ÜNİTE III

SÜREKLİLİK

Süreklilik

Bazı fonksiyonların süreksiz olduğu noktaları bulma

Süreksizlik çeşitleri

Örnekler

BU BÖLÜMÜN AMAÇLARI

Bu bölümü çalıştığınızda (bitirdiğinizde);

* Limit kavramı ile süreklilik kavramı arasındaki ilişkiyi kavrayacak,
* Sağdan ve soldan süreklilik tanımlarını kavrayacak, ilgili soruların çözümlerini öğrenecek,
* Fonksiyonların süreksiz olduğu noktaları bulmayı öğrenecek,
* Süreksizlik çeşitleri hakkında bilgi sahibi olacak, verilen süreksiz fonksiyonun ne tür süreksiz olduğunu söyleyebileceksiniz.

BU BÖLÜMÜ NASIL ÇALIŞMALIYIZ?

* Limit konusunu öğrenmeden, süreksizlik konusunu öğrenmeye asla geçmeyiniz.
* Tanımları dikkatli okuyunuz.
* Verilen örnekleri inceleyip, sürekli neden, niçin sorularını kendinize sorunuz.
* Bölüm sonundaki değerlendirme sorularını mutlaka çözmeye çalışınız.

ÜNİTE III.

SÜREKLİLİK

Limit kavramı ile süreklilik kavramının birbiriyle çok yakın ilişkisi vardır. Kısaca söylemek gerekirse, süreklilik bir limit problemidir.

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

biçimindeki tanımda f fonksiyonunun x = a noktasının sağında ve solunda

$$\lim_{x \to a^+} f(x) \quad \text{ve} \quad \lim_{x \to a^-} f(x)$$

gibi sağ ve sol limitleri var, bu sağ ve sol limitler birbirine eşit yani,

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

ise f fonksiyonun x = a noktasında limiti vardır denir. Görülüyor ki limitin varlığı için fonksiyonun sağ ve sol limitleri var, birbirine eşit fakat bu limitin fonksiyonun o noktadaki değerine eşit olması gerekmez.

Örneğin;

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq a \text{ ise} \\ 0, & x = a \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan f(x) fonksiyonunu düşünelim. Buna göre

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = 1 = \lim_{x \to a^-} f(x) \text{ ise } \lim_{x \to a} f(x) = 1$$

$$f(a) = 0, \qquad f(a) \neq \lim_{x \to a} f(x)$$

olduğu açıktır. İşte, bu örnek bizi aşağıdaki tanıma götürür.

x=a'da tanımlı olmalı.

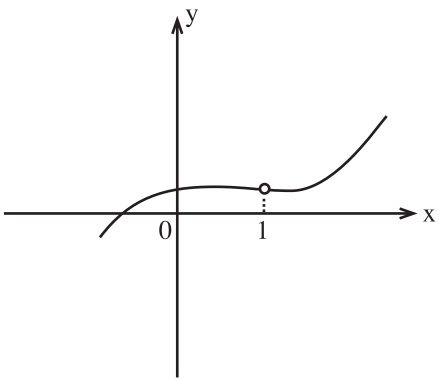
$\lim_{x \to a} f(x)$ limit var. Yani,

1. $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)$

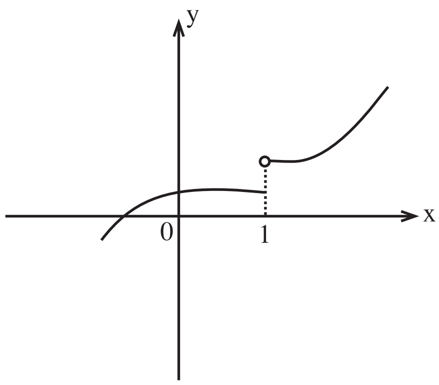
2. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

oluyorsa, f fonksiyonuna x = a noktasında süreklidir denir. Aksi hâlde, f fonksiyonuna x = a noktasında sürekli değildir veya f fonksiyonu x = a noktasında süreksizdir denir.

