frac{6\pi}{9} = \frac{4\pi}{9}$$

$k = 2$ *için,*

$$x = \frac{-2\pi}{9} + 2 \cdot \frac{2\pi}{3}$$
$$= \frac{-2\pi}{9} + \frac{4\pi}{3} = \frac{-2\pi}{9} + \frac{3 \cdot 4\pi}{3 \cdot 3} = \frac{-2\pi}{9} + \frac{12\pi}{9} = \frac{10\pi}{9}$$

$k = 3$ *için,*

$$x = \frac{-2\pi}{9} + 3 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{-2\pi}{9} + \frac{6\pi}{3}$$
$$= \frac{-2\pi}{9} + \frac{3 \cdot 6\pi}{3 \cdot 3} = \frac{-2\pi}{9} + \frac{18\pi}{9} = \frac{16\pi}{9}$$

$k = 4$ *için,*

$$x = \frac{-2\pi}{9} + 4 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{-2\pi}{9} + \frac{8\pi}{3}$$
$$= \frac{-2\pi}{9} + \frac{3 \cdot 8\pi}{3 \cdot 3} = \frac{-2\pi}{9} + \frac{24\pi}{9} = \frac{22\pi}{9} > 2\pi$$

O halde, $k \geq 4$ değerleri için x in aldığı değerler 0 ile 2π aralığının dışındadır.

I., II. ve III. ifadelerinden elde ettiğimiz x değerleri denklemin $0 \leq x \leq 2\pi$ aralığındaki kökleridir. Bunlar

$$0,\ 2\pi,\ \frac{2\pi}{9}, \frac{8\pi}{9}, \frac{14\pi}{9}, \frac{-2\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}, \frac{10\pi}{9}, \frac{16\pi}{9} \text{ dur.}$$

$\sin 4x - \sin 2x + \sin x = 0$ denkleminin $0 \le x \le 2\pi$ aralığındaki çözüm kümesi,

$$Ç = \{ 0,\ 2\pi,\ \frac{2\pi}{9},\ \frac{8\pi}{9},\ \frac{14\pi}{9},\ \frac{-2\pi}{9},\ \frac{4\pi}{9},\ \frac{10\pi}{9},\ \frac{16\pi}{9} \} \text{ olur.}$$

ALIŞTIRMA 29 ⇨ $\sin 6x - \sin 4x + \sin x = 0$ denkleminin $0 \le x \le 2\pi$ aralığındaki çözüm kümesini bulunuz.

ÖRNEK 71 ⇨ $\cos^2 x - 4\cos x + 3 = 0$ denkleminin R deki çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ $\cos x = t$ ise, $\cos^2 x - 4\cos x + 3 = 0$ denklemi

$t^2 - 4t + 3 = 0$ olur.

$t^2 - 4t + 3 = 0$ denkleminin köklerini bulalım.

$at^2 + bt + c = 0$ denkleminin köklerini

$$t_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$ dan yararlanarak bulabiliriz.

$t^2 - 4t + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 1, \quad b = -4, \quad c = 3$

$$t_{1,2} = \frac{-(-4) \mp \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \mp \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \mp \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \mp 2}{2}$$

$$t_1 = \frac{4+2}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$t_2 = \frac{4-2}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ olur.}$$

$-1 \le \cos x \le 1$ olduğundan $t_1 = 3$ değeri geçersizdir. (Not: $\cos x \ne 3$)

$t_2 = 1 \quad \Rightarrow \cos x = t$
$\Rightarrow \cos x = 1$
$\Rightarrow \cos x = \cos 0$
$\Rightarrow x = k \cdot 2\pi, \quad k \in Z$ olur.

O halde, $\cos^2 x - 4\cos x + 3 = 0$ denkleminin R deki çözüm kümesi

$Ç = \{x : x = k \cdot 2\pi, \quad k \in Z\}$ dir.

ALIŞTIRMA 30 ⇨ $\sin^2 x - 4\sin x + 3 = 0$ denkleminin R deki çözüm kümesini bulunuz.

