1. ÜNİTE

PERMÜTASYON, KOMBİNASYON VE OLASILIK

BU ÜNİTENİN HEDEFLERİ

Bu üniteyi çalıştığınızda,

- Faktöriyeli kavrayabilecek,
- Faktöriyel ile ilgili uygulama yapabilecek,
- Temel sayma ilkelerini kavrayabilecek,
- Temel sayma ilkeleri ile ilgili uygulama yapabilecek,
- Permütasyonu kavrayabilecek,
- Permütasyonla ilgili uygulama yapabilecek,
- Kombinasyonu kavrayabilecek,
- Kombinasyon ile ilgili uygulama yapabilecek,
- Olasılığı kavrayabilecek,
- Olay çeşitlerini kavrayabilecek,
- Olasılıkla ilgili uygulama yapabileceksiniz.

YUKARIDAKİ HEDEFLERİ KAZANMAK İÇİN NE YAPMALIYIZ?

- Rasyonel sayılarla ilgili bilgilerinizi tekrarlayınız.
- Ondalık kesir sayıları ile ilgili bilgilerinizi tekrarlayınız.
- Konuda verilen örnekleri çözerek çalışınız.
- Konuda verilen alıştırma ve problemleri yanıtlayınız.
- Konu sonunda verilen araştırma ve değerlendirme sorularını yanıtlayınız.
- Kaynak kısmında yer alan kitaplardan yararlanarak çok sayıda soru çözünüz.

BÖLÜM 1-1

FAKTÖRİYEL VE SAYMANIN TEMEL KURALLARI

- ***FAKTÖRİYEL***
- ***SAYMANIN TEMEL KURALLARI***
- ***SIRALI n LİLER***

GİRİŞ

Bu bölümde, permütasyon, kombinasyon ve olasılık konularında çok sık olarak kullanacağımız faktöriyel konusunu öğreneceksiniz.

◆ *FAKTÖRİYEL*

Bu bölümde faktöriyel kavramının tanımı verildikten sonra örnekler verilecektir.

Faktöriyel

$n \in N$ olmak üzere 1 den n ye kadar olan doğal sayıların çarpımına ***n* faktöriyel** denir. Ve $n\,!$ ile gösterilir.

$$n\,! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Not: 0 ! = 1 ve 1 ! = 1 dir.

ÖRNEK 1 ⇨ 6 ! i kaç değişik şekilde yazabiliriz?

ÇÖZÜM ⇨ 6 ! = 6.5.4.3.2.1

6 ! = 6.5.4.3.2 !

6 ! = 6.5.4.3 !

6 ! = 6.5.4 !

6 ! = 6.5 !

ÖRNEK 2 ⇨ $(n+1)!$ değişik şekillerde yazınız.

ÇÖZÜM ⇨ $(n+1)!$ değişik şekillerde yazılımlarından bazıları şunlardır:

$(n+1)! = (n+1) \cdot n\,!$

$(n+1)! = (n+1) \cdot n \cdot (n-1)!$

$(n+1)! = (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!$

ÖRNEK 3 ⇨ $\dfrac{6\,!}{4\,!}$ işleminin sonucu nedir?

ÇÖZÜM ⇨ Yukarıda istenen işlemin sonucu iki değişik şekilde bulunabilir:

I.Yol:

$$\frac{6\,!}{4\,!}=\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{4\cdot3\cdot2\cdot1}$$

$$=6\cdot5=30$$

II.Yol:

$$\frac{6\,!}{4\,!}=\frac{6\cdot5\cdot4\,!}{4\,!}$$

$$=6\cdot5=30$$

ÖRNEK 4 ⇨ $\dfrac{4\,!-3\,!}{5\,!+4\,!}$ işleminin sonucu bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ Yukarıda verilen soruyu iki farklı yolla çözeceğiz:

I. Yol:

$$\frac{4\,!-3\,!}{5\,!+4\,!}=\frac{4\cdot3\cdot2\cdot1-3\cdot2\cdot1}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1+4\cdot3\cdot2\cdot1}=\frac{24-6}{120+24}=\frac{18}{144}=\frac{1}{8}$$ ←(Pay ve paydayı 18 ile bölme)

II. Yol:

$$\frac{4\,!-3\,!}{5\,!+4\,!}=\frac{4\cdot3!-3!}{5\cdot4\cdot3!+4\cdot3!}=\frac{3!\cdot(4-1)}{3!\cdot(20+4)}=\frac{3}{24}=\frac{1}{8}\text{ dir.}$$

ALIŞTIRMA 1 ⇨ Aşağıdaki işlemlerin sonucunu bulunuz.

(A) $\dfrac{6\,!}{5!}$ (B) $\dfrac{9\,!-7\,!}{2\,!+5\,!}$

◆ ***SAYMANIN TEMEL KURALLARI***

Bu bölümde çarpma ve toplama kuralı hakkında örneklerle bilgi verilecektir.

Çarpma Kuralı

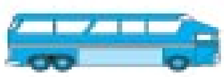
Saymanın temel kurallarından olan çarpma kuralı açıklanacaktır.

ÖRNEK 5 ⇨ Semra, Gümüşhane'den İstanbul'a gitmek istemektedir. Bunun için Gümüşhane'den Trabzon'a otomobil veya otobüsle gidebilirken, Trabzon'dan İstanbul'a otomobil, otobüs, uçak veya gemi ile gidebilmektedir. Semra, Gümüşhane'den İstanbul'a kaç değişik şekilde gidebilir?

ÇÖZÜM ⇝ Bir önceki sayfada sorulan soruyu üç farklı yolla çözeceğiz.

I.Yol:

Bu soruyu ağaç şeması kullanarak şu şekilde çözebiliriz:



<u>Gümüşhane</u>	<u>Trabzon</u>	<u>İstanbul (Varış)</u>
	otomobil	otomobil-otomobil
otomobil	otobüs	otomobil-otobüs
	uçak	otomobil-uçak
	gemi	otomobil-gemi
	otomobil	otobüs-otomobil
otobüs	otobüs	otobüs-otobüs
	uçak	otobüs-uçak
	gemi	otobüs-gemi
2	**x 4**	**= 8**

Gümüşhane'den Trabzon'a 2 farklı araçla, Trabzon'dan İstanbul'a 4 farklı araçla gidilebilmektedir. Sonuçta, Gümüşhane'den İstanbul'a sıralı bir şekilde 8 farklı araçla gidilebilmektedir.

II. Yol:

Bu örnekten sonra tanımı verilecek olan çarpma kuralına göre,

$$m_1 = 2 \text{ ve } m_2 = 4 \Rightarrow m_1 \cdot m_2 = 2 \cdot 4 = 8 \text{ dir.}$$

III. Yol:

Aynı soruyu "kümeler teorisi" ni kullanarak şu şekilde çözebiliriz:

$A_1 = \{\text{otomobil, otobüs}\}, \quad s(A_1) = 2$

$A_2 = \{\text{otomobil, otobüs, uçak, gemi}\}, \quad s(A_2) = 4$

$A_1 \; X \; A_2 = \{$(otomobil, otomobil), (otomobil, otobüs), (otomobil,uçak), (otomobil, gemi), (otobüs, otomobil), (otobüs, otobüs), (otobüs, uçak), (otobüs, gemi) $\}$

$$s(A_1 \; X \; A_2) = s(A_1) \cdot s(A_2) = 2 \cdot 4 = 8 \text{ dir.}$$

Çarpma Kuralı

Bir işlem m_1 farklı yolla, bunu izleyen işlem bir önceki işleme bağlı olarak m_2 farklı yolla,…, n inci işlem bir önceki işlemlere bağlı olarak m_n farklı yolla yapılabilsin. Bu olayın tamamı sıralı bir biçimde $m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n$ farklı yolla yapılabilir.

ÖRNEK 6 ⇨ Farklı özellikte 3 kimya, 2 matematik ve 2 biyoloji kitabı arasından 1 kimya, 1 matematik ve 1 biyoloji kitabını seçmek istiyoruz. Bu seçim kaç değişik şekilde yapılabilir?

ÇÖZÜM ⇨ Çarpma kuralına göre, 3 kimya, 2 matematik ve 2 biyoloji kitabı arasından 1 kimya, 1 matematik ve 1 biyoloji kitabı,

$$3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$$

farklı şekilde seçilebilir.

Siz de yukarıda sorulan soruyu ağaç şeması çizerek çözünüz.

ÖRNEK 7 ⇨ Bir sınıfta 35 öğrenci bulunmaktadır. Bu sınıfta ilk önce, bir başkan ve daha sonra bir başkan yardımcısı seçilmek istenmektedir. Bu işlem kaç değişik şekilde yapılabilir?

ÇÖZÜM ⇨ Başkan, 35 öğrenci arasından 35 değişik biçimde seçilebilir.

Başkan yardımcısı, geriye kalan 34 öğrenci arasından 34 değişik biçimde seçilebilir.

Buna göre, bir başkan ve bir başkan yardımcısı,

$$35 \cdot 34 = 1190$$

değişik biçimde seçilebilir.

ÖRNEK 8 ⇨ K={0, 2, 6, 7, 9} kümesinin elemanlarıyla 3 basamaklı kaç çift sayı yazılabilir?

ÇÖZÜM ⇨ Yazılan sayının çift olabilmesi için birler basamağına, K kümesindeki 0, 2 veya 6 rakamları olmak üzere 3 tane rakam yazılabilir. Onlar basamağına kümede verilen 5 tane rakam yazılabilir. Sayı üç basamaklı olacağından yüzler basamağına sıfır yazılamayacaktır. Bu durumda yüzler basamağına 4 tane rakam yazılabilir.

O halde, 3 basamaklı çift sayı şu şekilde oluşturulabilir:

Basamak → Yüzler Onlar Birler

Yüzler	Onlar	Birler
4	5	3
{2, 6, 7, 9}	{0, 2, 6, 7, 9}	{0, 2, 6}

Sonuç olarak, yazılabilecek 3 basamaklı çift sayı sayısı,

$4 \cdot 5 \cdot 3 = 60$ tır.

ÖRNEK 9 ⇒ $A = \{3,6,1,8\}$ kümesindeki rakamlarla, 3 basamaklı sayılar yazılacaktır. Her basamakta bir rakam bir kez yazılacağına göre, kaç tane 3 basamaklı sayı yazılabilir?

ÇÖZÜM ⇒ Sayımız **abc** olsun. Bu sayı yazılırken:

a, 4 rakam arasından;

b, kalan 3 rakam arasından;

c, kalan 2 rakam arasından seçilir.

Bunu kutu yöntemi ile de gösterelim:

Basamak → Yüzler Onlar Birler

a	b	c
4	3	2

O halde, belirtilen şartları sağlayacak şekilde,

$$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

tane 3 basamaklı sayı yazılabilir.

ÖRNEK 10 ⇨ $\{9,7,6,4,2,1\}$ kümesindeki <u>rakamlar tekrar kullanılmadan</u> yazılan üç basamaklı sayıların kaç tanesi 600 den büyüktür?

ÇÖZÜM ⇨ Sayımız **abc** gibi bir sayı olsun. Üç basamaklı sayının 600 den büyük olabilmesi için,

a, 6 ya eşit veya 6 dan büyük olan 6, 7 ve 9 rakamları arasından;

b, kalan 6-1 = 5 rakam arasından;

c, kalan 5-1 = 4 rakam arasından seçilir.

Bunu kutu yöntemi ile de gösterelim:

Basamak → Yüzler Onlar Birler

a	b	c
3	5	4

O halde, istenen şartlar yerine getirilerek 600 den büyük,

$$3 \cdot 5 \cdot 4 = 60$$

tane sayı elde edilebilir.

ÖRNEK 11 ⇨ $\{9, 7, 6, 4, 2, 1\}$ kümesindeki rakamların <u>tekrar kullanılmasına izin verildiği</u> zaman kaç tane 600 den büyük 3 basamaklı sayı yazılabilir?

ÇÖZÜM ⇨ Sayılardan biri **abc** gibi bir sayı olsun. 3 basamaklı sayının 600 den büyük olabilmesi için,

a, 6 ya eşit veya 6 dan büyük olan 6, 7 ve 9 rakamları arasından;

b ve **c** rakamları, kümedeki rakamların tekrar kullanılmasına izin verildiği için 6 rakam arasından seçilir.

Bunu kutu yöntemi ile de gösterelim:

Basamak → Yüzler Onlar Birler

a	b	c
3	6	6

O halde, istenen şartlar yerine getirilerek 600 den büyük,

$$3 \cdot 6 \cdot 6 = 108$$

tane sayı elde edilir.

ÖRNEK 12 ⇨ Spor–Toto'da 13 maçı da doğru tahmin edebilmek için kaç kolon oynamak gerekir?

ÇÖZÜM ⇨ A ve B takımları arasındaki maç berabere bitebilir veya A takımı yenebilir veya B takımı yenebilir. Başka bir deyişle, maç üç değişik sonuçla bitebilir. Spor-Toto'da 13 maçı doğru tahmin edebilmek için, çarpma kuralına göre,

$$\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 3}_{13 \text{ tane}} = 3^{13} = 1594323$$

kolonun oynanması gerekir.

ALIŞTIRMA 2 ⇨ Aşağıda verilmiş olan alıştırmaları yapınız:

(A) 8 kız ve 8 erkek arasından bir kız ve bir erkek kaç değişik şekilde seçilebilir?

(B) Ahmet, lokantaya gidince garson 10 çeşit yemek, 5 çeşit tatlı çeşidi saymıştır. Ahmet, bunların arasından bir yemek ve bir tatlıyı kaç değişik şekilde seçebilir?

Toplama Kuralı

Saymanın temel kurallarından olan toplama kuralı açıklanacaktır.

ÖRNEK 13 ⇨ Bir mağazada 30 çanta ve 115 ayakkabı vardır. Bir çanta veya bir ayakkabı, kaç değişik yolla seçilebilir?

ÇÖZÜM ⇨ Ç kümesi çantaların, A kümesi ise ayakkabıların kümesi olsun. Ç ve A kümesinin ortak elemanı olmadığı için bu iki küme ayrıktır.

$$s(Ç) = 30 \text{ ve } s(A) = 115 \Rightarrow s(Ç \cup A) = s(Ç) + s(A) = 30 + 115 = 145$$

değişik yolla bir çanta **veya** bir ayakkabı seçebiliriz.

Not: Toplama kuralıyla ifade edilen seçme işinde, seçilenin bir tane eleman olduğuna dikkat ediniz. Başka bir deyişle, 30 çanta ve 115 ayakkabı arasından bir tane çanta ya da bir tane ayakkabı seçilmektedir.

Toplama Kuralı

İki küme ortak elemana sahip değilse ($A \cap B = \emptyset$ ise) bu iki kümeye ayrık denir. A ve B sonlu ve ayrık iki küme olsun.

$$s(A) = m \text{ ve } s(B) = n \Rightarrow s(A \cup B) = s(A) + s(B) = m + n$$

Buna göre ayrık iki işlemden biri m yolla diğeri n yolla yapılabiliyorsa bir işlemden biri **veya** diğeri $m+n$ yolla yapılabilir. Bu yönteme "**toplama kuralı**" denir.

ALIŞTIRMA 3 ⇨ Suat'ın 3 kazağı ve 4 pantolonu vardır. Bir kazak veya bir pantolonu kaç değişik yolla seçebilir?

♦ *SIRALI n LİLER*

Sıralı n li kavramı ve eşitliği açıklanacaktır.

Sıralı n liler

$n \in N^+$ olmak üzere $a_1, ..., a_n$ ile gösterilen n tane nesneden oluşurlar. $(a_1, a_2, ..., a_n)$ gösterimine **sıralı n li** denir.

ÖRNEK 14 ⇨ (a_4, a_5, a_6) sıralının ismi nedir?

ÇÖZÜM ⇨ (a_4, a_5, a_6) sıralı 3 lüdür.

ÖRNEK 15 ⇨ Bir tane sıralı 5 li için bir örnek veriniz.

ÇÖZÜM ⇨ $(b_2, b_3, b_4, b_5, b_6)$ sıralı 5 li için örnek verilebilir.

ARAŞTIRMALAR

1) Saymanın temel kurallarından çarpma kuralı ile toplama kuralını karşılaştırınız.
2) Çarpma kuralı ile ilgili özgün soru yazınız ve çözünüz.
3) Toplama kuralı ile ilgili özgün soru yazınız ve çözünüz.