Limitte olduğu gibi, sürekliliği de sezgisel yolla söylemek olanağı vardır. Fonksiyonun grafiğinde hiçbir kesiklilik yoksa, fonksiyon sürekli olur. Eğer fonksiyonun grafiğinde kesiklilik varsa, bu kesikliliği yapan noktalarda fonksiyon süreksizdir denir.



x = 1 noktasında süreksiz



x = 1 noktasında süreksiz

$a,b \in R$ ve $x_0 \in (a,b)$ olmak üzere, $f : (a,b) \rightarrow R$ fonksiyonunda,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

ise, f fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir.

Eğer $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ ise f fonksiyonu, x_0 noktasında sürekli değildir. (Süreksizdir.)

f fonksiyonu en az bir $x_0 \in (a,b)$ noktasında sürekli değilse, f fonksiyonu (a,b) aralığında sürekli değildir.

BAZI FONKSİYONLARIN SÜREKSİZ OLDUĞU NOKTALARI BULMA

a) Rasyonel fonksiyonlar; paydayı sıfır yapan noktalarda, fonksiyon tanımsız olacağından, bu noktalarda süreksizdir.

Örnek : $f(x) = \dfrac{x}{x - 1}$

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ noktasında süreksizdir.

b) İrrasyonel fonksiyonlarda; kök kuvveti çift ise fonksiyon, kök içini negatif yapan değerler için tanımsız ve süreksizdir.

Örnek : $y = \sqrt{x + 1}$ fonksiyonu için $x + 1 < 0$

$x < -1$ için

tanımsız ve süreksizdir.

c) Parçalı fonksiyonlar; kritik noktalarda süreksiz olabilir. Yine de incelemekte fayda var.

d) y = Sgn f(x) fonksiyonu; $f(x) = 0$ denkleminin köklerinde süreksizdir.

Örnek : $y=\text{Sgn}(x + 1)$ fonksiyonu $x + 1 = 0$ den $x = -1$ noktasında süreksizdir.

e) y = [|f(x)|] fonksiyonu $f(x) \in Z$ olacak şekilde seçilen $x \in R$ ler için süreksiz olabilir.

Örnek : $y = \left[\left|\dfrac{2x}{3}\right|\right]$ fonksiyonu $x = 3, 6, 9, ...$ noktalarında süreksizdir.

Ancak $y = \left[\left|(x - 1)^2\right|\right]$ fonksiyonu $x = 1$ için $(x - 1)^2 \in Z$ olduğu hâlde $x = 1$ noktasında süreklidir.

O hâlde (e) deki durumu süreklilik tanımını kullanarak incelemek daha doğrudur.

Örnek : $f : R \rightarrow R$ fonksiyonu,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, & x < 1 \text{ ise} \\ 2, & x = 1 \text{ ise} \\ -x^2 - 2x + 5, & x > 1 \text{ ise} \end{cases}$$

ile tanımlansın. f fonksiyonunun $x_0 = 1$ noktasında sürekli olup olmadığını bulunuz.

Çözüm : $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{(x - 1)\ (x + 1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^-} (x + 1) = 2$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (- x^2 - 2x + 5) = -(1^+)^2 - 2\,(1^+) + 5 = -1 -2 +5 = 2$

$f(1) = 2$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2 = f(1)$

Olduğundan f(x) fonksiyonu $x_0 = 1$ noktasında süreklidir.

Örnek : $g : R \rightarrow R$

$g(x) = \text{Sgn}\,(x-2)^2$ ile tanımlansın g fonksiyonu $x_0 = 2$ noktasında sürekli midir?

Çözüm : $\lim\limits_{x \to 2^-} \text{Sgn}\,(x-2)^2 = \text{Sgn}\,(2^- - 2)^2 = \text{Sgn}\,(-0{,}0....1)^2 = 1$

$\lim\limits_{x \to 2^+} \text{Sgn}\,(x-2)^2 = \text{Sgn}\,(2^+ - 2)^2 = \text{Sgn}\,(0{,}0....1)^2 = 1$

$g(2) = \text{Sgn}\,(2-2)^2 = 0$

$\lim\limits_{x \to 2} g(x) \neq g(2)$ olduğundan

$g(x)$ fonksiyonu $x_0 = 2$ noktasında sürekli değildir.