ÖRNEK 72 ⇨ $\tan x + \cot x - \dfrac{4}{\sqrt{3}} = 0$ denkleminin R deki çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ $\tan x + \cot x - \dfrac{4}{\sqrt{3}} = 0 \Rightarrow \tan x + \cot x = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$

$$\Rightarrow \underset{(\sin x)}{\frac{\sin x}{\cos x}} + \underset{(\cos x)}{\frac{\cos x}{\sin x}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin x \cdot \sin x}{\cos x \cdot \sin x} + \frac{\cos x \cdot \cos x}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \cdot \sin x} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos x \cdot \sin x} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot \sin 2x} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$ ←($\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$)

$$\Rightarrow \sqrt{3} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 2x$$ ←(İçler dışlar çarpımı)

$$\Rightarrow \sqrt{3} = 2\sin 2x$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2 \cdot \sin 2x}{2}$$ ← (Eşitliğin her iki tarafını 2 ile bölme)

$$\Rightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \sin 2x = \sin \frac{\pi}{3} \text{ olur.}$$

$\sin 2x = \sin\frac{\pi}{3}$ denkleminin R deki çözüm kümesini bulalım:

Yukarıda görüldüğü üzere, elde ettiğimiz denklem $\sin x = \sin\theta$ denklemine benzemektedir. Daha önceden bu denklemin çözüm kümesinin,

$$Ç = \{x : x = \theta + k \cdot 2\pi \quad \vee \quad x = (\pi - \theta) + k \cdot 2\pi, \quad k \in Z\}$$

olduğunu biliyoruz.

O halde,

$$2x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \quad \vee \quad 2x = (\pi - \frac{\pi}{3}) + k \cdot 2\pi \text{ , } k \in Z \qquad \leftarrow (\theta = \frac{\pi}{3})$$

$$x = \frac{\pi}{3 \cdot 2} + k \cdot \frac{2\pi}{2} \quad \vee \quad x = \frac{1}{2}(\pi - \frac{\pi}{3}) + k \cdot \frac{2\pi}{2} \text{ ,} k \in Z$$

$$\leftarrow (\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi - \pi}{3} = \frac{2\pi}{3})$$

$$x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi \quad \vee \quad x = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi \text{ , } k \in Z \text{ .}$$

Sonuç olarak, $\tan x + \cot x - \frac{4}{\sqrt{3}} = 0$ denkleminin R deki çözüm kümesi,

$$Ç = \left\{x : x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi \quad \vee \quad x = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi, \quad k \in Z\right\} \text{ olur.}$$

ALIŞTIRMA 31⇨ Aşağıdaki alıştırmaları yapınız.

(A) $\tan x + \cot x - 4 =$ denkleminin R deki çözüm kümesini bulunuz.

(B) $\tan x + \cot x - 4 =$ denkleminin $0 \le x \le 2\pi$ aralığındaki çözüm kümesini bulunuz.

ARAŞTIRMALAR

1) $\dfrac{2\cdot\cos^2 105^\circ - 1}{4} = \dfrac{-\sqrt{3}}{8}$ olduğunu gösteriniz.

2) $\dfrac{\sin 5x + \sin x + \sin 3x}{\cos 5x + \cos x + \cos 3x} = \tan 3x$ olduğunu gösteriniz.

3) $\dfrac{\cos 5A + \cos 3A}{\sin 5A - \sin 3A} = \cot A$ olduğunu gösteriniz.

4) $\cos x - \sqrt{2}\sin x = \sqrt{2}$ denkleminin R deki çözüm kümesini bulunuz.

5) $\sin\left(5x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right)$ denkleminin R deki çözüm kümesini bulunuz.

BÖLÜMÜN ÖZETİ

Her x reel sayısı için sağlanan eşitliklere (açık önermelere), **özdeşlik** denir.