BÖLÜMÜN ÖZETİ

$n \in N$ olmak üzere 1 den n ye kadar olan doğal sayıların çarpımına ***n* faktöriyel** denir. Ve ***n*!** ile gösterilir.

$$n\,! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Çarpma Kuralı: Bir işlem m_1 farklı yolla, bunu izleyen işlem bir önceki işleme bağlı olarak m_2 farklı yolla,…, n inci işlem bir önceki işlemlere bağlı olarak m_n farklı yolla yapılabilsin. Bu olayın tamamı sıralı bir biçimde $m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n$ farklı yolla yapılabilir.

Toplama Kuralı: İki küme ortak elemana sahip değilse ($A \cap B = \emptyset$ ise) bu iki kümeye ayrık denir. A ve B sonlu ve ayrık iki küme olsun.

$$s(A) = m \;\text{ ve }\; s(B) = n \;\Rightarrow\; s(A \cup B) = s(A) + s(B)$$
$$\Rightarrow\; s(A \cup B) = m + n$$

Buna göre ayrık iki işlemden biri m yolla diğeri n yolla yapılabiliyorsa bir işlemden biri **veya** diğeri $m+n$ yolla yapılabilir.

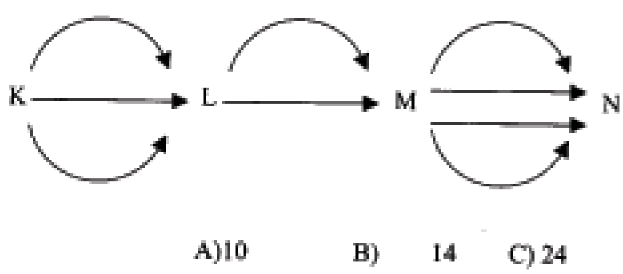
$n \in N^{+}$ olmak üzere $a_1, \ldots, a_n$ ile gösterilen n tane nesneden oluşan $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ gösterimine **sıralı *n* li** denir.

DEĞERLENDİRME SORULARI

1) $\dfrac{n-3!}{2!} = \dfrac{6!}{5!}$ ifadesindeki n değeri kaçtır?

A) 2 B) 5 C) 6 D) 12 E) 18

2) K, L, M, N kentleri arasında K den L ye 3, L den M ye 2, M den N ye 4 farklı yol vardır. Mengü, gittiği yolu dönüşte kullanmamak üzere K den hareket ederek; L ve M den geçip N ye vararak L ye kaç farklı şekilde geri dönebilir?



A)10 B) 14 C) 24 D) 48 E) 72

3) {0, 1, 2, 3, 4} kümesinin elemanları tekrar kullanılarak 3 basamaklı kaç tane tek sayı yazılabilir?

A) 4 B) 5 C) 20 D) 40 E) 80

4) Alperen, arkadaşı Emrecan'a doğum günü hediyesi olarak spor ayakkabısı veya gömlek almak istemektedir. Alpren'in gittiği mağazada, 4 farklı model spor ayakkabısı ve 3 farklı renk gömlek vardır. Alperen, kaç farklı şekilde bir spor ayakkabısı veya bir gömlek alabilir?

A) 3 B) 4 C) 6 D) 7 E) 12

BÖLÜM 1-2

PERMÜTASYON

- ***PERMÜTASYON***
- ***TEKRARLI PERMÜTASYON***
- ***DÖNEL PERMÜTASYON***

GİRİŞ

Bu bölümde permütasyon ve çeşitleri ile ilgili tanımlar örneklerle açıklanacaktır.

◆ *PERMÜTASYON*

"Bir okulda 15 kişiden oluşan bir "matematik topluluğu" bulunmaktadır. Bu topluluğun üyeleri kendi aralarında bir başkan ve bir başkan yardımcısı seçecektir. Fakat bu kişilerin tümü başkan veya başkan yardımcısı olmak istemektedir. Bu durumda başkan ve başkan yardımcısından oluşan kaç farklı grup oluşturulabilir?"

Bu soru, çarpma kuralı ile çözülebileceği gibi permütasyon kavramını kullanılarak da çözülebilir.

Permütasyon

Bir küme elemanlarının belirli bir sıraya göre dizilişlerinin her birine bir **permütasyon** denir.

r li Permütasyon

$r, n \in N^+$ ve $r \leq n$ olması koşulu ile , n elemanlı bir A kümesinin birbirinden farklı elemanlı her sıralı r lisine , A kümesinin ***r* li permütasyonu** denir.

ÖRNEK 1⇨ $A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ kümesinin 4 lü permütasyonlarından iki tanesini yazınız.

ÇÖZÜM ⇨ (3, 4, 5, 6) ve (5, 6, 7, 8) dir.

Teorem: $r, n \in N^+$ ve $r \leq n$ koşulu ile , n elemanlı bir A kümesinin *r* **li permütasyonlarının sayısı,**

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!} \text{ dir.}$$

İspat:

$$\underbrace{n(n-1)...(n-(r-1))}_{P(n,r)} \cdot \underbrace{(n-r)...3 \cdot 2 \cdot 1}_{(n-r)!} = n!$$

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!} \quad ✓$$

n li Permütasyon

n eleman, n yere $n!$ biçimde sıralanabilir.

$n!$ ifadesine, n elemanın n li sıralaması veya n nin **n li permütasyonu** denir.

n Elemanlı Kümenin n li Permütasyonların Sayısı

n tane elemanı olan bir kümenin n li permütasyonlarının sayısı,

$$P(n,n) = n! \text{ dir.}$$

Eğer P(n,r) formülünde $r = n$ ise,

$$P(n,n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n! = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \text{ dir.}$$

Uyarı:
Permütasyonda, birbirinden farklı elemanların değişik sıralanışları söz konusudur.

ÖRNEK 2⇨ Bir odadaki 5 boş koltuğa Özlem ve Ali sırayla kaç farklı şekilde oturabilir?

ÇÖZÜM ⇨ Yukarıda sorulan soruyu iki farklı yolla çözeceğiz:

I.Yol:
Özlem, boş bulunan 5 koltuktan birine oturabilir. Özlem'in 5 değişik seçim hakkı vardır. Özlem oturduktan sonra, Ali kalan 4 koltuktan birine oturacaktır.
Çarpma kuralına göre, Özlem ve Ali 5 koltuğa,

$$5 \cdot 4 = 20$$

farklı şekilde oturabilirler.

II.Yol:
Permütasyon ile ilgili formülü kullanarak soruyu şu şekilde çözebiliriz:

$$P(5,2) = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 5 \cdot 4 = 20 \qquad \leftarrow P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

farklı şekilde oturabilirler.

ÖRNEK 3 ⇨ Bir yüzme yarışmasına 10 yüzücü katılmıştır. İlk üç derece kaç farklı şekilde oluşabilir?

ÇÖZÜM ⇨ Yukarıda sorulan soruyu iki farklı yolla çözeceğiz:

I.Yol:
Yukarıda sorulan soruyu çarpma kuralı kullanarak çözelim:
Birinci, 10 değişik şekilde; ikinci, kalan 9 kişi arasından 9 değişik şekilde; üçüncü, kalan 8 kişi arasından 8 değişik şekilde oluşabilir.
Buna göre, ilk üç derece,

$$\underset{1.}{\underset{\uparrow}{10}} \cdot \underset{2.}{\underset{\uparrow}{9}} \cdot \underset{3.}{\underset{\uparrow}{8}} = 720$$

farklı şekilde oluşabilir.

II.Yol:
Yukarıda sorulan soruyu, permütasyon ile ilgili formülü kullanarak şu şekilde çözebiliriz:

On yüzücünün 3 ü sıralamaya gireceği için, sıralama,

$$P(10,3) = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7!} = 720 \qquad \leftarrow \left(P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!} \right)$$

farklı şekilde oluşabilir.

ÖRNEK 4 ⇨ 5 basamaklı 84953 sayısının basamaklarındaki rakamların sıralanışı değiştirilerek, birbirinden farklı kaç tane 5 basamaklı sayı yazılabilir?

ÇÖZÜM ⇨ Görüldüğü üzere 84953 sayısındaki 5 rakam birbirinden farklıdır. Bu 5 rakamın birbirinden farklı her sıralanışı, farklı bir sayı oluşturur. Beş basamaklı ve birbirinden farklı,

$$P(5,5)=\frac{5\,!}{(5-5)\,!}=\frac{5\,!}{0\,!}=\frac{5\,!}{1}=5\,!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120 \leftarrow \left(P(n,r)=\frac{n\,!}{(n-r)!}\right)$$

tane sayı yazılabilir.

ÖRNEK 5 ⇨ Bir okulda 7 kişiden oluşan bir matematik topluluğu bulunmaktadır. Bu topluluğun üyeleri kendi aralarında bir başkan ve bir başkan yardımcısı seçecektir. Kaç farklı şekilde bu seçim yapılabilir?

ÇÖZÜM ⇨ İstenen seçim,

$$P(7,2)=\frac{7\,!}{(7-2)\,!}=\frac{7\,!}{5\,!}=\frac{7\cdot6\cdot5\,!}{5\,!}=7\cdot6=42 \qquad \leftarrow \left(P(n,r)=\frac{n\,!}{(n-r)!}\right)$$

farklı şekilde yapılabilir.

ÖRNEK 6 ⇨ 4 çocuk, anne ve babadan oluşan bir aile fotoğraf çektirecektir. Anne ve baba ön tarafta sandalyede oturacaktır. Çocuklar ise arka tarafta ayakta duracaktır. Bu durum göz önüne alınarak, kaç değişik şekilde sıralanarak fotoğraf çektirebilirler?

ÇÖZÜM ⇨ Anne ve babanın kendi aralarında sıralanışlarının sayısı,

$P(2,2) = 2!$ dir. $\leftarrow (P(n,n) = n!)$

Çocukların kendi aralarında sıralanışların sayısı,

$P(4,4) = 4!$ dir. $\leftarrow (P(n,n) = n!)$

O halde, soruda belirtilen biçimdeki sıralanışlarının sayısı,

$$2\,!\cdot 4\,!=(2\cdot1)\cdot(4\cdot3\cdot2\cdot1)=2\cdot24=48 \text{ dir.}$$

ÖRNEK 7 ⇨ 6 kişinin oturabileceği sıraya, 4 kız ve 2 erkek yan yana oturacaklardır. Kızlar kendi aralarında erkekler kendi aralarında oturacaklarsa kaç farklı şekilde oturabilirler ?

ÇÖZÜM ⇨ Yukarıda sorulan soruyu iki farklı şekilde çözeceğiz:

I.Yol:

Kızlar kendi aralarında,

$P(4,4) = 4!$ farklı şekilde oturabilirler. $\leftarrow$ ($P(n,n) = n!$)

Erkekler kendi aralarında,

$P(2,2) = 2!$ farklı şekilde oturabilirler. $\leftarrow$ ($P(n,n) = n!$)

Ayrıca erkeklerle kızlar iki farklı konumda oturabilirler. Bunlar, $KKKKEE$, $EEKKKK$ olduğundan her konum için farklı oturuş sayısı sırasıyla,

$$4!\cdot 2! \; \textit{ve} \; 2!\cdot 4! \text{ dir.}$$

O halde, kızlar kendi aralarında, erkekler kendi aralarında oturması koşulu ile

$$\begin{aligned} 4!\cdot 2! + 2!\cdot 4! &= (4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)\cdot(2\cdot 1) + (2\cdot 1)\cdot(4\cdot 3\cdot 2\cdot 1) \\ &= 48 + 48 \\ &= 96 \end{aligned}$$

farklı şekilde oturabilirler.

II.Yol:

KKKK ve EE birer kişi olarak düşünülürse 2! şekilde yer değiştirebilirler. Kızlar ve erkekler bir de kendi aralarında yer değiştirebileceğinden $4!\cdot 2!$ farklı şekilde oturabilirler. Sonuç olarak, kızlar kendi aralarında, erkekler kendi aralarında oturması koşulu ile sıraya,

$$2!\cdot 4!\cdot 2! = (2\cdot 1)\cdot(4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)\cdot(2\cdot 1) = 96$$

farklı şekilde oturabilirler.

P(n,r) değerinin, permütasyon formülü kullanılmadan neden aşağıda açıklandığı gibi doğrudan hesaplanabildiğini açıklayınız.

P(n,r) hesaplanırken çarpanların sayısı r tanedir ve n den başlayarak r tane çarpan olana kadar birer eksilerek dizilen çarpanlar yazılır.
Örneğin: $P(7,3) = 7\cdot 6\cdot 5$ veya $P(9,4) = 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6$

ÖRNEK 8 ⇨ Bir mağaza sahibi, bir kasiyer ve bir satış görevlisi almak istemektedir. *Her iki* görev için toplam 20 kişi başvurmuştur. Bu kadrolar kaç farklı şekilde doldurulabilir?

ÇÖZÜM ⇨ Yukarıdaki soruda verilen durum göz önüne alındığı zaman adı geçen iki kadro,

$$P(20,2)=\frac{20!}{(20-2)!} \qquad \leftarrow \left(P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}\right)$$

$$=\frac{20!}{18!}=\frac{20\cdot 19\cdot 18!}{18!}=20\cdot 19=380$$

farklı şekilde doldurulabilir.

ALIŞTIRMA 1 ⇨ Aşağıda verilmiş olan alıştırmaları yapınız:

(A) 6 basamaklı 243519 sayısının basamaklarındaki rakamların sıralanışları değiştirilerek birbirinden farklı kaç tane 6 basamaklı sayı yazılabilir?

(B) Birbirini tanımayan Cansu ve Emrecan otobüse bindiği zaman 12 tane koltuk boştur. Cansu ve Emrecan kaç değişik şekilde bu koltuklara oturabilir?

◆ *TEKRARLI PERMÜTASYON (TEKRARLI SIRALAMA)*

"Aynı özelliklere sahip 3 matematik ve 2 kimya kitabı bir rafa yan yana kaç farklı şekilde dizilebilir?"

Bu soru, tekrarlı permütasyon kavramı kullanılarak çözülebilir.

Teorem: n tane nesnenin; n_1 tanesi 1. çeşitten, n_2 tanesi 2. çeşitten, n_3 tanesi 3. çeşitten, …., n_r tanesi r. çeşitten olsun.

$$n=n_1+n_2+...+n_r$$

olmak üzere bu n tane nesnenin n li permütasyonlarının (farklı sıralamalarının) sayısı :

$$\binom{n}{n_1,n_2,...,n_r}=\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot ...\cdot n_r!} \text{ dir.}$$

ÖRNEK 9 ➾ 7977 sayısındaki rakamların yerleri değiştirilerek 4 basamaklı kaç farklı sayı yazılabilir?

ÇÖZÜM ➾ Yukarıda sorulan soruyu iki farklı yolla çözeceğiz:

I.Yol:

Eğer 7977 sayısındaki 4 rakam birbirinden farklı olsaydı,

$$P(4,4) = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \qquad \leftarrow (P(n,n) = n!)$$

farklı şekilde 4 basamaklı farklı sayı yazılabilirdi.

7977 sayısı, 1 tane "9" ve 3 tane "7" rakamından oluşmaktadır.
7977 sayısındaki 7 rakamlarını,

a_1, a_2, a_3 ile gösterelim.

a_1, a_2, a_3 rakamları kendi aralarında,

$$P(3,3) = \frac{3!}{(3-3)!} = \frac{3!}{0!} = \frac{3!}{1} = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \qquad \leftarrow (P(n,n) = n!)$$

farklı şekilde sıralanır.

a_1, a_2, a_3 rakamları, aynı rakam (7 rakamı) olduğundan bunların kendi aralarında yer değiştirmeleri, 4 basamaklı sayıyı değiştirmez.

Buna göre, $P(4,4) = 4! = 24$ sayının, $P(3,3) = 3! = 6$ tanesi birbirinin aynıdır.

O halde, 7977 sayısındaki rakamların yerleri değiştirilerek 4 basamaklı ve birbirinden farklı,

$$\frac{4!}{3!} = \frac{24}{6} = 4$$

farklı sayı yazılabilir.

II.Yol

Yukarıda sorulan soruyu tekrarlı permütasyon teoremini kullanarak çözebiliriz:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Toplam basamak sayısı 4 tür} & (n = 4) \\ \text{7 rakamının sayısı 3 tür} & (n_1 = 3) \\ \text{9 rakamının sayısı 1 dir} & (n_2 = 1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} n = n_1 + n_2 \\ 4 = 3+1 \\ 4 = 4 \checkmark \end{array}\right.$$

$$\binom{n}{n_1, n_2} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2!} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = \frac{4 \cdot 3!}{3!} = 4$$

tane farklı sayı yazılabilir.