Teorem : $A \subset R$, $x_0 \in A$ olmak üzere

$f : A \rightarrow R$ ve $g : A \rightarrow R$ fonksiyonları x_0 noktasında sürekli iseler.

1) $f + g$ fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir.

2) $f \,.\, g$ fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir.

3) $\forall x \in A$ için $g(x) \neq 0$ olmak üzere, $\frac{f}{g}$ fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir.

4) $a \in R$ olmak üzere, $a \,.\, f$ fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir.

5) $f(A) \subset A$ ise gof fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir.

Örnek : $h : R \rightarrow R$

$h(x) = [\![\, x - 1 \,]\!]$ fonksiyonu $x = 1$ noktasında sürekli midir?

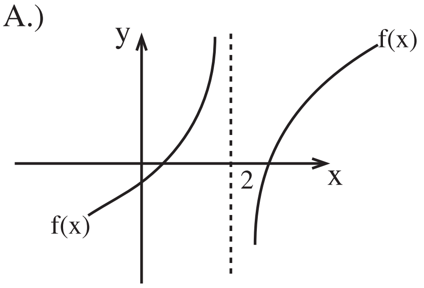
Çözüm : $\lim\limits_{x \to 1^-} h(x) = [\![1^- - 1]\!] = -1$

$\lim\limits_{x \to 1^+} h(x) = [\![1^+ - 1]\!] = 0$

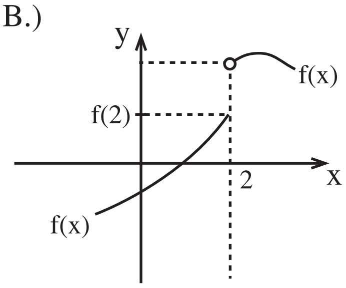
O hâlde $h(x)$ fonksiyonu $x = 1$ noktasında sürekli değildir.

Örnek : Aşağıdaki şekillere göre fonksiyonların hangi noktalarda süreksiz olduğunu gösterelim.

A.)



B.)



Çözüm : A) Şekile göre f(2) yok, Bu durumda f, x=2 noktasında süreksiz.

B) Şekile göre f(2) var. Ancak $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ yok. Bu durumda f, x=2 noktasında süreksiz.

SÜREKSİZLİK ÇEŞİTLERİ

$A \subset R$ ve $f: A \to R$ bir fonksiyon olsun.
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \in R$ fakat $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$ ise
ise f fonksiyonu x= a noktasında kaldırılabilir bir süreksizliği vardır.

Örnek : $f(x) = \begin{cases} x+1, & x<1 \text{ ise} \\ 4, & x=1 \text{ ise} \\ x^2+x, & x>1 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonunun x = 1 noktasındaki süreklilik durumunu araştırınız.

Çözüm: $\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 1^-} x+1 = 2 \\ &\lim_{x\to 1^+} 1^2+1 = 2 \end{aligned}\right\} \quad \lim_{x\to 1} f(x) = 2$

Ancak, $f(1) = 4$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) \neq f(1)$

x = 1 noktasından fonksiyonun kaldırılabilir süreksizliği vardır.

$A \subset R$ ve $f : A \rightarrow R$ bir fonksiyon olsun.
$f(a) \in R$, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L_1 \in R$, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L_2 \in R$ ve $L_1 \neq L_2$ ise
f fonksiyonunun $x = a$ noktasında sıçramalı süreksizliğe sahiptir.

Örnek : $f(x) = \text{Sgn}\,(x + 1)$ fonksiyonunda $x = -1$ noktasında ne tür süreksizliğe sahiptir?