Temel Trigonometrik Özdeşlikler
$A \in R$ ise, $\csc A = \dfrac{1}{\sin A}$ $\sec A = \dfrac{1}{\cos A}$ $\tan A = \dfrac{1}{\cot A}$ $\cot A = \dfrac{1}{\tan A}$ $\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$ $\cot A = \dfrac{\cos A}{\sin A}$ $\sin(-A) = -\sin A$ $\cos(-A) = \cos A$ $\tan(-A) = -\tan A$ $\cot(-A) = -\cot A$ $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ $\tan^2 A + 1 = \sec^2 A$ $1 + \cot^2 A = \csc^2 A$

Toplam-Fark Özdeşlikleri
$A \in R$ ise, $\cos(A+B)=\cos A\cdot\cos B-\sin A\cdot\sin B$ $\cos(A-B)=\cos A\cdot\cos B+\sin A\cdot\sin B$ $\sin(A+B)=\sin A\cdot\cos B+\cos A\cdot\sin B$ $\sin(A-B)=\sin A\cdot\cos B-\cos A\cdot\sin B$ $\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\cdot\tan B}$ $\tan(A-B)=\dfrac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\cdot\tan B}$ $\cot(A+B)=\dfrac{\cot A\cdot\cot B-1}{\cot A+\cot B}$ $\cot(A-B)=\dfrac{-\cot A\cdot\cot B-1}{\cot A-\cot B}$

İki Kat Açı Özdeşlikleri	Üç Kat Açı Özdeşlikleri
$A \in R$ ise, $\sin 2A=2\cdot\sin A\cdot\cos A$ $\cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A$ $\cos 2A=2\cdot\cos^2 A-1$ $\cos 2A=1-2\cdot\sin^2 A$ $\tan 2A=\dfrac{2\cdot\tan A}{1-\tan^2 A}$ $\cot 2A=\dfrac{\cot^2 A-1}{2\cdot\cot A}$	$A \in R$ ise, $\sin 3A=3\cdot\sin A-4\cdot\sin^3 A$ $\cos 3A=4\cdot\cos^3 A-3\cdot\cos A$ $\tan 3A=\dfrac{3\cdot\tan A-\tan^3 A}{1-3\cdot\tan^2 A}$

Yarım Açı Özdeşlikleri	
$A \in R$ ise, $\sin A=2\cdot\sin\dfrac{A}{2}\cdot\cos\dfrac{A}{2}$ $\cos A=\cos^2\dfrac{A}{2}-\sin^2\dfrac{A}{2}$ $\cos A=2\cdot\cos^2\dfrac{A}{2}-1$ $\cos A=1-2\cdot\sin^2\dfrac{A}{2}$	$\tan A=\dfrac{2\cdot\tan\dfrac{A}{2}}{1-\tan^2\dfrac{A}{2}}$ $\cot A=\dfrac{\cot^2\dfrac{A}{2}-1}{2\cdot\cot\dfrac{A}{2}}$

Toplam-Çarpım Özdeşlikleri	
$x, y \in R$ *ise,* $\sin x + \sin y = 2 \cdot \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$ $\sin x - \sin y = 2 \cdot \sin \frac{x-y}{2} \cdot \cos \frac{x+y}{2}$ $\cos x + \cos y = 2 \cdot \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$ $\cos x - \cos y = -2 \cdot \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$	$\tan x + \tan y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cdot \cos y}$ $\tan x - \tan y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cdot \cos y}$ $\cot x + \cot y = \frac{\sin(x+y)}{\sin x \cdot \sin y}$ $\cot x - \cot y = \frac{\sin(y-x)}{\sin x \cdot \sin y}$

Çarpım-Toplam Özdeşlikleri
$A, B \in R$ *ise,* $\sin A \cdot \cos B = \frac{1}{2} \cdot [\sin(A+B) + \sin(A-B)]$ $\cos A \cdot \sin B = \frac{1}{2} \cdot [\sin(A+B) - \sin(A-B)]$ $\cos A \cdot \cos B = \frac{1}{2} \cdot [\cos(A+B) + \cos(A-B)]$ $\sin A \cdot \sin B = -\frac{1}{2} \cdot [\cos(A+B) - \cos(A-B)]$

Bilinmeyene verilen bazı reel sayı değerleri için sağlanan açık önermelere **denklem** denir.