ÖRNEK 10 ⇒ "BİLGİSAYAR" kelimesindeki harflerin sırası değiştirilerek, anlamlı ya da anlamsız 10 harfli ve birbirinden farklı kaç grup oluşturulabilir?

ÇÖZÜM ⇒

Toplam harf sayısı 10 dur. $(n=10)$
"B" harfinin sayısı 1 dir. $(n_1=1)$
"İ" harfinin sayısı 2 dir. $(n_2=2)$
"L" harfinin sayısı 1 dir. $(n_3=1)$
"G" harfinin sayısı 1 dir. $(n_4=1)$
"S" harfinin sayısı 1 dir. $(n_5=1)$
"A" harfinin sayısı 2 dir. $(n_6=2)$
"Y" harfinin sayısı 1 dir. $(n_7=1)$
"R" harfinin sayısı 1 dir. $(n_8=1)$

$$n = n_1+n_2+n_3+n_4+n_5+n_6+n_7+n_8$$
$$10 = 1+2+1+1+1+2+1+1$$
$$10 = 10 \checkmark$$

$$\binom{n}{n_1, n_2, n_3, ..., n_6, n_7, n_8} = \frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot n_3!\cdot ...\cdot n_6!\cdot n_7!\cdot n_8!}$$

$$\binom{10}{1,2,1,1,1,2,1,1} = \frac{10!}{1!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!}$$
$$= \frac{10!}{2!\cdot 2!}$$
$$= \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1\cdot 2\cdot 1}$$
$$= 907200$$

farklı anlamlı ya da anlamsız 10 harfli birbirinden farklı grup oluşturulabilir.

ÖRNEK 11 ⇒ Aynı özelliklere sahip 3 matematik ve 2 kimya kitabı bir rafa yan yana kaç farklı şekilde dizilebilir?

ÇÖZÜM ⇒

Toplam kitap sayısı 5 tir. $(n=5)$
Matematik kitabının sayısı 3 tür. $(n_1=3)$
Kimya kitabının sayısı 2 dir. $(n_2=2)$

$$n = n_1+n_2$$
$$5 = 3+2$$
$$5 = 5 \checkmark$$

$$\binom{5}{3,2} = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3!}{3!\cdot 2!} = \frac{5\cdot 4}{2\cdot 1} = 10$$

farklı şekilde dizilebilir.

ALIŞTIRMA 2 ⇨ Aşağıdaki alıştırmaları yapınız:

(A) "Mutluluk" kelimesindeki harflerin yeri değiştirilerek anlamlı ya da anlamsız 8 harfli ve birbirinden farklı kaç grup oluşturulabilir?

(B) {5, 4, 4, 3, 4} rakamlarıyla 5 basamaklı kaç tane farklı sayı yazılabilir?

◆ ***DÖNEL PERMÜTASYON (DÖNEL SIRALAMA veya DAİRESEL PERMÜTASYON)***

"4 çocuk ve anne babadan oluşan 6 kişilik bir aile yuvarlak masada yemek yiyecektir. Masa etrafında kaç farklı şekilde oturabilir?"

Bu soru, dönel permütasyon kavramı kullanılarak çözülebilir.

> **Dönel Permütasyon**
>
> Birbirinden farklı n tane elemanın, bir çember etrafındaki sıralanışlarının herbirine n tane elemanın **dönel permütasyonu** (dönel sıralaması veya dairesel permütasyonu) denir.
>
> n tane elemandan birinin yeri sabit gibi düşünülüp diğerlerinin bu elemana göre sıralanışı göz önüne alınırsa, n tane elemanın dönel permütasyonlarının sayısı $(n-1)!$ olur.

ÖRNEK 12 ⇨ 4 çocuk ve anne babadan oluşan 6 kişilik bir aile yuvarlak masada yemek yiyecektir. Bu aile masa etrafında kaç farklı şekilde oturabilirler?

ÇÖZÜM ⇨ 4 çocuk ve anne babadan oluşan 6 kişi yuvarlak masa etrafında,

$$(6-1)! = 5! = 120$$

farklı şekilde oturabilirler.

ÖRNEK 13 ⇨ 4 çocuk ve anne babadan oluşan 6 kişilik bir aile yuvarlak masada yemek yiyecektir. Anne ile babanın yan yana oturmaları şartıyla, bu aile kaç farklı şekilde masa etrafında oturabilir?

ÇÖZÜM ⇨ Anne ile baba yan yana oturacakları için bir kişi gibi düşünülürse ailenin 5 kişiden oluştuğunu varsayabiliriz.

5 kişi yuvarlak bir masa etrafında,

$$(5-1)! = 4! = 24$$

farklı şekilde oturabilir.

Anne ile baba kendi aralarında yan yana oturması şartıyla yer değiştirdikleri düşünülecek olursa,

$$P(2,2) = 2! = 2.1 = 2 \qquad \leftarrow (P(n,n) = n!)$$

farklı şekilde oturabilirler.

O halde, 6 kişilik bir aile, anne ile baba yan yana oturmaları şartıyla yuvarlak bir masa etrafında,

$$4! \cdot 2! = 24 \cdot 2 = 48$$

farklı şekilde oturabilir.

ÖRNEK 14 ⇨ 4 çocuk ve anne babadan oluşan 6 kişilik bir aile yuvarlak masada yemek yiyecektir. Anne ile babanın yan yana <u>oturmamaları</u> şartıyla, kaç farklı şekilde oturabilir?

ÇÖZÜM ⇨ 6 kişinin yuvarlak bir masaya farklı oturuşlarının sayısı,

$$(6-1)! = 5! = 120 \text{ dir.}$$

Bir önceki örnekte anne ile babanın yan yana oturmaları şartıyla 48 farklı şekilde oturabildiklerini hesaplamıştık.

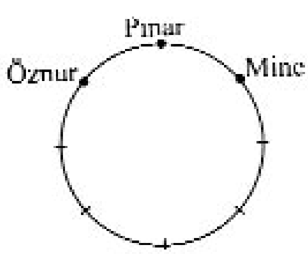
O halde, anne ile baba yan yana oturmayacaklarsa,

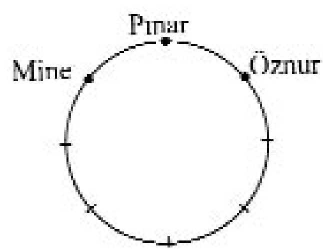
$$120 - 48 = 72$$

farklı şekilde oturabilirler.

ÖRNEK 15 ⇨ 8 kişilik bir öğrenci grubu bir yuvarlak masa etrafında oturacaktır. Bu gruptan Pınar'ın daima Öznur ve Mine isimli öğrencilerin arasında oturması şartıyla 8 öğrenci kaç farklı şekilde yuvarlak masa etrafında oturur?

ÇÖZÜM ⇨ Pınar, Öznur ve Mine'yi bir kişi olarak düşünürsek 6 kişi yuvarlak bir masa etrafında $(6-1)! = 5!$ şekilde sıralanır.





Şekilde görüldüğü gibi Pınarın sağında Öznur, solunda Mine oturduğu zaman **5!** şekilde masa etrafında oturulabilirler.

Eğer Mine ve Öznur yer değiştirirse de **5!** farklı şekilde masa etrafında oturabilir.

O halde, toplam

$$2 \cdot 5! = 2 \cdot 120 = 240$$

farklı şekilde oturabilirler.

Dönel sıralamada *yön belli değilse* n eleman,

$$\frac{(n-1)!}{2}, \quad (n > 2)$$

kadar farklı sıralanır.

ÖRNEK 16 ⇨ 4 anahtar bir halka şeklindeki anahtarlığa kaç farklı şekilde takılabilir?

ÇÖZÜM ⇨ Masa etrafına oturma durumunda sıralama yukarıdan bakılarak yapılırken, halkaya yukarıdan bakılacağı gibi, ters çevrilerek de bakılabilir. Bu da sıralanış sayısını yarıya düşürmektedir.

Buna göre, 4 farklı anahtar bir halkaya,

$$\frac{(4-1)!}{2} = \frac{3!}{2} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2} = 3 \qquad \leftarrow\left(\frac{(n-1)!}{2}, (n > 2)\right)$$

farklı şekilde takılabilir.

ÖRNEK 17 ⇨ Bir kişi 15 boncuktan oluşan bir bilezik yapmak istiyor. Boncuklar kaç farklı şekilde dizilebilir?

ÇÖZÜM ⇨ n=15 ise n>2 dir.

Buna göre 15 boncuk,

$$\frac{(15-1)!}{2} = \frac{14!}{2} = \frac{14 \cdot 13!}{2} = 7 \cdot 13! \qquad \leftarrow\left(\frac{(n-1)!}{2}, (n > 2)\right)$$

farklı şekilde dizilebilir.

ARAŞTIRMALAR

1) n nin r li permütasyonu ile ilgili özgün soru yazınız ve çözünüz.

2) Tekrarlı permütasyon ile ilgili özgün soru yazınız ve çözünüz.

3) Yönü belli dönel permütasyon ile ilgili özgün soru yazınız ve çözünüz.

BÖLÜMÜN ÖZETİ

Bir küme elemanlarının belirli bir sıraya göre dizilişlerinin her birine bir **permütasyon** denir.

r, $n \in N^+$ ve $r \leq n$ olması koşulu ile , n elemanlı bir A kümesinin birbirinden farklı elemanlı her sıralı r lisine, A kümesinin ***r* li permütasyonu** denir.

n eleman, n yere $n!$ biçimde sıralanabilir. $n!$ ifadesine, n elemanın n li sıralaması veya n nin ***n* li permütasyonu** denir.

n tane elemanı olan bir kümenin n li permütasyonlarının sayısı, $P(n,n) = n!$ dir.

n tane nesnenin; n_1 tanesi 1. çeşitten, n_2 tanesi 2. çeşitten, n_3 tanesi 3. çeşitten, …, n_r tanesi r. çeşitten olsun.

$$n = n_1 + n_2 + ... + n_r$$

olmak üzere bu n tane nesnenin n li permütasyonlarının (farklı sıralamalarının) sayısı :

$$\binom{n}{n_1, n_2, ..., n_r} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_r!} \text{ dir.}$$

Birbirinden farklı n tane elemanın, bir çember etrafındaki sıralanışlarının herbirine n tane elemanın **dönel permütasyonu** (dönel sıralaması veya dairesel permütasyonu) denir. n tane elemandan birinin yeri sabit gibi düşünülüp diğerlerinin bu elemana göre sıralanışı göz önüne alınırsa, n tane elemanın dönel permütasyonlarının sayısı $(n-1)!$ olur.

Dönel sıralamada yön belli değilse n eleman, $\frac{(n-1)!}{2}, (n > 2)$ kadar farklı sıralanır.

DEĞERLENDİRME SORULARI

1) Bir haftasonu Savaş, Özgür, Gülçin, Barış, Mine ve Gülseren sinemaya gitmek istiyorlar. Yan yana bilet almayı planlıyorlar. Yalnız, Savaş ve Barış yan yana oturmak istememektedir. Bu şartlar göz önüne alındığında, bu arkadaş grubu kaç farklı şekilde oturabilir?

A) 120 B) 240 C) 480 D) 718 E) 720

2) 3, 5, 5, 8, 9 rakamlarıyla beş basamaklı sayı yazılırken bu sayıların ne kadarı 5 ile başlayıp 9 ile bitebilir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

3) Mehmet ve 5 arkadaşı bir pastaneye gittiklerinde yuvarlak masa etrafında kaç farklı şekilde oturabilirler?

A) 4 B) 5 C) 99 D) 120 E) 720

4) Çiğdem,19 boncuktan oluşan bir küçük kolye yapmak istemektedir. Bu boncuklar kaç farklı şekilde dizilebilir?

A) 19 B) 18! C) $9 \cdot 17!$ D) 19! E) 20!

◆ *KOMBİNASYON*

"8 matematik ve 4 fen öğretmeni arasından 5 kişilik bir komisyon kurulacaktır. Bu komisyonda 3 matematik ve 2 fen öğretmeninin bulunması gerekmektedir. Bu şartları sağlayan komisyon kaç farklı şekilde oluşturulabilir?"

sorusunu bu bölümde öğreneceğiniz "kombinasyon" ile çözebilirsiniz. Bu bölümde kombinasyon örneklerle açıklanacaktır.

n Elemanlı r li Kombinasyon

$r, n \in N^+$ ve $r \le n$ olmak üzere, n elemanlı bir A kümesinin r elemanlı alt kümelerinin her birine A kümesinin ***r* li kombinasyonu** denir.

Teorem: n elemanlı kümenin r li kombinasyonlarının sayısı:

$$C(n, r) = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!} \text{ dir.}$$

n elemanlı kümenin r li kombinasyonlarının sayısı;

$$C(n,r), \binom{n}{r} \text{ ve } C_n^r$$

sembolleriyle gösterilir.

ÖRNEK 1 ⇨ n elemanlı r li permütasyon sayısı ile r li kombinasyon sayısı arasındaki ilişkiyi gösterelim:

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!} \text{ ise,}$$

$$C(n,r) = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!} = \frac{n!}{(n-r)!} \cdot \frac{1}{r!} = P(n, r) \cdot \frac{1}{r!} = \frac{P(n,r)}{r!}$$

ÖRNEK 2 ⇨ $B = \{a, b, c\}$ kümesinin 3 lü permütasyonlarının ve kombinasyonlarının sayılarını bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ *B kümesinin 3 lü permütasyonlarının sayısını iki farklı yolla bulabiliriz:*

I.Yol:
B kümesinin 3 lü permütasyonlarının sayısı,

$$\{a,b,c\}\quad \{a,c,b\}\quad \{b,a,c\}\quad \{b,c,a\}\quad \{c,a,b\}\quad \{c,b,a\}$$

olmak üzere 6 dır.

II.Yol:
B kümesinin 3 lü permütasyonlarının sayısı,

$$P(3,3) = 3! = 3\cdot 2\cdot 1 = 6 \text{ dır.}$$

B kümesinin 3 lü kombinasyonlarının sayısını iki farklı yolla bulabiliriz:

I.Yol:
B kümesinin 3 lü kombinasyonlarının sayısı,

$$\{a,b,c\}$$

olmak üzere 1 dir.

II.Yol:
B kümesinin 3 lü kombinasyonlarının sayısı,

$$C(3,3) = \frac{P(3,3)}{3!} = \frac{3!}{3!} = 1 \text{ dir.} \qquad \leftarrow \left(C(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!} \right)$$

n elemanlı bir kümenin r li permütasyonlarının ve kombinasyonlarının sayılarını karşılaştırınız.

ÖRNEK 3 ⇨ 30 kişilik bir sınıftan 19 Mayıs hazırlıkları için 2 temsilci kaç farklı şekilde seçilebilir?

ÇÖZÜM ⇨ $n = 30$, $r = 2$ ve $C(n,r) = \dfrac{n!}{(n-r)!\cdot r!}$ olduğuna göre,

$$C(30,2) = \frac{30!}{(30-2)!\cdot 2!} = \frac{30!}{28!\cdot 2} = \frac{30\cdot 29\cdot 28!}{28!\cdot 2} = 15\cdot 29 = 435$$

farklı şekilde 2 kişi temsilci olarak seçilebilir.

ÖRNEK 4 ⇨ 8 matematik ve 4 fen öğretmeni arasından 5 kişilik bir komisyon kurulacaktır. Bu komisyonda, 3 matematik ve 2 fen öğretmeninin bulunması gerekmektedir. Bu şartları sağlayan komisyon kaç farklı şekilde oluşturulabilir?

ÇÖZÜM ⇨ Yukarıdaki soruyu çözebilmek için kombinasyondan yararlanacağız:

$$C(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!\cdot r!}$$

8 matematik öğretmeni arasından 3 matematik öğretmeni,

$$C(8,3)=\frac{8!}{(8-3)!\cdot 3!}=\frac{8!}{5!\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5!}{5!\cdot 6}=56$$

farklı şekilde seçilebilir.

4 fen öğretmeni arasından 2 fen öğretmeni,

$$C(4,2)=\frac{4!}{(4-2)!\cdot 2!}=\frac{4\cdot 3\cdot 2!}{2!\cdot 2}=6$$

farklı şekilde seçilebilir.

Çarpma kuralına göre 3 matematik ve 2 fen öğretmeninden oluşan komisyon,

$$C(8,3)\cdot C(4,2)=56\cdot 6=336$$

farklı şekilde oluşturulabilir.