Çözüm : $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \text{Sgn}\,(-1^- + 1) = -1$

$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \text{Sgn}\,(-1^+ + 1) = 0$

$-1 \neq 0$

O hâlde fonksiyon sıçramalı süreksizliğe sahiptir.

$A \subset R$ ve $f : A \rightarrow R$ bir fonksiyon olsun.
Eğer $x \rightarrow a$ için fonksiyonu sağdan ya da soldan limitlerinden en az biri $+\infty$ ya da $-\infty$ oluyorsa f fonksiyonu $x = a$ da sonsuz süreksizliği vardır, denir.

Örnek : $f : R \rightarrow R$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ fonksiyonunun $x = 0$ daki süreksizlik türünü belirtiniz.

Çözüm : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$

olduğundan f fonksiyonunun $x = 0$ noktasında sonsuz süreksizliği vardır.

SÜREKLİLİK İLE İLGİLİ ÖRNEKLER

Süreklilik tanımından faydalanarak aşağıdaki fonksiyonların belirtilen noktalarda sürekli olup olmadıklarnıı araştırnıız.

1) $f(x) = \text{Sgn}\ x, \ \ x_0 = 0$

Çözüm: $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \text{Sgn}\ (0^+) = +1$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \text{Sgn}\ (0^-) = -1$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$

Limit yoktur. O hâlde $x_0 = 0$ noktasında fonksiyon sürekli değildir.

2) $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}, \quad x_0 = 2$

Çözüm: $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{1}{2^- - 2} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$

Limit yok $x = 2$ noktasında sürekli değildir.

3) $f(x) = |x|\ ,\ x_0 = 0$

Çözüm: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} (+x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^-} (-x) = 0 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$ $\qquad x_0 = 0$ noktasında $f(x)$ süreklidir.

$f(0) = |0| = 0$

4) $f(x) = \text{Sgn}\ (x + 1)\ ,\ x_0 = -1$

Çözüm: $\left.\begin{array}{l} \text{Sgn}\left((-1)^+ + 1\right) = \text{Sgn}\ (0^+) = 1 \\ \text{Sgn}\left((-1)^- + 1\right) = \text{Sgn}\ (0^-) = -1 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to (-1)^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to (-1)^-} f(x)$

Limit yok $x_0 = -1$ noktasında sürekli değildir.

5) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \le 3 \\ ax + b, & 3 < x < 5 \\ 7, & x \ge 5 \end{cases}$ ise f(x) nin R de sürekli olması için a ve b ne olmalıdır?

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 3a+b$, $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = 5a+b$, $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = 7$, $f(3) = 1$, $f(5) = 7$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = f(3) \Rightarrow 3a + b \\ \lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = f(5) \Rightarrow 5a + b \end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{l} 5a + b = 7 \\ 3a + b = 1 \\ \hline 2a = 6 \\ \ \ a = 3 \qquad \text{ve } b = -8 \end{array}$$

6) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 7x + 10}$ fonksiyonların sürekli olduğu kümeyi belirtiniz.

Çözüm: Payda $x^2 - 7x + 10$

$(x - 5)(x - 2) = 0$

$x = 5$ ve $x = 2$

f(x) in sürekli olduğu aralık paydayı sıfır yapmayan değerler olduğundan, foksiyonun sürekli olduğu aralık, $R - \{2, 5\}$

7) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4}$ fonksiyonların sürekli olduğu kümeyi belirtiniz.

Çözüm: Sürekli olduğu aralık;

$-x^2 + 4 \ge 0$

$-x^2 + 4 = 0$

$x^2 = 4$

$x_{1,2} = \pm 2$

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
$-x^2+4$	-	0	+	0	-

TANIM BÖLGESİ

Sürekli olduğu aralık $\{x : -2 \le x \le 2, \ x \in R\}$

8) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - x}}$ fonksiyonunun sürekli olduğu aralık nedir?