Denklemi sağlayan reel sayı değerlerine, **denklemin kökü** denir.

Denklemin köklerinin kümesine, **denklemin çözüm kümesi** denir.

Eğer denklemde bilinmeyen, bir trigonometrik fonksiyon (sinüs, kosinüs, tanjant, kotanjant, sekant, kosekant) ise bu denkleme **trigonometrik denklem** denir.

sinx=a, cosx=a, tanx=a ve cotx=a Biçimindeki Denklemler:

$A \in R$ ve $-1 \leq a \leq 1$ olmak üzere, $\sin x = a$ denkleminin R deki çözüm kümesi,

$$Ç = \{x : x = \theta + k \cdot 2\pi \quad \vee \quad x = (\pi - \theta) + k \cdot 2\pi, \quad k \in Z\} \text{ olur.}$$

$a \in R$ ve $-1 \leq a \leq 1$ olmak üzere, $\cos x = a$ denkleminin R deki çözüm kümesi,

$$Ç = \{x : x = \theta + k \cdot 2\pi \quad \vee \quad x = -\theta + k \cdot 2\pi, \quad k \in Z\} \text{ dir.}$$

$a \in R$ olmak üzere $\tan x = a$ denkleminin R deki çözüm kümesi,

$$Ç = \{x : x = \theta + k \cdot \pi, \quad k \in Z\} \text{ dir.}$$

$a \in R$ olmak üzere, $\cot x = a$ denkleminin R deki çözüm kümesi,

$$Ç = \{x : x = \theta + k \cdot \pi, \quad k \in Z\} \text{ dir.}$$

sinx= sina, cosx=cosa, tanx=tana ve cotx=cota Biçimindeki Denklemler:

$\theta \in R$ olmak üzere, $\sin x = \sin\theta$ denkleminin R deki çözüm kümesi,

$$Ç = \{x : x = \theta + k \cdot 2\pi \quad \vee \quad x = (\pi - \theta) + k \cdot 2\pi, \quad k \in Z\} \text{dir.}$$

$\theta \in R$ olmak üzere $\cos x = \cos\theta$ denkleminin R deki çözüm kümesi,

$$Ç = \{x : x = \theta + k \cdot 2\pi \quad \vee \quad x = -\theta + k \cdot 2\pi, \quad k \in Z\} \text{ dir.}$$

$\theta \in R - \left\{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, \quad k \in Z\right\}$ olmak üzere , $\tan x = \tan\theta$ denkleminin çözüm kümesi,

$$Ç = \{x : x = \theta + k \cdot \pi, \quad k \in Z\} \text{dir.}$$

$\theta \in R - \{k \cdot \pi, k \in Z\}$ olmak üzere $\cot x = \cot\theta$ denkleminin R deki çözüm kümesi,

$$Ç = \{x : x = \theta + k \cdot \pi, \quad k \in Z\} \text{ olur.}$$

DEĞERLENDİRME SORULARI

1) $\cot 15° + \tan 15°$ ifadesinin değeri nedir?

A) 2 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$ D) 4 E) 1

2) $\cos 100° \cdot \cos 40° + \sin 100° \cdot \sin 40°$ ifadesinin değeri nedir?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{-1}{2}$ D) $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ E) 1

3) $\cos 75° \cdot \sin 15°$ ifadesinin değeri nedir?

A) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{2-\sqrt{3}}{4}$ D) $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$

4) $\frac{4 \cdot \cos 70° \cdot \cos 20°}{\cos 100° + 1}$ ifadesinin değeri nedir?