ÖRNEK 5 Kızılay Kolu için 12 öğrenci arasından bir yönetim kurulu belirlenecektir. Bu kurula ilk önce 1 başkan, daha sonra 1 başkan yardımcısı ve son olarak 4 üye seçilecektir. Bu komisyon kaç farklı şekilde oluşturulabilir?

ÇÖZÜM Yukarıdaki soruyu çözebilmek için kombinasyondan yararlanacağız:

$$C(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!\cdot r!}$$

12 kişi arasından 1 başkan,

$$C(12,1)=\frac{12!}{(12-1)!\cdot 1!}=\frac{12!}{11!\cdot 1}=\frac{12\cdot 11!}{11!}=12 \quad \text{farklı şekilde seçilir.}$$

Kalan 11 kişi arasından 1 başkan yardımcısı,

$$C(11,1)=\frac{11!}{(11-1)!\cdot 1!}=\frac{11!}{10!\cdot 1}=\frac{11.10!}{10!}=11 \text{ farklı şekilde seçilir.}$$

Geriye kalan 10 kişi arasından 4 üye,

$$C(10,4)=\frac{10!}{(10-4)!\cdot 4!}=\frac{10!}{6!\cdot 4!}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6!}{6!\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=210$$

farklı şekilde seçilir.

Çarpma kuralına göre 12 kişi arasından, 1 başkan, 1 başkan yardımcısı ve 4 üyeden oluşan komisyon,

$$C(12,1)\cdot C(11,1)\cdot C(10,4)=12\cdot 11\cdot 210=27720$$

farklı şekilde oluşturulabilir.

ÖRNEK 6 ⇒ Doğrusal olmayan 8 noktadan, kaç tane üçgen oluşturulabilir?

ÇÖZÜM ⇒ Doğrusal olmayan üç noktanın doğru parçaları ile birleştirilmesi ile üçgen oluşturulur. Buna göre, üçgen oluşturmak için 8 noktanın 3 lü seçimleri yapılacaktır.

O halde, 8 noktadan,

$$C(8,3)=\frac{8!}{(8-3)!\cdot 3!} \qquad \leftarrow \left(C(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!\cdot r!} \right)$$

$$=\frac{8!}{5!\cdot 6}=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5!}{5!\cdot 6}=56$$

tane üçgen oluşturulur

ÖRNEK 7 ⇒ Belli bir nokta tüm üçgenlerin bir köşesi olacaksa, doğrusal olmayan 8 noktadan, kaç tane üçgen oluşturulabilir?

ÇÖZÜM ⇒ 8 noktadan biri, oluşturulacak üçgenlerin bir köşesi olacağına göre geriye 7 nokta kalır. 7 noktanın 2 li seçimleri yapılacaktır. O halde verilen koşula uygun,

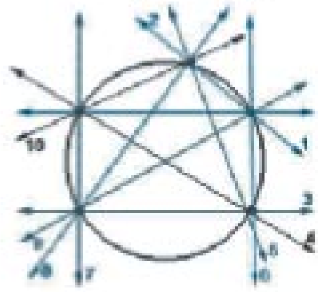
$$C(7,2)=\frac{7!}{(7-2)!\cdot 2!} \qquad \leftarrow \left(C(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!\cdot r!} \right)$$

$$=\frac{7!}{5!\cdot 2}=\frac{7\cdot 6\cdot 5!}{5!\cdot 2}=21$$

tane üçgen oluşturulabilir.

ÖRNEK 8 ⇒ Bir çember üzerindeki 5 noktadan kaç tane doğru geçer?

ÇÖZÜM ⇒ Düzlemde iki farklı noktadan bir doğru geçtiğine göre, 5 noktanın 2 li seçimleri yapılacaktır. O halde 5 noktadan,



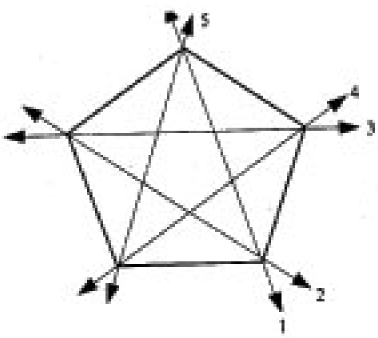
$$C(5,2)=\frac{5!}{(5-2)!\cdot 2!}$$

$$=\frac{5!}{3!\cdot 2}=\frac{5\cdot 4\cdot 3!}{3!\cdot 2}=10 \quad \textit{doğru geçer.}$$

ÖRNEK 9 ➾ Bir düzgün beşgenin kaç tane köşegeni vardır?

ÇÖZÜM ➾ Yukarıdaki soruyu çözebilmek için kombinasyondan yararlanacağız:

$$C(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!\cdot r!}$$



Beşgenin 5 tane köşesi ve 5 kenarı vardır. 5 nokta ile,

$$C(5,2)=\frac{5!}{(5-2)!\cdot 2!}=\frac{5!}{3!\cdot 2}=\frac{5\cdot 4\cdot 3!}{3!\cdot 2}=5\cdot 2=10$$

tane doğru parçası çizilebilir.

Bu çizilen doğru parçalarından 5 i beşgenin kenarı olduğuna göre köşegen sayısı,

$$C(5,2)-5=10-5=5 \text{ tir.}$$

Uyarı: n kenarlı düzgün çokgende köşegen sayısını bulmak için,

$$C(n,2)-n$$

işlemini yapmamız yeterli olacaktır.

ÖRNEK 10 ➾ Bir sepette aynı boyutlarda olan 7 tane yeşil elma ve 4 tane kırmızı elma vardır. Bu sepetteki elmaları kullanarak, tamamı yeşil elma **ya da** tamamı kırmızı elmalardan oluşan 3 lü gruplar kaç farklı şekilde oluşturulabilir?

ÇÖZÜM ➾ Yukarıdaki soruyu çözebilmek için kombinasyondan yararlanacağız:

$$C(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!\cdot r!}$$

Tamamı yeşil elmadan oluşan 3 lü grupların sayısı,

$$C(7,3)=\frac{7!}{(7-3)!\cdot 3!}=\frac{7!}{4!\cdot 6}=\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!}{4!\cdot 6}=35 \text{ tir.}$$

Tamamı kırmızı elmadan oluşan 3 lü grupların sayısı,

$$C(4,3) = \frac{4!}{(4-3)!\cdot 3!} = \frac{4!}{1!\cdot 3!} = \frac{4\cdot 3!}{3!} = 4 \text{ tür.}$$

Toplama kuralına göre, tamamı yeşil **ya da** tamamı kırmızı elemanlardan oluşan 3 lü grupların sayısı,

$$C(7,3) + C(4,3) = 35 + 4 = 39 \text{ dur.}$$

ÖRNEK 11 ⇨ Bir radyo üreticisi, radyolarını satışa çıkarmadan önce her 50 radyodan 5 ini test etmektedir. Test etmek icin beşer radyoluk gruplar kaç farklı şekilde oluşturulabilir?

ÇÖZÜM ⇨ Beşer radyoluk gruplar,

$$C(50,5) = \frac{50!}{(50-5)!\cdot 5!} \qquad \leftarrow \left(C(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!\cdot r!} \right)$$

$$= \frac{50!}{45!\cdot 5!} = \frac{50\cdot 49\cdot 48\cdot 47\cdot 46\cdot 45!}{45!\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 2118760$$

farkı şekilde oluşturabilirler.

ÖRNEK 12 ⇨ Bir şirket 2 tane elektrik mühendisi almak istemektedir. Bu kişiler aynı işi yapacak ve aynı ücreti alacaktır. Bu iş için 30 kişi başvurmuştur. Bu kadrolar kaç farklı şekilde doldurulabilir?

ÇÖZÜM ⇨ İstenen kadrolar,

$$C(30,2) = \frac{30!}{(30-2)!\cdot 2!} \qquad \leftarrow \left(C(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!\cdot r!} \right)$$

$$= \frac{30\cdot 29\cdot 28!}{28!\cdot 2} = \frac{30\cdot 29}{2} = 435$$

farklı şekilde doldurulabilir.

ÖRNEK 13 ⇒ 5 doktor, 6 hemşire ve 8 hastabakıcı arasından, 2 doktor 3 hemşire 5 hastabakıcıdan oluşan sağlık ekibi kaç farklı şekilde oluşturulabilir?

ÇÖZÜM ⇒ Doktor $\to C(5,2) = \dfrac{5\cdot 4\cdot 3!}{(5-2)!\cdot 2!}$ $\leftarrow\left(C(n,r) = \dfrac{n!}{(n-r)!\cdot r!} \right)$

$$= \frac{5!}{3!\cdot 2} = \frac{5\cdot 4\cdot 3!}{3!\cdot 2} = 10 \text{ dur.}$$

Hemşire $\to C(6,3) = \dfrac{6!}{(6-3)!\cdot 3!}$

$$= \frac{6!}{3!\cdot 6} = \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3!}{3!\cdot 6} = 20 \text{ dir.}$$

Hastabakıcı $\to C(8,5) = \dfrac{8!}{(8-5)!\cdot 5!}$

$$= \frac{8!}{3!\cdot 5!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5!}{6\cdot 5!} = 56 \text{ dır.}$$

Çarpma kuralına göre, 2 doktor, 3 hemşire ve 5 hastabakıcıdan oluşan sağlık ekibi, $10\cdot 20\cdot 56 = 11200$ farklı şekilde oluşturulabilir.

ÖRNEK 14 ⇒ 4 matematik ve 2 fizik öğretmeni arasından seçilecek 4 kişilik bir sınav komisyonunda en az 2 matematik öğretmeni olması gerektiğine göre bu komisyon kaç farklı şekilde oluşturulabilir?

ÇÖZÜM ⇒ 4 kişilik komisyonda en az 2 matematik öğretmeni olacaksa bu grup şu şekillerde oluşturulabilir: 2 matematik ve 2 fizik öğretmeni; 3 matematik ve 1 fizik öğretmeni; 4 matematik ve 0 fizik öğretmeni.

2 matematik ve 2 fizik öğretmeninden oluşan grup sayısı:

$$C(4,2)\cdot C(2,2) = \frac{4!}{(4-2)!\cdot 2!}\cdot\frac{2!}{(2-2)!\cdot 2!} = 6 \text{ dır.} \quad \leftarrow\left(C(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!\cdot r!} \right)$$

3 matematik ve 1 fizik öğretmeninden oluşan grup sayısı:

$$C(4,3)\cdot C(2,1) = \frac{4!}{(4-3)!\cdot 3!}\cdot\frac{2!}{(2-1)!\cdot 1!} = 8 \text{ dir.}$$

4 matematik ve 0 fizik öğretmeninden oluşan grup sayısı:

$$C(4,4)\cdot C(2,0) = \frac{4!}{(4-4)!\cdot 4!}\cdot\frac{2!}{(2-0)!\cdot 0!} = 1 \text{ dir.}$$

O halde, 4 kişilik komisyonda en az iki matematik öğretmeni olacağına göre bu komisyon,

$$K = C(4,2)\cdot C(2,2) + C(4,3)\cdot C(2,1) + C(4,4)\cdot C(2,0)$$
$$= 6+8+1=15$$

farklı şekilde oluşturulabilir.

ÖRNEK 15 ⇨ 8 öğrenci arasından 3 kişilik bir ekip seçilecektir. Bu seçilen kişiler içinden de bir başkan seçilecektir. 1 başkan ve 2 üyeden oluşan bu ekip kaç değişik şekilde oluşturulabilir?

ÇÖZÜM ⇨ 8 öğrenci arasından 3 kişilik bir ekip,

$$C(8,3) = \frac{8!}{(8-3)!\cdot 3!} \qquad \leftarrow \left(C(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!\cdot r!} \right)$$
$$= \frac{8!}{5!\cdot 6}$$
$$= \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5!}{5!\cdot 6} = 8\cdot 7 = 56$$ farklı şekilde seçilebilir.

Seçilen 3 kişi arasından 1 başkan,

$$C(3,1) = \frac{3!}{(3-1)!\cdot 1!} \qquad \leftarrow \left(C(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!\cdot r!} \right)$$
$$= \frac{3!}{2!\cdot 1} = \frac{6}{2} = 3$$ farklı şekilde seçilebilir.

Çarpma kuralına göre, 8 kişi arasından 3 kişilik bir ekip ve bu 3 kişi arasından 1 başkan,

$$C(8,3)\cdot C(3,1) = 56\cdot 3$$
$$=168$$ farklı şekilde seçilebilir.

ÖRNEK 16 ⇨ 7 bayan, 5 bay arasından 3 kişilik bir grup oluşturulacaktır.
Bu grup;

(A) Hiç bay bulunmaması şartıyla kaç farklı şekilde oluşturulabilir?

(B) 1 bayan bulunması şartıyla kaç farklı şekilde oluşturulabilir?

ÇÖZÜM ⇨ **(A)** Hiç bay bulunmayan ekip, bayanlar arasından,

$$C(7,3) = \frac{7!}{(7-3)!\cdot 3!} \qquad \leftarrow \left(C(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!\cdot r!} \right)$$
$$= \frac{7!}{4!\cdot 6} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!}{4!\cdot 6} = 7\cdot 5 = 35$$

farklı şekilde oluşturulabilir.

(B) Oluşturulacak ekipte 1 bayan ve 2 bay olacaktır.

1 bayan, 7 bayan arasından,

$$C(7,1)=\frac{7!}{(7-1)!\cdot 1!} \qquad \leftarrow \left(C(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!r!}\right)$$

$$=\frac{7!}{6!\cdot 1}=\frac{7\cdot 6!}{6!}=7 \text{ farklı şekilde seçilebilir.}$$

2 bay, 5 bay arasından,

$$C(5,2)=\frac{5!}{(5-2)!\cdot 2!}$$

$$=\frac{5!}{3!\cdot 2}=\frac{5\cdot 4\cdot 3!}{3!\cdot 2}=5\cdot 2=10 \text{ farklı şekilde seçilebilir.}$$

Çarpma kuralına göre, 1 bayan ve 2 baydan oluşan grup,

$$C(7,1)\cdot C(5,2)=7\cdot 10$$
$$=70 \text{ farklı şekilde seçilebilir.}$$

ALIŞTIRMA 1 ⇨ Aşağıdaki alıştırmaları yapınız.

(A) Bir düzgün onikigenin kaç tane köşegeni olduğunu hesaplayınız.

(B) 10 bay ve 6 bayan arasından 4 kişilik bir grup oluşturulacaktır. Bu grubun tamamı bay ya da tamamı bayan olması şartıyla kaç farklı şekilde oluşturulabileceğini hesaplayınız.

ÖRNEK 17 ⇨ $C(n,r)=\frac{P(n,r)}{r!}$ den yararlanarak 8 in 3 lü kombinasyonunu [C(8,3)] kısa yoldan hesaplayınız.

ÇÖZÜM ⇨ P(8,3) ü kısa yoldan hesaplayalım:

$$P(8,3)=8\cdot 7\cdot 6 \text{ dır.}$$

O halde, elimizdeki verileri kullanarak:

$$C(8,3)=\frac{P(8,3)}{3!}=\frac{8\cdot 7\cdot 6}{6}=8\cdot 7=56 \text{ bulunur.}$$

ALIŞTIRMA 2 ⇨ $C(n,r)=\frac{P(n,r)}{r!}$ den yararlanarak 9 un 5 li kombinasyonunu kısa yoldan hesaplayınız.

ÖRNEK 18 ⇨ C(n,3)=C(n,4) $\Rightarrow$ n=7 olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM ⇨ C(n,3)=C(n,4)

$$\frac{n!}{(n-3)!\cdot 3!}=\frac{n!}{(n-4)!\cdot 4!}\quad ....(*)$$

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)!}{(n-3)!\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot(n-4)!}{(n-4)!\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$$

$$\frac{1}{1}=\frac{n-3}{4}$$ ←(Sadeleştirme)

n-3=4 ← (Orantıda içler dışlar çarpımı)

n=7 dir.

Bulduğumuz *n* değeri olan 7 sayısı, kombinasyon ve permütasyon tanımında yer alan *n* değerinin *r* değerine eşit veya büyük olması şartı nedeniyle istenen *n* değeri olabilir. Bulduğumuz 7 sayısının (*) daki eşitliği sağlayıp sağlamadığını kontrol ettiğimiz zaman, eşitliği sağlamaktadır.

ALIŞTIRMA 3 ⇨ C(n,6)=C(n,8) $\Rightarrow$ n =14 olduğunu gösteriniz.