Çözüm: Sürekli olduğu aralık;

$x^2 - x > 0$

$x^2 - x = 0$

$x(x - 1) = 0$

$x = 0\ ,\ x = 1$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x^2 - x$		+	0	-	0	+	
		çözüm				çözüm	

Sürekli olduğu aralık $\{x:\ x < 0,\quad x > 1,\quad x \in R\}$

9) $f : R \rightarrow R$ fonksiyonu

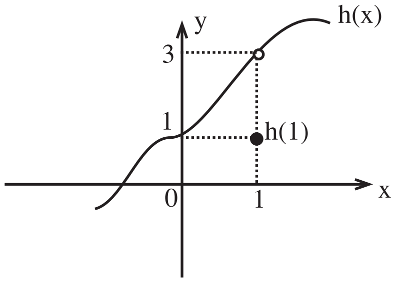
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x - 1|}{x - 1}, & x \neq 1 \text{ ise} \\ 1, & x = 1 \text{ ise} \end{cases}$$

ile tanımlanıyor, f fonksiyonunun süreksiz olduğu noktalar kümesini bulunuz.

Çözüm: Kritik nokta $x = 1$ olduğundan,

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to1^-} \frac{|x - 1|}{x - 1} &= \lim_{x\to1^-} \frac{-(x - 1)}{x - 1} = -1 \\ \lim_{x\to1^+} \frac{|x - 1|}{x - 1} &= \lim_{x\to1^+} \frac{x - 1}{x - 1} = 1 \end{aligned}\right\}$$ Limit yok. x=1 noktasında sürekli değil.

10)



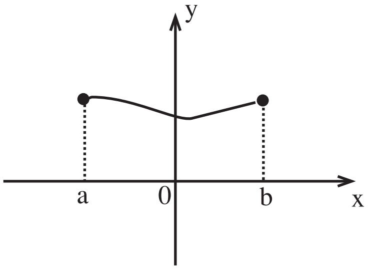
Şekildeki h fonksiyonu $x = 1$ noktasında sürekli midir?

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 1^-} h(x) = 3 \;=\lim\limits_{x\to 1^+} h(x)$

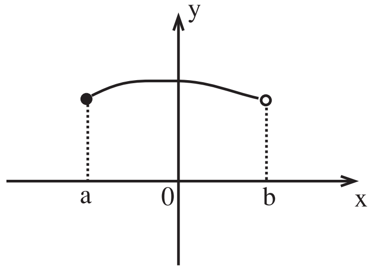
Ancak $h(1) = 1$

olduğu için h fonksiyonu $x = 1$ noktasında sürekli değildir.

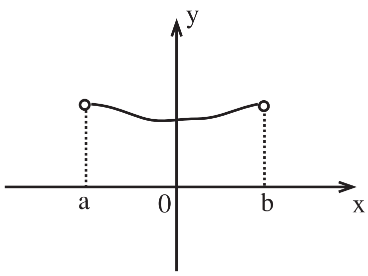
11) Aşağıda verilen f, g, h, θ fonksiyonlarını inceleyiniz.



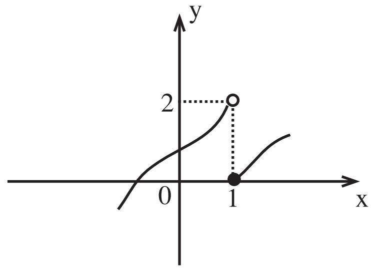
$f : [a, b] \to R$ sürekli



$g : [a, b) \to R$ sürekli



$h : (a, b) \to R$ sürekli



$\lim\limits_{x\to 1^-} \theta(x) = 2$ $\qquad \lim\limits_{x\to 1^+} \theta(x) = 0$

$\theta(1) = 0$

$x = 1$ noktasında θ fonksiyonu sürekli değil.

ÖZET

Bu bölümde, aşağıdaki konular öğrencilere verilmeye çalışılmıştır.

Limit kavramı ile süreklilik kavramının birbiriyle yakın ilişkisi anlatılmıştır.