A) cos 70° B) sec 70° C) cos 50° D) sec 50° E)sec 20°

5) $\frac{1}{1+\cot 10°}+\frac{1}{1+\tan 10°}$ ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{1}{1+\tan 10°}$ B) $\frac{1}{1+\cot 10°}$ C)1

D) $\frac{2}{1+\tan 10°}$ E) $\frac{1}{2+\tan 10° + \cot 10°}$

6) $\frac{\cos 5a + \cos 3a}{\sin 5a + \sin 3a}$ ifadesinin $a=\frac{\pi}{16}$ için değeri nedir ?

A) 0,5 B) 1 C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D)1,07 E)1,29

7) sinx=1 denkleminin çözüm kümesi nedir ?

A) $\{x : x = k\pi,\ k \in Z\}$ B) $\{x : x = \pi + k \cdot 2\pi,\ k \in Z\}$

C) $\{x : x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi,\ k \in Z\}$ D) $\{x : x = \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi,\ k \in Z\}$

E) $\{x : x = k \cdot 2\pi,\ k \in Z\}$

8) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ denkleminin çözüm kümesi nedir ?

A) $\left\{x : x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi,\ k \in Z\right\}$

B) $\left\{x : x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi,\ k \in Z\right\}$

C) $\left\{x : x = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi,\ k \in Z\right\}$

D) $\left\{x : x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \ \vee\ x = \frac{-\pi}{6} + k \cdot 2\pi,\ k \in Z\right\}$

E) $\left\{x : x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \ \vee\ x = -\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi,\ k \in Z\right\}$

9) $\tan x = -1$ denkleminin R deki çözüm kümesi nedir ?

A) $\left\{x : x = \frac{3\pi}{4} + k \cdot \pi,\ \ k \in Z\right\}$ B) $\left\{x : x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi,\ \ k \in Z\right\}$

C) $\left\{x : x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi,\ \ k \in Z\right\}$ D) $\left\{x : x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi,\ \ k \in Z\right\}$

E) $\left\{x : x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi,\ \ k \in Z\right\}$

10) $\cot x = \frac{-\sqrt{3}}{3}$ denkleminin R deki çözüm kümesi nedir ?

A) $\left\{x : x = -\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi, k \in Z\right\}$ B) $\left\{x : x = \frac{2\pi}{3} + k \cdot \pi, k \in Z\right\}$

C) $\left\{x : x = -\frac{2\pi}{3} + k \cdot \pi, k \in Z\right\}$ D) $\left\{x : x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi,\ k \in Z\right\}$

E) $\left\{x : x = -\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi,\ k \in Z\right\}$

11) $\sin x = \sin \frac{10\pi}{3}$ denkleminin R deki çözüm kümesi nedir ?

A) $\left\{x : x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \ \vee\ x = -\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi, k \in Z\right\}$

B) $\left\{x : x = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi \ \vee\ x = -\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi, k \in Z\right\}$

C) $\left\{x : x = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi,\ \ k \in Z\right\}$

D) $\left\{x : x = -\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi,\ \ k \in Z\right\}$

E) $\left\{x : x = \frac{4\pi}{3} + k \cdot 2\pi \ \vee\ x = -\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi,\ k \in Z\right\}$

12) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0$ denkleminin R deki çözüm kümesi nedir ?

A) $\left\{x : x = k \cdot \pi - \frac{2\pi}{3},\ k \in Z\right\}$ B) $\left\{x : x = k \cdot \pi + \frac{\pi}{3},\ k \in Z\right\}$

C) $\left\{x : x = k \cdot \pi + \frac{2\pi}{3},\ k \in Z\right\}$ D) $\left\{x : x = k \cdot \pi + \frac{\pi}{4},\ k \in Z\right\}$

E) $\left\{x : x = k \cdot \pi - \frac{\pi}{4},\ k \in Z\right\}$

13) $4\cos^2 x - 3\cos 2x = \sin 2x + 4\sin^2 x$ denklemini sağlayan dar açı aşağıdakilerden hangisidir ?

A) $\frac{\pi}{8}$ B) $\frac{3\pi}{8}$ C) $\frac{3\pi}{4}$ D) $\frac{\pi}{4}$ E) $-\frac{3\pi}{4}$