ÖRNEK 19 ⇨ $8\cdot C(n,2)=2\cdot P(n,4)$ ise *n* nin değerini hesaplayınız.

ÇÖZÜM ⇨ $8\cdot C(n,2)=2\cdot P(n,4)$

$$\frac{8\cdot n!}{(n-2)!\cdot 2!}=\frac{2\cdot n!}{(n-4)!}\quad .....(*)$$ ←($C(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!\cdot r!}$ ve $P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$)

$$\frac{8\cdot n\cdot(n-1)\cdot(n-2)!}{(n-2)!\cdot 2!}=\frac{2\cdot n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot(n-4)!}{(n-4)!}$$

$$8\cdot\frac{1}{2}=2\cdot(n-2)\cdot(n-3)$$ ←(Sadeleştirme)

$$4=2\cdot(n^2-3\cdot n-2\cdot n+6)$$

$$2=n^2-5\cdot n+6$$

$$0=n^2-5\cdot n+6-2$$

$$n^2-5\cdot n+4=0$$

$$(n-4)\cdot(n-1)=0$$ ←(Denklemin köklerini bulmak için çarpanlara ayırma)

n=4 veya n=1 dir.

Bulduğumuz n değerleri 4 ve 1 dir. Kombinasyon ve permütasyon tanımını hatırlayacak olursak n değerinin r değerine eşit veya büyük olması gerekmektedir. Bundan dolayı aranan n değeri sadece 4 tür. n=4 değeri gerçekten aradığımız değerdir çünkü bu değeri (*) da yerine koyduğumuz zaman eşitliği sağlamaktadır. Bulunan n=4 değerini (*) da yerine koyarak sağlamasını yapınız.

ALIŞTIRMA 4 ⇒ $36 \cdot C(n,3) = P(n,5)$ ise, n değeri veya değerleri nedir?

ARAŞTIRMALAR

1) Permütasyon ile kombinasyon arasındaki farkı yazınız.
2) Permütasyonu, kombinasyondan yararlanarak ifade ediniz.
3) Kombinasyonu, permütasyondan yararlanarak ifade ediniz.
4) $C(n, r_1) = C(n, r_2) \Rightarrow n = r_1 + r_2$ olduğunu gösteriniz.
5) Kombinasyon ile ilgili özgün problem yazınız ve çözünüz.

BÖLÜMÜN ÖZETİ

$r, n \in N^+$ ve $r \leq n$ olmak üzere, n elemanlı bir A kümesinin r elemanlı alt kümelerinin her birine A kümesinin r **li kombinasyonu** denir.

n elemanlı kümenin r li kombinasyonlarının sayısı:

$$C(n, r) = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!} \text{ dir.}$$

DEĞERLENDİRME SORULARI

1) Bir öğrencinin 10 soruluk bir sınavda 7 soruyu cevaplaması gerekmektedir. Bu öğrenci kaç farklı şekilde soruları cevaplayabilir?
   A) 16 B)17 C) 60 D) 70 E) 120

2) 5 doktor, 7 hemşire arasından 2 si doktor ve 5 i hemşire olma şartıyla bir ekip oluşturulacaktır. Bu ekip kaç farklı şekilde oluşturulabilir?
   A) 10 B) 35 C) 120 D) 210 E) 350

3) $n \cdot C(2,1) = 2 \cdot C(4,2)$ ise n nin değeri kaçtır?
   A) 2 B) 4 C) 6 D) 12 E) 24

4) Bir düzgün altıgenin kaç tane köşegeni vardır?
   A) 6 B) 9 C) 15 D) 24 E) 30

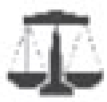
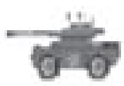
BÖLÜM 1-4 OLASILIK

- ***OLASILIK İLE İLGİLİ TEMEL KAVRAMLAR***
- ***OLASILIK FONKSİYONU***
- ***KESİN OLAY VE İMKANSIZ OLAY***
- ***AYRIK OLAYIN VE AYRIK OLMAYAN OLAYIN ANLAMI***
- ***BAĞIMSIZ OLAYIN VE BAĞIMLI OLAYIN ANLAMI***
- ***AYRIK OLAYIN VE AYRIK OLMAYAN OLAYIN OLMA OLASILIĞI***
- ***KOŞULLU OLASILIK***
- ***BAĞIMSIZ OLAYIN VE BAĞIMLI OLAYIN OLMA OLASILIĞI***
- ***TÜMLEYEN OLAYIN OLMA OLASILIĞI***

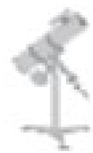
GİRİŞ

Olasılık, temel bilimler, sosyal bilimler, ekonomi, istatistik gibi alanlarda ve çeşitli mesleklerde, şans oyunlarında bir biçimde kullanılmaktadır. Bunlara ek olarak, günlük yaşamımızda farkında olarak veya olmadan olasılığı kullanmaktayız.

Yukarıda belirttiğimiz konuların bazıları için örnekler verelim:

- Genetik
- Tıp
- Kuantum Fiziği
- Astronomi
- Meteoroloji
- Askeriye
- Hukuk
- Ekonomi



Günlük yaşamımızda şu tür konuşmalarla karşılaşabiliriz:


- "Galatasaray ve Fenerbahçe arasında yapılacak maçı Fenerbahçe'nin kazanma olasılığı yüzde ellidir."
- "Yarın yüzde doksan yağmur yağacak."
- "Matematik dersinden geçme olasılığım yüzde seksendir."
- "Hastanın tamamen iyileşme olasılığı oldukça yüksektir."
- "Sayısal Loto'dan büyük ikramiye kazanma şansımız çok düşüktür."

ALIŞTIRMA 1 ➨ Gerçek yaşamdan olasılıkla ilgili 5 tane örnek yazınız.

◆ *OLASILIK İLE İLGİLİ TEMEL KAVRAMLAR*

Bu bölümde olasılık ile ilgili temel kavramları inceleyeceğiz.

Deney

*A*raştırmacının gözlem yapmasına veya sonuçlar elde etmesine yarayan işleme **deney** denir.

Ö*RNEK* 1 ➾ Deney için örnek olarak şunları verebiliriz

- Bir anketin uygulanması
- Bir madenî paranın havaya atılması
- *K*andaki alyuvarların hesaplanması

Çıktı

Bir deneyin veya olayın sonucuna **çıktı** denir.

Ö*RNEK* 2 ➾ "Bir madenî parayı havaya atarak" bir deney yapalım. Bu deney sonucunda para ya "yazı" ya da "tura" gelebilir. ***O*** halde, bu deneyin çıktıları yazı ve turadır.

***R*astgele *S*eçme**

Bir deneyde rastgele bir seçim yapıldığı zaman her bir eleman seçilmek için aynı şansa sahiptir.

Ö*RNEK* 3 ➾ Bir matematik sınavı 5 seçenekli çoktan seçmeli sorulardan oluşmaktadır. *A*hmet, bu sınavdaki son soruyu yetiştiremediği için rastgele bir seçeneği işaretlemiştir.

Ö*RNEK* 4 ➾ Bir torbada aynı büyüklüğe ve yapıya sahip 4 top, torbaya bakılmadan rastgele seçilmiştir.

Örneklem Uzay

Bir deneyde mümkün olan tüm çıktıların kümesine *örneklem uzay* denir ve Ö harfi ile gösterilir.

Örneklem Nokta

Örneklem uzayın her bir elemanına *örneklem nokta* denir.

ÖRNEK 5 ⇨ Bir tavla zarının atılması deneyinde örneklem uzay:

Ö={1, 2, 3, 4, 5, 6} dır.

Örneklem uzayın çıktılarının sayısı,

s(Ö)=6 dır.

Başka bir deyişle, bu örnekte örneklem uzay 6 tane örneklem noktadan oluşmaktadır.

ÖRNEK 6 ⇨ Farklı iki tane hilesiz madenî para atılması deneyinde, örneklem uzayı

Ö={(Yazı, Yazı), (Yazı, Tura), (Tura, Yazı), (Tura, Tura)}
veya
Ö={(Y,Y), (Y,T), (T,Y), (T,T) } ← (Y:Yazı, T:Tura)

Örneklem uzay, s(Ö) = 4 örneklem noktadan oluşmaktadır.

ÖRNEK 7 ⇨ 10 kişi ile yapılan görüşme sonucunda 3 kişinin matematik, 2 kişinin kimya ve 5 kişinin resim dersini sevdiği öğrenilmiştir.

Bu deneyin örneklem uzayı,

Ö={görüşmeye katılan öğrenciler}
veya
Ö={ $m_1, m_2, m_3, k_1, k_2, r_1, r_2, r_3, r_4, r_5$ } dir.

Uyarı:
(i) Örneklem uzay, mümkün olan tüm çıktılardan oluşur ve bu çıktılar daha küçük parçalara bölünemez.
(ii) Olasılık kavramında kümeler kavramından yararlanılmasına karşın olasılık kavramında kullandığımız olaylar veya örneklem uzayında çıktılar birden fazla yazılabilir. Bildiğiniz gibi kümelerde aynı cinsten eleman bir kez yazılır.

ÖRNEK 8 ⇨ "ANKARA" sözcüğü ile ilgili evrensel kümeyi ve bir örneklem uzayını yazalım:

Evrensel Küme → E={A, N, K, R}

Örneklem Uzay → Ö={A_1, N, K, A_2, R, A_3}

Yukarıda görüldüğü gibi, evrensel kümede aynı cinsten eleman bir kez yazılırken örneklem uzayda aynı cinsten eleman kaç tane ise o kadar yazılmaktadır. Görsel olarak ifadeyi kolaylaştırmak için her bir A, A_1, A_2 ve A_3 olarak yazılmıştır.

ÖRNEK 9 ⇨ Bir hilesiz madenî para 2 kez atılıyor. Bu deneyin örneklem uzayını yazınız.

ÇÖZÜM ⇨ Dört farklı şekilde örneklem uzayını yazabiliriz.

I.Yol:

Listeleme Yöntemi:

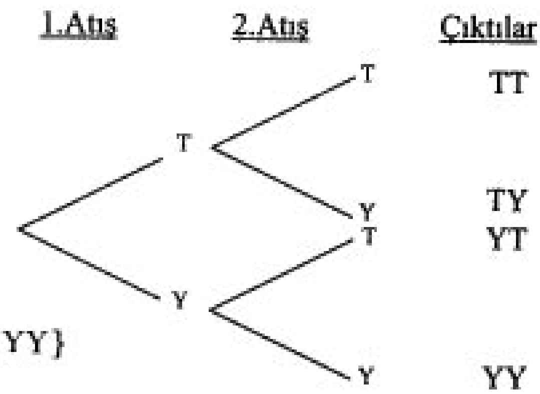
Ö ={TT, TY, YT, YY}

II. Yol:

Ö ={bir hilesiz madenî paranın iki kez atılması sonucu elde edilen veriler}

III. Yol:

Ağaç şeması yöntemi:



Ö ={TT, TY, YT, YY}

IV. Yol :

Tablo oluşturma yöntemi:

		II. Atış	
		T	**Y**
I. Atış	**T**	(T,T)	(T,Y)
	Y	(Y,T)	(Y,Y)

Ö ={(T,T), (T,Y), (Y,T), (T,T)}

Olay

Bir deneyin sonuçlarından veya çıktılarından oluşan herhangi bir topluluğa olay denir. Başka bir deyişle, örneklem uzayın her bir alt kümesine olay denir.

ÖRNEK 10 ⇨ "Farklı 2 tane hilesiz madenî paranın atılması sonucunda, paraların en az bir tanesinin yazı gelme olasılığı nedir?" sorusunu göz önüne alarak bu sorunun deneyini, örneklem uzayını, örneklem uzayın eleman sayısını, istenen olayı ve istenen olayın olma sayısını belirleyiniz.

ÇÖZÜM ⇨ Deney → Farklı iki tane hilesiz madenî paranın atılması.

Örneklem Uzay → Ö ={(Y,Y), (T,Y), (Y,T), (T,T)}, s(Ö)=4

İstenen Olay → Bu olayı üç farklı şekilde gösterebiliriz.

A = {farklı iki tane hilesiz madenî paradan en az birinin yazı gelmesi}
= {(T,Y), (Y ,T), (Y, Y)}

Görüldüğü gibi A olayı, örneklem uzayının bir alt kümesidir.

$$A \subset \ddot{O} \text{ dür.}$$

A olayının çıktıları (T, Y), (Y, T) ve (Y, Y) olmak üzere , s(A)=3 tanedir. Bu aynı zamanda A olayının olma sayısıdır.

ÖRNEK 11 ⇨ "Alfabemizde bulunan her bir harf aynı özelliklere sahip kartların üzerine ayrı ayrı yazılarak torbaya konulmuştur. Torbadan bir kart rastgele çekildiğinde kartta sesli harfin yazılı olma olasılığı nedir?" sorusunu göz önüne alarak, bu sorudaki deneyi, örneklem uzayı, örneklem uzayın eleman sayısını, örneklem noktalarını, olayı, olayın çıktılarını ve olayın eleman sayısını yazınız.

ÇÖZÜM ⇨ Deney → Kartların üzerine yazılmış olan alfabemizdeki harflerin seçilmesi.

Örneklem Uzayı→ Ö={ alfabemizdeki tüm harfler }, s(Ö)=29
Ö={a, b, c, ç, d, e, f, g, ğ, h, ı, i, j, k, l, m, n, o, ö, p, r, s, ş, t, u, ü,v,y, z}

Örneklem Noktaları → a, b, c, ç, d, e, f, g, ğ, h, ı, i, j, k, l, m, n, o, ö, p, r, s, ş, t, u, ü, v, y, z
Olay → A ={ bir sesli harfin çekilmesi }={ a, e, ı, i, o, ö, u, ü }, s(A)=8
Olayın Çıktıları → a, e, ı, i, o, ö, u, ü

ALIŞTIRMA 2 ➾ Aşağıdaki alıştırmaları yapınız:

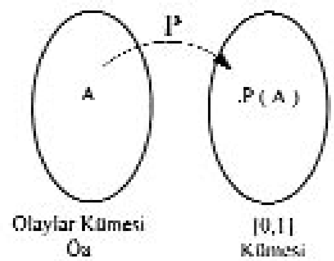
(A) "Alfabemizde bulunan her bir harf aynı özelliklere sahip kartların üzerine ayrı ayrı yazılarak torbaya konulmuştur. Torbadan bir kart rastgele çekildiğinde kartta sessiz harfin yazılı olma olasılığı nedir?" sorusunu göz önüne alarak, bu sorudaki deneyi, örneklem uzayı, örneklem uzayın eleman sayısını, örneklem noktalarını, olayı, olayın çıktılarını ve olayın eleman sayısını yazınız.

(B) Olasılık ile ilgili bir soru yazarak, bu sorudaki deneyi, örneklem uzayı, örneklem uzayın eleman sayısını, örneklem noktalarını, olayı, olayın çıktılarını ve olayın eleman sayısını yazınız.

◆ OLASILIK FONKSİYONU

Bu bölümde, olasılık fonksiyonu tanımlandıktan sonra bu fonksiyonun temel özelikleri hakkında bilgi verilecektir.

Bir $\ddot{O}$ örneklem uzayının tüm alt kümelerinin oluşturduğu küme $\ddot{O}_a$ olsun.



P: $\ddot{O}_a \rightarrow [0,1]$ şeklinde tanımlanan ve aşağıdaki aksiyomları sağlayan P fonksiyonuna $\ddot{O}_a$ üzerinde bir **olasılık fonksiyonu** denir. $A \subset \ddot{O}$ yani $A \in \ddot{O}_a$ ise $P(A)$ değerine (görüntüsüne) A olayının olasılığı denir.

Olasılık Aksiyomları

Olasılık aksiyomları şunlardır:

1) $\forall A \in \ddot{O}_a$ için $0 \leq \mathrm{P}(\mathbf{A}) \leq 1$ dir.
2) $P(\ddot{O}) = 1$ dir.
3) $A, B \in \ddot{O}_a$ ve $A \cap B = \varnothing \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Olasılık Fonksiyonunun Temel Özelikleri

Olasılık fonksiyonunun temel özelikleri, aşağıdaki teoremde ifade edilmiştir.