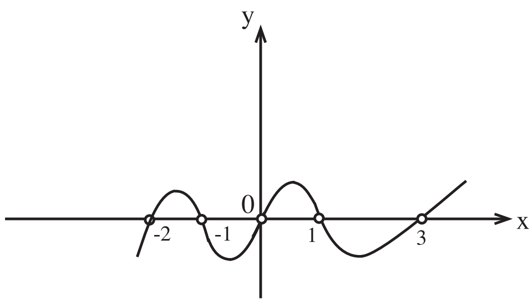
Sağdan ve soldan süreklilik tanımları verilmiştir.

Fonksiyonların süreksiz olduğu noktaları bulmak için gerekli tanım ve örnek çözümleri verilmiştir.

Süreksizlik çeşitleri hakkında bilgi verilmiş örneklerle, öğrencilerin kavrama kabiliyetleri hızlandırılmıştır.

DEĞERLENDİRME TESTİ (3)

1. Şekilde f fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Bu fonksiyonun süreksiz olduğu noktalar kümesi hangisidir?



A) {-2, -1, 2}

B) {-1, 1}

C) {-2, -1, 3}

D) {-2, -1, 0, 1, 3}

2. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{3}, & x > -3 \text{ ise} \\ \dfrac{1}{x^2 - 9}, & x \leq -3 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonu hangi x değerinde süreksizdir.

A) -3 B) -2 C) 0 D) 5

3. $f(x) = \ln(4 - x^2)$ kuralı ile verilen f fonksiyonu aşağıdaki kümelerden hangisinde süreklidir?

A) [-2, 2] B)] –∞, 2] C) [2, ∞] D) (–2, 2)

4. $f(x) = \begin{cases} x^2 + kx, & x \geq 1 \text{ ise} \\ kx + a, & x < 1 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonu R de sürekli ise a sayısı kaçtır?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1

5. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 \ , & x < 1 \ \text{ ise} \\ 3 \ , & x = 1 \ \text{ ise} \\ x^3 + x^2, & x > 1 \ \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonunda $x = 1$ noktası için aşağıdakilerden hangisi söylenir?

A) Fonksiyonun $x = 1$ noktasında limiti yoktur.

B) Fonksiyonu x , 1 noktasında süreklidir.

C) Fonksiyonun $x = 1$ noktasında kaldırılabilir süreksizliği vardır.

D) Fonksiyonun $x = 1$ noktasında sıçramalı süreksizliği vardır.

6. $f : R \rightarrow R \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x > 0, \ \text{ ise} \\ x \ , & x < 0 \ \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonunda $x = 0$ noktası için aşağıdakilerden hangisi söylenir?

A) Fonksiyonun $x = 0$ noktasında limiti vardır.

B) Fonksiyonun $x = 0$ noktasında süreklidir.

C) Fonksiyonun $x = 0$ noktasında kaldırılabilir süreksizliği vardır.

D) Fonksiyonun $x = 0$ noktasında sonsuz süreksizliği vardır.

DEĞERLENDİRME TESTİNİN ÇÖZÜMLERİ

1. $x = -2, -1, 0, 1, 3$ noktalarında tanımlı değildir. O hâlde bu noktalar süreksizlik noktalarıdır.

Doğru Cevap D

2. Kritik noktaya bak, $x=-3$ için. $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to -3^+} f(x)$ Doğru cevap A

3. Lnf(x) de sürekli olduğu noktalar $f(x) > 0$

O hâlde, $4 - x^2 > 0$

x		-2		2	
$4-x^2$	-	0	+	0	-

çözüm

Ç.K = (-2, 2)

Doğru cevap D

4.

$1 + k = k + a$

$a = 1$ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ olmalı. Doğru cevap D

5. $\lim\limits_{x\to 1^-} x^2 + 1 = 2,\ \lim\limits_{x\to 1^+} x^3 + x^2 = 2$ O hâlde kaldırılabilir süreksizliği vardır.

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 3$

Doğru cevap C

6. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$ Sonsuz süreksizliği vardır. Doğru cevap D

$\lim\limits_{x\to 0^-} x = 0$