Teorem: $\ddot{O}$ örneklem uzay, A ve B iki olay $(A \subset \ddot{O}, B \subset \ddot{O})$, A olayının $\ddot{O}$ örneklem uzayındaki tümleyeni A' olsun. P olasılık fonksiyonu ise,

1) $P(\varnothing) = 0$
2) $A \subset B \Rightarrow \mathrm{P}(A) \leq \mathrm{P}(B)$
3) $\mathrm{P}(A') = 1 - \mathrm{P}(A)$
4) $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$

İspat:

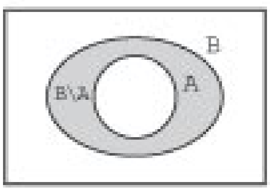
1) $A \cup \varnothing = A$ ve $A \cap \varnothing = \varnothing$ olduğundan,

$$A \cup \varnothing = \mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \varnothing) = P(A)$$
$$\Rightarrow P(A) + P(\varnothing) = P(A) \qquad \leftarrow \text{(3. aksiyom)}$$
$$\Rightarrow P(\varnothing) = 0 \text{ dır.}$$

2) $A \subset B \Rightarrow B = A \cup (B \setminus A)$ ve $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$ dır.

Buna göre,

$$A \cup (B \setminus A) = B \Rightarrow \mathrm{P}\left[A \cup (B \setminus \mathrm{A})\right] = \mathrm{P}(B)$$
$$\Rightarrow \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B \setminus A) = \mathrm{P}(B) \text{ dir} \qquad \leftarrow \text{(3. aksiyom)}$$

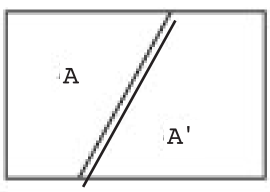


Birinci aksiyomu incelediğimizde, $0 \leq P(B \setminus A) \leq 1$ dir.

O halde,

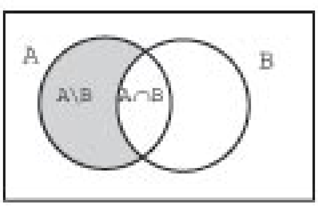
$$P(A) \leq P(B) \text{ olur.}$$

3) $A \cup A' = \ddot{O}$ ve $A \cap A' = \varnothing$ dır.



$$A \cup A' = \ddot{O} \Rightarrow \mathrm{P}(A \cup A') = \mathrm{P}(\ddot{O})$$
$$\Rightarrow \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(A') = 1 \qquad \leftarrow \text{(2. ve 3. aksiyom)}$$
$$\Rightarrow \mathrm{P}(A') = 1 - \mathrm{P}(A) \quad \text{ve} \quad \mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(A')$$

4) $A \cup B = (A \setminus \mathrm{B}) \cup \mathrm{B}$ ve $(\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}) \cap \mathrm{B} = \varnothing$ dir.



Buna göre,

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup B \Rightarrow \mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}\left[(A \setminus B) \cup B\right]$$
$$\Rightarrow \mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A \setminus B) + \mathrm{P}(B) \text{ dir.} \quad \ldots.(*)$$

$(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A$ ve $(A \setminus B) \cap (A \cap B) = \varnothing$ dir.

Buna göre,

$$(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A \Rightarrow \mathrm{P}\left[(A \setminus B) \cup (A \cap B)\right] = \mathrm{P}(A)$$
$$\Rightarrow \mathrm{P}(A \setminus B) + \mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)$$
$$\Rightarrow \mathrm{P}(A \setminus B) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A \cap B) \text{ dir.} \quad \ldots.(**)$$

(*) ve (**) larda elde ettiğimiz verileri kullanarak ispatımıza devam edelim:

$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$ eşitliğindeki, $P(A \setminus B)$ değerini,

$P(A \cup B) = P(A \setminus B) + P(B)$ de yerine koyalım:

$P(A \cup B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ dir.

Uyarı: Sonlu bir $\ddot{O} = \{\ddot{o}_1, \ddot{o}_2, ..., \ddot{o}_n\}$ örneklem uzayı ve P olasılık fonksiyonu olmak üzere $P(\ddot{o}_1) + P(\ddot{o}_2) + ... + P(\ddot{o}_n) = 1$ dir.

ÖRNEK 12 ⇨ Sezen, Can ve Ayla arasında bir matematik yarışması yapılacaktır. Bu yarışmayı Ayla'nın kazanma olasılığı Sezen'in kazanma olasılığının 4 katı, Can'ın kazanma olasılığı Sezen'in kazanma olasılığının 3 katıdır. Bu yarışmayı Can'ın kazanma olasılığı nedir? (Not: Yarışmayı sadece bir kişi kazanacaktır.)

ÇÖZÜM ⇨ S: Sezen'in yarışmayı kazanması, $P(S) = S$
A: Ayla'nın yarışmayı kazanması, $P(A) = 4 \cdot S$
C: Can'ın yarışmayı kazanması, $P(C) = 3 \cdot S$
Matematik yarışmasını Sezen, Ayla ve Can'dan biri kazanacaktır.

$P(S) + P(A) + P(C) = 1$ olduğundan,

$$S + 4 \cdot S + 3 \cdot S = 1$$
$$8 \cdot S = 1$$
$$S = \frac{1}{8} \text{ dir.}$$

←(Sezen'in kazanma olasılığı)

Can'ın yarışmayı kazanma olasılığı,

$$P(C) = 3 \cdot S \text{ olduğundan,}$$
$$= 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{8} \text{ dir.}$$

ALIŞTIRMA 3⇨ Melek, Onur ve Sibel bir yarışmaya katılmıştır. Bu yarışmayı Sibel'in kazanma olasılığı Onur'un kazanma olasılığının 2 katı, Meleğin kazanma olasılığının 3,5 katıdır. Bu yarışmayı Onur'un kazanma olasılığı nedir? (Not: Yarışmayı sadece bir kişi kazanacaktır.)

Eş Olumlu (Olasılı) Örneklem Uzay

Eş Olumlu (Olasılı) Örneklem Uzay

Sonlu bir $\ddot{O}=\{\ddot{o}_1,\ddot{o}_2,....,\ddot{o}_n\}$ örneklem uzay ve P olasılık fonksiyonu olmak üzere,

$$P(\ddot{o}_1)=P(\ddot{o}_2)=....=P(\ddot{o}_n) \text{ ise,}$$

$\ddot{O}$ örneklem uzayına **eş olumlu (olasılı) örneklem uzay** denir.

$\ddot{O}$ eş olumlu örneklem uzay ve $s(\ddot{O})$ = n ise $\ddot{o}_i \in \ddot{O}$, $\ddot{o}_i$ örneklem noktasının olma olasılığı $P(\ddot{o}_i)=\dfrac{1}{n}$ dir.

ÖRNEK 13 ⇒ Hilesiz 25 bin *TL* havaya hilesiz olarak atılırsa örneklem uzay eş olumlu mudur? $\ddot{O}$ örneklem uzayın örneklem noktalarının olma olasılıkları nedir?

ÇÖZÜM ⇒ Hilesiz 25 bin TL havaya hilesiz olarak atma deneyinde, $E=\{Y,T\}$ nin her bir elemanının olma olasılığı birbirine eşit olacağından $\ddot{O}$ örneklem uzayı eş olumludur. O halde,

$$P(Y)=P(T)=\frac{1}{2} \text{ dir}$$

Not: Eğer para hileli ise veya hileli olarak atılıyorsa örneklem uzayın her bir elemanının (örneklem noktasının) olma olasılığı birbirine eşit olamayacağı için bu örneklem uzaya "eş olumlu örneklem uzay" denilemez.

Teorem: $\ddot{O}$ bir eş olumlu örneklem uzay ve $A\subset\ddot{O}$ olmak üzere, A olayının olma olasılığı:

$$\text{“A” olayının olma olasılığı} = \frac{\text{“A” kümesinin eleman sayısı}}{\text{“Ö” kümesinin eleman sayısı}}$$

$$P(A)=\frac{s\,(A)}{s\,(\ddot{O})} \quad \text{dür.}$$

Başka bir deyişle,

$$\text{“A” olayının olma olasılığı} = \frac{\text{“A” olayının çıktı sayısı}}{\text{Deneyin mümkün olan tüm çıktılarının sayısı}}$$

veya

$$\text{İstenen olayın olma olasılığı} = \frac{\text{İstenen olayın çıktı sayısı}}{\text{deneyin mümkün olan tüm çıktılarının sayısı}}$$

veya

$$\text{İstenen durumun olma olasılığı} = \frac{\text{İstenen durum sayısı}}{\text{mümkün olan tüm durumların sayısı}}$$

İspat:

$\ddot{O} = \{\ddot{o}_1, \ddot{o}_2, ..., \ddot{o}_n\}$ eş olumlu örneklem uzay ve $A = \{\ddot{o}_1, \ddot{o}_2, ..., \ddot{o}_r\}$ olayı için s(Ö)= n ve s(A)= r dir.

$$\forall \ddot{o}_i \in \ddot{O} \ \ \text{için}, \ \ P(\ddot{o}_i) = \frac{1}{n} \ \text{dir.}$$

Buna göre, A olayının olma olasılığı,

$$\begin{aligned}
P(A) &= P(\ddot{o}_1) + P(\ddot{o}_2) + ... + P(\ddot{o}_r) \\
&= \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + ... + \frac{1}{n}}_{r \text{ tane}} \\
&= \frac{\overbrace{1+1+....+1}^{\text{r tane}}}{n} \\
&= \frac{r}{n} \\
&= \frac{s(A)}{s(\ddot{O})} \quad \text{olur.}
\end{aligned}$$

ÖRNEK 14 ⇨ Bir torbada renkler dışında bütün özellikleri aynı olan 2 kırmızı, 4 mavi ve 2 yeşil kalem vardır. Torbadan, içine bakmadan bir kalem çekildiği zaman bunun mavi olma olasılığı nedir?

ÇÖZÜM ⇨ Deney→ 2 kırmızı, 4 mavi ve 2 yeşil kalemin olduğu torbadan bir kalem çekilmesi.

Kırmızı, mavi ve yeşil kalemler sırasıyla k, m, ve y harfleriyle gösterilsin.

Örneklem Uzay → Ö={ $k_1, k_2, m_1, m_2, m_3, m_4, y_1, y_2$ }, s(Ö) = 8 dir.

Kalemlerin renkleri dışında bütün özellikleri aynı olduğu ve bakılmadan torbadan çekildiği için $Ö$ eş olumlu örneklem uzayıdır.

$$P(k_1) = P(k_2) = P(m_1) = P(m_2) = P(m_3) = P(m_4) = P(y_1) = P(y_2)$$

Olay→ M= {mavi kalem çekilmesi}={ m_1, m_2, m_3, m_4 }, s(A) = 4

$$\text{“M” olayının olma olasılığı} = \frac{\text{“M” kümesinin eleman sayısı}}{\text{“Ö” kümesinin eleman sayısı}}$$

veya

$$\text{Mavi kalem çekme olasılığı} = \frac{\text{mavi kalem sayısı}}{\text{torbadaki tüm kalemlerin sayısı}}$$

$$P(M) = \frac{s(M)}{s(Ö)}$$

$$= \frac{4}{8} \quad \leftarrow \text{(Pay ve paydayı 2 ile bölme)}$$

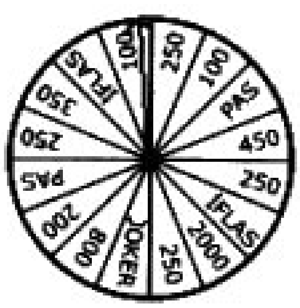
$$= \frac{1}{2} \text{ dir.}$$

Olasılık değeri kesir, ondalık kesir ve yüzde olarak gösterilebilir. Yukarıdaki örnekte torbadan mavi kalem çekme olasılığı $\frac{1}{2}$, 0,50 veya %50 dir.

$$\frac{1}{2} = 0{,}50 = \%50$$

ÖRNEK 15 ⇒ Matematik öğretmeni olan Filiz, olasılık kavramını öğretebilmek için aşağıda şekli verilmiş olan bir çark yapmıştır. Filiz, öğrencisi Eliften çarkın üzerindeki oku çevirmesini istemiştir. Okun 250 puan üzerinde durma olasılığının kaç olduğunu hesaplayınız.

ÇÖZÜM ⇒ Çark toplam 16 eş dilime ayrılmıştır. Çarkın 16 diliminin 4 ünde “250 puan” yazılıdır.



Deney → 16 eş dilime ayrılmış çarkın çevrilmesi.

Örneklem Uzay → Ö={16 dilim üzerindeki puanlar}, s(Ö) = 16

Olay → Ç= {okun “250 Puan” üzerinde durması}, s(Ç) = 4

Çarkın oku çevrildiğinde "250 puan" gelme olasılığını hesaplarken olasılığın tanımından yararlanalım:

$$\text{İstenen olayın olma olasılığı} = \frac{\text{istenen olayın çıktı sayısı}}{\text{deneyin mümkün olan tüm çıktılarının sayısı}}$$

$$\text{Okun 250 puan üzerinde durma olasılığı} = \frac{\text{okun 250 puan üzerinde durabilme sayısı}}{\text{çarkın üzerindeki dilimlerin toplam sayısı}}$$

$$P(A) = \frac{s(A)}{s(\ddot{O})}$$
$$= \frac{4}{16}$$
$$= \frac{1}{4} = 0{,}25 = \%25 \text{ tir.}$$

ÖRNEK 16 ⇨ Bir torbada, üzerinde 5 ten küçük sayıların yazılı olduğu 4 mavi ve 4 siyah top vardır. Torbadan rastgele 2 top çekilmiştir. Çekilen toplardan biri mavi ve diğeri siyah olması koşuluyla oluşan sayı ikililerinin toplamlarının 5 olma olasılığı nedir?

ÇÖZÜM ⇨ Yukarıda sorulan sorunun örneklem uzayını tablo yaparak gösterelim:

+	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

Tablodaki deneyin çıktılarını saydığımız zaman, örneklem uzayın eleman sayısını (örneklem nokta sayısını), 16 olarak buluruz. Bu sayıyı, çarpma kuralını kullanarak da bulabiliriz.

$$s(\ddot{O}) = \underbrace{4}_{\text{Siyah Top}} \cdot \underbrace{4}_{\text{Mavi Top}} = 16 \text{ dır.}$$

İstenen olayı tanımlayalım:

$T = \{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\}$, $s(T) = 4$

$$\text{2 tane 6 yüzlü zar atıldığında aynı sayının gelme olasılığı} = \frac{\text{2 tane 6 yüzlü zar atıldığında aynı sayının gelme sayısı}}{\text{2 tane 6 yüzlü zar atılması ile mümkün olan tüm durumların sayısı}}$$

$$P(Z) = \frac{s(Z)}{s(\ddot{O})} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \text{ dır.}$$ ← (6 ile sadeleştirme)

ÖRNEK 18 ➩ 2 kız ve 3 erkekten oluşan kardeşler bir piknik yapmaya Abant'a gitmektedirler. Hepsi yan yana bir sırada oturabilmek için otobüsün en arka sırasından bilet almışlardır. Kardeşler için kimin kimin yanına oturduğu önemli değildir. Bu durumda erkek kardeşlerin hepsinin yan yana oturma olasılığı nedir?

ÇÖZÜM ➩ Yukarıda sorulan sorunun örneklem uzayının eleman sayısını bulalım:

Toplam kardeş sayısı, 2 kız ve 3 erkek olmak üzere 5 tir.

Kardeşler,

$s(\ddot{O}) = (3+2)\,! = 5! = 5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 120$ ←(P(n,n)=n!)

farklı şekilde oturabilir.

İstenen durumun olma sayısını hesaplayalım:

Erkek kardeşlerin hepsi yan yana otururlarsa bu oturuş şekillerinden bir tanesi şu olabilir:

E	E	E	K	K

Üç erkek kardeşi bir kişi olarak kabul edersek, toplam kişi sayısı sanki 1 erkek ve 2 kız kardeş sayısının toplamı şeklinde olacaktır.

O halde,

(1+2)! farklı şekilde oturabilirler. ←(P(n,n)=n!)

Erkek kardeşler kendi aralarında yer değiştirebildikleri için onlar da,

3! farklı şekilde oturabilir. ←(P(n,n)=n!)

Yukarıda sorulan soruyu olasılığın tanımından yararlanarak çözelim:

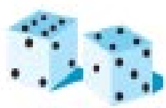
$$\text{"}T\text{" olayının olma olasılığı} = \frac{\text{istenen olayın çıktı sayısı}}{\text{deneyin mümkün olan tüm çıktılarının sayısı}}$$

$$P(T) = \frac{s(T)}{s(\bar{O})}$$
$$= \frac{4}{16} = \frac{1}{4} = 0{,}25 = \%25 \quad \text{tir.}$$

ÖRNEK 17 ➾ 2 tane hilesiz 6 yüzlü zar, hilesiz bir şekilde atıldığında aynı sayının gelme olasılığı nedir?

ÇÖZÜM ➾ Deney: 2 tane hilesiz 6 yüzlü zarın atılması.

Örneklem uzayı tablo yaparak bulalım:



II.Zar / I.Zar	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Tablodaki ikilileri saydığımız zaman, örneklem uzayında var olan tüm durumların sayısı 36 dır. Bu sayıyı, çarpma kuralını kullanarak da bulabiliriz:

$$s(\bar{O}) = \text{bir zardaki yüz sayısı} \cdot \text{diğer zardaki yüz sayısı}$$
$$= 6 \cdot 6 = 36 \text{ dır.}$$

Z= {2 tane 6 yüzlü zar atıldığında aynı sayının gelmesi}

veya

Z= { (1, 1),(2, 2),(3, 3),(4, 4),(5, 5),(6, 6) }, s (Z)= 6 dır.

Yukarıda sorulan soruyu aşağıda verilmiş olan olasılığın tanımından yararlanarak çözelim:

$$\text{İstenen durumun olma olasılığı} = \frac{\text{istenen durum sayısı}}{\text{mümkün olan tüm durumların sayısı}}$$

Çarpma kuralını uygulayalım. O halde, toplam olarak,

$$s(A)=(1+2)!\cdot 3!=3!\cdot 3!=3\cdot 2\cdot 1\cdot 3\cdot 2\cdot 1=36$$

farklı şekilde oturulabilir.

O halde, erkek kardeşlerin bir arada oturma olasılığını, olasılığın tanımından yararlanarak hesaplayalım:

$$\text{İstenen durumun olma olasılığı} = \frac{\text{istenen durum sayısı}}{\text{mümkün olan tüm durumların sayısı}}$$

$$\text{Erkek kardeşlerin hepsinin yan yana oturma olasılığı} = \frac{\text{erkek kardeşlerin yan yana oturabilme sayısı}}{\text{mümkün olan tüm oturma durumlarının sayısı}}$$

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{s(A)}{s(\ddot{O})} \\ &= \frac{36}{120} \\ &= \frac{3}{10} \quad dur. \end{aligned} \qquad \leftarrow \text{(12 ile sadeleştirme)}$$

ÖRNEK 19 ⇨ 4 evli çift arasından rastgele seçilen iki kişinin eş olma olasılığı nedir?

ÇÖZÜM ⇨ Yukarıda sorulan sorunun örneklem uzayını tanımlayalım:
4 evli çiftte 4 erkek ve 4 kadın bulunmaktadır. Bunlar arasından 2 kişi,

$$\begin{aligned} C(8,2) &= \frac{8!}{(8-2)!\cdot 2!} \\ &= \frac{8!}{6!\cdot 2!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6!}{6!\cdot 2!} = 4\cdot 7 = 28 \end{aligned} \qquad \leftarrow \left(C(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!r!} \right)$$

farklı şekilde seçilebilir. Başka bir deyişle, s (Ö)= 28 dir.

Yukarıda sorulan soruda istenen olayın olma sayısını hesaplayalım:

4 evli çift arasından, bir evli çift,

$$C(4,1) = \frac{4!}{(4-1)!\cdot 1!} = \frac{4!}{3!} = 4$$

farklı şekilde seçilebilir. Başka bir deyişle, s(D) = 4 tür.

Elde ettiğimiz verileri kullanarak rastgele seçilen 2 kişinin eş olma olasılığını, aşağıda verilmiş olan olasılığın tanımından yararlanarak hesaplayalım:

$$\text{İstenen durumun olma olasılığı} = \frac{\text{istenen durum sayısı}}{\text{mümkün olan tüm durumların sayısı}}$$

$$\text{2 kişinin eş olma olasılığı} = \frac{\text{4 evli çift arasından 1 evli çift seçme sayısı}}{\text{4 evli çift arasından 2 kişi seçme sayısı}}$$

$$P(D) = \frac{s(D)}{s(Ö)}$$

$$= \frac{4}{28}$$

$$= \frac{1}{7} \text{ dir.} \qquad \leftarrow \text{(4 ile sadeleştirme)}$$

ÖRNEK 20 ⇨ Bir LOTO düzenlenmiştir. 1 ve 50 (dahil) arasında kalan 6 rakamın tahmin edilmesi gerekmektedir. Tahmin edilen bu rakamlardan 6 sının, 5 inin, 4 ünün veya 3 ünün doğru tahmin edilme olasılığı nedir?

ÇÖZÜM ⇨ 6 rakamın 6 sını doğru tahmin etme olasılığı,

$$P(6\ Doğru) = \frac{C(6,6)\cdot C(44,0)}{C(50,6)} \qquad \leftarrow \left(C(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!\cdot r!} \right)$$

$$= \frac{\dfrac{6\,!}{(6-6)\,!\cdot 6\,!}\cdot\dfrac{44\,!}{(44-0)!\cdot 0\,!}}{\dfrac{50\,!}{(50-6)!\cdot 6\,!}}$$

$$= 0{,}000000062 \text{ dir.}$$

6 rakamın 5 ini doğru tahmin etme olasılığı,

$$P\text{ (5 Doğru) } = \frac{C(6{,}5)\cdot C(44{,}1)}{C(50{,}6)}$$

$$= \frac{\dfrac{6\,!}{(6-5)\,!\cdot 5\,!}\cdot\dfrac{44\,!}{(44-1)!\cdot 1\,!}}{\dfrac{50\,!}{(50-6)!\cdot 6\,!}}$$

$= 0{,}000016613$ tür.

6 rakamın 4 ünü doğru tahmin etme olasılığı,

$$P\text{ (4 Doğru) } = \frac{C(6{,}4)\cdot C(44{,}2)}{C(50{,}6)}$$

$$= \frac{\dfrac{6\,!}{(6-4)\,!\cdot 4\,!}\cdot\dfrac{44\,!}{(44-2)!\cdot 2\,!}}{\dfrac{50\,!}{(50-6)!\cdot 6\,!}}$$

$=0{,}000892975$ tir.

6 rakamın 3 ünü doğru tahmin etme olasılığı,

$$P\text{(3 Doğru) } = \frac{C(6{,}3)\cdot C(44{,}3)}{C(50{,}6)}$$

$$= \frac{\dfrac{6\,!}{(6-3)\,!\cdot 3\,!}\cdot\dfrac{44\,!}{(44-3)!\cdot 3\,!}}{\dfrac{50\,!}{(50-6)!\cdot 6\,!}}$$

$=0{,}016668869$ dur.

ALIŞTIRMA 4⇨ Aşağıdaki alıştırmaları yapınız.

(A) 2 tane hilesiz 6 yüzlü zar, hilesiz bir şekilde atıldığında sayıların toplamının 5 olma olasılığı nedir?

(B) Bir LOTO düzenlenmiştir. 1 ve 49 (dahil) arasında kalan 6 rakamın tahmin edilmesi gerekmektedir. Tahmin edilen bu rakamlardan 6sını, 5 ini, 4 ünü veya 3 ünü doğru tahmin etme olasılığı nedir?

◆ *KESİN OLAY ve İMKANSIZ OLAY*

Bu bölümde kesin olay ve imkansız olayın tanımları örneklerle açıklanacaktır.

Kesin Olay

> **Kesin Olay**
>
> Eğer bir olayın olma olasılığı 1 ise bu olay **kesin olay** olarak isimlendirilir.

$$P(K)=1 \Rightarrow P(K)=\frac{s(K)}{s(Ö)}=1$$

$$\Rightarrow s(K)=s(Ö) \text{ dür.}$$

Görüldüğü gibi, örneklem uzay aynı zamanda istenen olaydır. Başka bir deyişle, $Ö$ örneklem uzayının kendisi kesin olaydır. $Ö$ örneklem uzay için $Ö \subset Ö$ olduğundan $Ö$ örneklem uzayı da bir olaydır. Kesin olay, gerçekleşmesi kesin olan olaydır.

ÖRNEK 21 ⇨ "Türkiye'de hergün sabah güneşin doğması" kesin bir olaydır. Çünkü güneş adı geçen yer ve zamanda kesin olarak doğacaktır. Başka bir deyişle, adı geçen yer ve zamanda güneşin doğma olasılığı 1 dir.

ÖRNEK 22 ⇨ "Eğer bir göle bir taş atarsanız, taşın suya batması" olayı kesin olaydır. Çünkü dünyada yerçekimi kuvveti olduğu için taş suya batacaktır. Başka bir deyişle, taşın suya batma olasılığı 1 dir.

ÖRNEK 23 ⇨ "Bir torbada sadece 5 tane mavi top vardır. Bu torbadan mavi topun çekilme olasılığı nedir?"

ÇÖZÜM ⇨ Yukarıda sorulan soruyu iki farklı yolla çözeceğiz:

I.Yol:
Yukarıdaki soru göz önüne alındığında istenen olayın olma olasılığı 1 dir. Çünkü torbada sadece mavi top bulunmaktadır.

II. Yol:

Ö={ m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 }, s(Ö)=5

M={ m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 }, s(K)=5

Verilen soruyu, bir olayın olma olasılığı tanımından yararlanarak çözelim:

$$\text{“M” olayının olma olasılığı} = \frac{\text{istenen olayın çıktı sayısı}}{\text{deneyin mümkün olan tüm çıktılarının sayısı}}$$

$$\begin{aligned} P(M) &= \frac{s\,(M)}{s\,(\ddot{O})} \\ &= \frac{5}{5} \\ &= 1 \text{ dir} \end{aligned}$$

O halde, soruda adı geçen torbadan mavi bilye çekme olayı kesin olaydır.

ALIŞTIRMA 5 ⇨ Aşağıdaki alıştırmaları yapınız:

(A) {1, 2, 4, 6, 8} kümesindeki rakamlar aynı özelliklere sahip kağıt parçaları üzerine yazılmıştır. Bu kağıt parçaları da bir torbaya konmuştur.

(i) Bu torbadan bir kağıt parçasının çekilmesi sonucunda 10 dan küçük sayıların çekilme olasılığını hesaplayınız.

(ii) Yukarıda istenen olayın çeşidini yazınız.

(iii) Yukarıda istenen olayın çeşidini belirlemenize yardımcı olan gerekçeleri yazınız.

(B) Kesin olay için gerçek yaşamdan 3 örnek veriniz.

İmkansız Olay

İmkansız Olay

Eğer bir olayın olma olasılığı 0 ise, bu olay **imkansız olay** olarak isimlendirilir. Bu olay hiç bir zaman gerçekleşmez. Başka bir deyişle, imkansız olay gerçekleşmesi mümkün olmayan olaydır.

$$P(A)=0 \Rightarrow P(A) = \frac{s(A)}{s(\ddot{O})} = 0$$

$$\Rightarrow s\,(A)=0 \text{ dır.}$$

Sözel olarak, yukarıdaki işlemi ifade edersek, istenen olayın olma durumu söz konusu olmadığı için olayın eleman sayısı sıfırdır. Başka bir deyişle, olay kümesi boş küme (ϕ) dir. Buna göre ϕ, imkansız olaydır.

$\ddot{O}$ örneklem uzayı için $\phi \subset \ddot{O}$ olduğundan, boş küme de bir olaydır.

ÖRNEK 24 ⇨"Ali, topu havaya attıktan sonra topun yere düşmeme olasılığı nedir?" sorusu göz önüne alındığında bu olayın olma olasılığı sıfırdır.

Başka bir deyişle, bu olay imkansız olaydır.

ÖRNEK 25 ⇨ Türkçe bir isimde "w" kelimesinin olması imkansız bir olaydır. Çünkü alfabemizd e "w" kelimesi yoktur.

ÖRNEK 26 ⇨ Bir torbada aynı büyüklükte ve yapıda olan 3 tane yeşil elma vardır. Bu torbadan kırmızı elmanın çekilme olasılığı nedir?

ÇÖZÜM ⇨ Yukarıdaki soru göz önüne alındığında istenen olayın olma olasılığı sıfırdır. Çünkü torbada kırmızı elma olmadığı için kırmızı elma çekilemez.

Ö={torbadaki yeşil elma}={ y_1, y_2, y_3 }, s(Ö)=3

A={kırmızı elmanın çekilmesi}=ϕ, s(A)=0

O halde,

$$\text{"A" olayının olma olasılığı} = \frac{\text{istenen olayın çıktı sayısı}}{\text{deneyin mümkün olan tüm çıktılarının sayısı}}$$

$$P(A)=\frac{s(A)}{s(\ddot{O})} = \frac{0}{3} = 0 \text{ dır.}$$

ALIŞTIRMA 6 ⇨ Aşağıdaki alıştırmaları yapınız:

(A) {1, 3, 7, 11, 18, 20} sayıları ayrı ayrı kağıt parçalarına yazılarak bir torbaya atılmıştır.

(i) Bu torbadan 24 ten büyük çift sayı çekme olasılığını hesaplayınız.

(ii) Bu olayın çeşidini yazınız.

(iii) Olayın çeşidini belirlemenizi sağlayan gerekçeleri yazınız.

(B) İmkansız olay için gerçek yaşamdan 3 tane örnek yazınız.

◆ *AYRIK OLAYIN ve AYRIK OLMAYAN OLAYIN ANLAMI*

Bu bölümde ayrık olayın ve ayrık olmayan olayın anlamı örneklerle açıklanacaktır.

Ayrık Olayın Anlamı

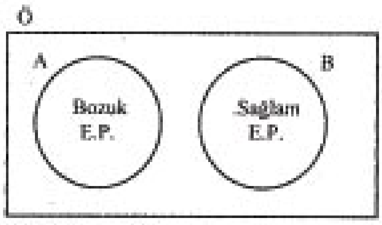
> Ayrık Olay
>
> $\ddot{O}$ örneklem uzay, $A \subset \ddot{O}$, $B \subset \ddot{O}$ ve $A \cap B = \phi$ ise, A ve B olaylarına **ayrık olay** denir.

Bu tanımı şu şekilde ifade edebiliriz. Bir örneklem uzaya ait iki olayın kesişimi boş küme ise, bu iki olaya **ayrık olay** denir. Kesişimin boş küme olması, A ve B olaylarının aynı zamanda meydana gelmediğini ifade etmektedir. Başka bir deyişle, eğer A ve B olayları aynı zamanda gerçekleşmiyorsa bu olaylara **ayrık olay** denir. Ayrık olay, aynı zamanda gerçekleşmesi mümkün olmayan olaydır.

ÖRNEK 27 ⇨ "Bir elektronik parça üreten fabrikada teknik nedenlerden dolayı bazı ürünler hatalı olarak üretilmektedir. Üretilen 1000 parçadan 100 tanesi bozuktur. Bir dikkatsizlik sonucu bozuk ve sağlam parçalar birbirine karışmıştır. Teknisyenlerden biri, bozuk ve sağlam parçaları birbirinden ayırmak için rastgele bu parçalardan birini seçerek test etmektedir. Seçilen bu parçanın bozuk olma veya sağlam olma olasılığı nedir?" sorusu göz önüne alındığında istenen olaylar, ayrık olay mı yoksa ayrık olmayan olay mıdır?

ÇÖZÜM ⇨ Yukarıda sorulan soruda istenen olayların ayrık olay olup olmadığını inceleyelim.

İstenen olayları Venn şeması ile gösterelim:



E.P.=Elektronik Parça

Ö={ elektronik parçalar}

A={bozuk elektronik parçalar}

B={sağlam elektronik parçalar}

Seçilen elektronik parça *aynı zamanda* bozuk ve sağlam olamaz. Başka bir deyişle, A ve B olaylarının kesişimi boş kümedir ($B \cap A = \phi$). O halde, A ve B olayları ayrık olaydır.

ÖRNEK 28 ⇨ "Bir torbada 2 yeşil, 3 beyaz, 2 mavi top vardır. Yeşil topların üzerinde y_1, y_2; beyaz topların üzerinde b_1, b_2, b_3; mavi topların üzerinde m_1, m_2 yazılıdır. Bu kutudan rastgele beyaz veya mavi top çekme olasılığı nedir?" sorusu göz önüne alındığında istenen olaylar, ayrık olay mı yoksa ayrık olmayan olay mıdır?

ÇÖZÜM ⇨ Yukarıda sorulan soruda istenen olayların ayrık olay olup olmadığını inceleyelim.

Ö={torbadaki toplar} veya Ö={ $y_1, y_2, b_1, b_2, b_3, m_1, m_2$ }

B={beyaz topun çekilmesi} veya B={ b_1, b_2, b_3 }

M={ mavi topun çekilmesi} veya M={ m_1, m_2 }

$B \cup M$={ beyaz veya mavi topun çekilmesi}={ b_1, b_2, b_3, m_1, m_2 }

$B \cap M$={ beyaz ve mavi topun çekilmesi}, $B \cap M = \phi$

İstenen olayları Venn şeması ile gösterelim:

Bir top çekildiğinde bu top aynı zamanda beyaz ve mavi olamaz. Başka bir deyişle, B ve M olaylarının kesişimi boş kümedir ($B \cap M = \phi$). O halde, B ve M olayları ayrık olaydır.

ALIŞTIRMA 7 ⇨ Ayrık olay için gerçek yaşamdan 3 tane örnek yazınız.

Ayrık Olmayan Olayın Anlamı

Ayrık Olmayan Olay

$\ddot{O}$ örneklem uzay, $A \subset \ddot{O}$, $B \subset \ddot{O}$ ve $A \cap B \neq \phi$ ise, A ve B olaylarına **ayrık olmayan olay** denir.

Bu tanımı şu şekilde ifade edebiliriz. Bir örneklem uzaya ait iki olayın kesişimi boş küme değilse, bu iki olaya **ayrık olmayan olay** denir. Kesişimin boş küme olmaması, A ve B olaylarının aynı zamanda meydana geldiğini ifade etmektedir. Başka bir deyişle, eğer A ve B olayları aynı zamanda gerçekleşiyorsa bu olaylara ayrık olmayan olay denir. Ayrık olmayan olay, aynı zamanda gerçekleşmesi mümkün olan olaydır.

ÖRNEK 29 ⇨ "Farklı öğretmenlik dallarında görev yapan bay ve bayanların mesleklerine karşı tutumlarını belirlemek amacıyla bir anket uygulanmıştır. Bu anketlerden biri rastgele seçildiğinde bu ankete yanıt veren kişinin matematik öğretmeni veya bay olma olasılığı nedir?" sorusu göz önüne alındığında istenen olaylar, ayrık olay mı yoksa ayrık olmayan olay mıdır?

ÇÖZÜM ⇨ Yukarıda sorulan soruda istenen olayların ayrık olay olup olmadığını inceleyelim.

Deney: Farklı öğretmenlik dallarında görev yapan bay ve bayanlara anket uygulanması.

Ö={farklı öğretmenlik dallarında görev yapan bay ve bayanların seçilmesi}

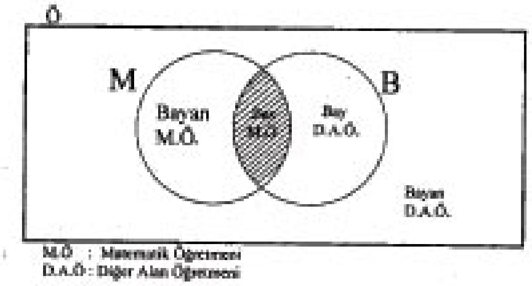
M={ matematik öğretmeninin seçilmesi}

B={ bayın seçilmesi}

$M \cup B$={matematik öğretmeni veya bay olan kişinin seçilmesi}

$M \cap B$ ={matematik öğretmeni ve bay olan kişinin seçilmesi}

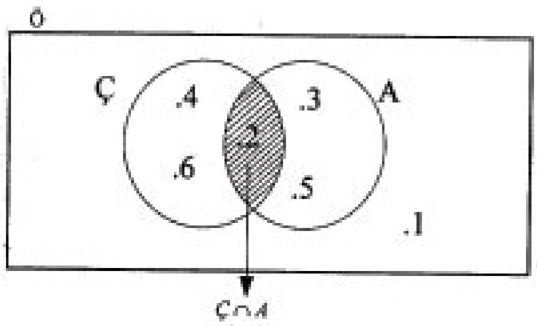
İstenen olayları Venn şeması ile gösterelim:



Seçilen kişi aynı zamanda matematik öğretmeni ve bay olabilir. Başka bir deyişle, soruda istenen olayların kesişimleri boş küme değildir ($M \cap B \neq \phi$). O halde, M ve B olayları ayrık olmayan olaydır.

ÖRNEK 30 ➪ "Bir zarın atılması sonucunda asal sayı veya çift sayı gelme olasılığı nedir?" sorusunda istenen olaylar ayrık olay mı yoksa ayrık olmayan olay mıdır?

ÇÖZÜM ➪ Yukarıda sorulan soruda istenen olayların ayrık olay olup olmadığını inceleyelim.



Deney: Zarın atılması.

$Ö=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$Ç=\{2, 4, 6\}$

$A=\{2, 3, 5\}$

$Ç \cap A=\{2\}$

İstenen olaylar yukarıda Venn şeması ile gösterilmiştir.

Zarın atılması ile gelen sayı aynı zamanda çift ve asal sayı olabilir çünkü 2 hem çift hem de asal sayıdır. Başka bir deyişle, Ç ve A olaylarının kesişimi boş küme değildir ($Ç \cap A \neq \phi$). Ç ve A olayları ayrık olmayan olaydır.

ALIŞTIRMA 8 ➪ Ayrık olmayan olay için gerçek yaşamdan 3 tane örnek yazınız.

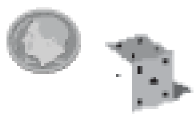
◆ *BAĞIMSIZ OLAYIN ve BAĞIMLI OLAYIN ANLAMI*

Bu bölümde bağımsız olayın ve bağımlı olayın anlamı örneklerle açıklanacaktır.

Bağımsız Olayın Anlamı

> **Bağımsız Olay**
>
> Bir olayın olma olasılığı diğer olayın olma olasılığını *etkilemiyorsa,* bu iki olay birbirinden bağımsızdır. Bu olaylar **bağımsız olay** olarak isimlendirilir.

ÖRNEK 31 ⇒ "Bir hilesiz bozuk para ve bir hilesiz zar, hilesiz olarak atılarak bir deney yapılmıştır. Paranın tura ve zarın 5 gelme olasılığı nedir?" sorusunu göz önüne aldığınızda burada istenen olaylar bağımsız olay mı yoksa bağımlı olay mıdır?



ÇÖZÜM ⇒ Yukarıdaki soruda istenen olayları tanımlayalım:

A = { paranın tura gelmesi}

B = { zarın 5 gelmesi}

Paranın tura ve zarın 5 gelme olasılıkları birbirinden etkilenmediği için A ve B bağımsız olaydır.

ÖRNEK 32 ⇒ "Bir sınavda 2 tane çoktan seçmeli soru sorulmuştur. Bu sorulardan biri 5 seçenekli iken diğer soru 4 seçeneklidir. Bir kişinin, her iki soruyu rastgele işaretleyerek yanıtladığı zaman, her iki soruyu doğru yanıtlama olasılığı nedir?" sorusunu göz önüne aldığınızda burada istenen olaylar bağımsız olay mı yoksa bağımlı olay mıdır?

ÇÖZÜM ⇒ Yukarıdaki soruda istenen olayları tanımlayalım:

F = { 5 seçenekli sorunun yanıtlanması}

G = {4 seçenekli sorunun yanıtlanması}

F ve G olaylarının olma olasılıkları birbirinden etkilenmediği için, F ve G bağımsız olaydır.

ÖRNEK 33 ⇨ "Aynı özelliklere sahip 15 top 1 den başlayarak sırayla numaralandırılarak kutunun içine konulmuştur. Bir top, bu kutunun içinden rastgele çekildikten sonra, bu top kutunun içine geri konularak tekrar bir top daha çekilmiştir. Bu işlem sonunda 10 ve 13 sayılarının çekilme olasılığı nedir?" sorusunu göz önüne aldığınızda burada istenen olaylar bağımsız olay mı yoksa bağımlı olay mıdır?

ÇÖZÜM ⇨ Yukarıdaki soruda istenen olayları tanımlayalım:

T_1 = {birinci topun çekilmesi}

T_2 = {ikinci topun çekilmesi}

İkinci topun çekilme olasılığı birinci topun çekilme olasılığından etkilenmemektedir. Çünkü ikinci top çekilmeden önce, birinci top çekildikten sonra tekrar kutuya geri konulduğu için top sayısında bir değişiklik olmamıştır. Sonuç olarak, $T_1 \, ve \, T_2$ bağımsız olaydır.

ÖRNEK 34 ⇨ Türkiye'de bir ilçe alınan bir kararla il yapılmıştır. Bu yeni ilde araçlara yeni plaka verilecektir. Bu plaka ilin kodu, iki harf ve 3 rakamdan oluşacaktır. Plakadaki 2 harf oluşturulurken aynı harfler birden fazla kullanılabileceği gibi, 3 rakam oluşturulurken aynı rakamlar da birden fazla kullanılabilmektedir.

(A) Plakadaki harf ve rakamları belirleme olayı nasıl bir olaydır?

(B) Plakadaki iki harfi belirleme olayı nasıl bir olaydır?

ÇÖZÜM ⇨ **(A)** Plakadaki harflerden ve rakamlardan oluşan kısmı belirleme olayı bağımsız olaydır. Nedenini siz açıklayınız.

(B) H={birinci harfin belirlenmesi}

İ={ikinci harfin belirlenmesi}

Plakanın harfli kısmındaki birinci harfi belirleme olasılığı, ikinci harfi belirleme olasılığını etkilememektedir. Çünkü birinci harf yerine kullanılan harf tekrar kullanılabildiği için kullanılan toplam harf sayısı değişmemektedir. Bu nedenle, H ve İ bağımsız olaydır.

ALIŞTIRMA 9⇨ Bağımsız olay ile ilgili üç örnek yazınız.

Bağımlı Olayın Anlamı

> **Bağımlı Olay**
>
> Bir olayın olma olasılığı diğer olayın olma olasılığını etkiliyorsa, bu iki olay birbirine bağımlıdır. Bu olaylar **bağımlı olay** olarak isimlendirilir.

ÖRNEK 35 ➾ "Aynı özelliklere sahip 54 top 1 den başlayarak sırayla numaralandırılarak torbanın içine konulmuştur. Rastgele 2 top sırayla çekilmiştir. Bu çekiliş sonucunda elde edilecek olan sayıların hepsini doğru tahmin eden kişi çekilişten büyük ödül alacaktır. Bu durumun gerçekleşme olasılığı nedir?" sorusunu göz önüne aldığınızda burada istenen olaylar bağımsız olay mı yoksa bağımlı olay mıdır?

ÇÖZÜM ➾ Yukarıdaki soruda istenen olayları tanımlayalım:

T_1 = {birinci topun çekilmesi}

T_2 = {ikinci topun çekilmesi}

İkinci topun çekilme olasılığı birinci topun çekilme olasılığından etkilenmektedir. Çünkü ikinci top, birinci top çekildikten sonra top sayısı bir eksilerek geriye kalan 53 top arasından çekilecektir. Sonuç olarak, $T_1 \, ve \, T_2$ bağımlı olaydır.

ÖRNEK 36 ➾ "Ayhan, işyerinde kullandığı bilgisayarı kendinden başka birisinin kullanmaması için 3 basamaklı şifre kullanmaktadır. Bu şifre sadece 0 ile 9(dahil) arasındaki farklı rakamlardan oluşmaktadır. Ayhan'ın bilgisayarının şifresinin doğru tahmin edilme olasılığı nedir?" sorusunu göz önüne aldığınızda burada istenen olay bağımsız olay mı yoksa bağımlı olay mıdır?

ÇÖZÜM ➾ Yukarıda soruda istenen olayları tanımlayalım:

A={ 0 ile 9(dahil) arasında rakamın seçilmesi}

B={0 ile 9(dahil) arasında olan ve A olayında olmayan bir rakamın seçilmesi}

C={0 ile 9(dahil) arasında olan, A ve B olaylarında olmayan bir rakamın seçilmesi}

Ayhan şifresini belirlerken 0 ile 9(dahil) arasındaki 3 farklı rakamdan yararlanılmıştır. Farklı rakam kullanılması, kullanılan bir rakamın tekrar kullanılmaması demektir. Şifrenin bir rakamı 10 tane rakam arasından yazılırken, ikinci yazılan rakam 9 tane rakam arasından, üçüncü yazılan rakam 8 rakam arasından belirlenmektedir. Görüldüğü üzere her bir seçimde kullanılan toplam rakam sayısı bir azalmaktadır. Bu da bir olayın olma olasılığının, diğer olayların olma olasılıklarını etkilemediğini göstermektedir. Başka bir deyişle, B olayının olma olasılığı, A olayının olma olasılığından etkilenirken; C olayı hem A hem de B olaylarının olma olasılıklarından etkilenmektedir. Bu nedenle A, B ve C olayları bağımlı olaydır.

ALIŞTIRMA 10⇨ Bağımlı olay ile ilgili üç örnek yazınız.

◆ *AYRIK OLAYIN ve AYRIK OLMAYAN OLAYIN OLMA OLASILIĞI*

Bu bölümde ayrık olay ve ayrık olmayan olayın olma olasılığının hesaplanması örneklerle açıklanacaktır.

Ayrık Olayın Olma Olasılığı

Ayrık olayın tanımını hatırlayalım:
"A ve B olayları aynı zamanda gerçekleşmiyorsa A ve B ayrık olaydır. Bu olayların kesişimi boş kümedir."

> **Ayrık Olayın Olma Olasılığı**
>
> $\ddot{O}$ örneklem uzay, $A \subset \ddot{O}$, $B \subset \ddot{O}$ ve $A \cap B = \phi$ ise, A veya B olaylarının olma olasılığı, A olayının olma olasılığı ile B olayının olma olasılığının toplamına eşittir.
>
> $$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

İspat:

Kümeler teorisinden yararlanarak ispatı yapalım:

$$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$$

Eşitliğinin her iki tarafını s(Ö) ile bölelim:

$$\frac{s(A\cup B)}{s(\ddot{O})}=\frac{s(A)+s(B)-s(A\cap B)}{s(\ddot{O})}$$

$$\frac{s(A\cup B)}{s(\ddot{O})}=\frac{s(A)}{s(\ddot{O})}+\frac{s(B)}{s(\ddot{O})}-\frac{s(A\cap B)}{s(\ddot{O})}$$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ ....(*)

$P(A\cap B)=\frac{s(A\cap B)}{s(\ddot{O})}$ ← ($A\cap B=f$ ise $s(A\cap B)=0$ dır.)

$=\frac{0}{s(\ddot{O})}=0$ dır.

O halde, bulduğumuz değeri (*) da yerine koyarsak:

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B)-0$$

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) \text{ dir. } \checkmark$$

ÖRNEK 37 ➾ Bir hilesiz tavla zarı atıldığında tek sayı veya 5 ten büyük bir sayı gelme olasılığını hesaplayalım:

ÇÖZÜM ➾ Deney : Bir hilesiz tavla zarının atılması.

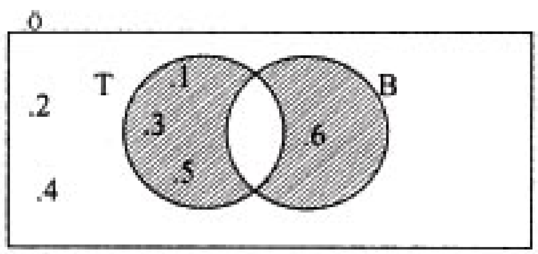
$\ddot{O}=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $s(\ddot{O})=6$

T = {tek sayının gelmesi}={1, 3, 5}, s(T)=3

B= {5 ten büyük sayının gelmesi} ={6}, s(B)=1

$T\cap B$ = {tek sayının <u>ve</u> 5 ten büyük sayının gelmesi}=f, $s(T\cap B)=0$

$T\cup B$={tek sayı <u>veya</u> 5 ten büyük sayının gelmesi}, $s(T\cup B)$=?



$$s(T\cup B) = s(T) + s(B) - s(T\cap B)$$
$$= s(T) + s(B)-0$$
$$= s(T) + s(B)$$
$$= 3 + 1 = 4 \text{ tür.}$$

Venn şemasını incelediğimiz zaman da $s(A\cup B)=4$ olduğu görülmektedir.

Verilen soruyu iki farklı yolla çözeceğiz:

I.Yol:

Tek sayı veya 5 ten büyük sayının gelme olasılığı $P(T \cup B)$ yi aşağıda verilmiş olan olasılığın tanımından yararlanarak hesaplayalım:

$$\text{İstenen durumun olma olasılığı} = \frac{\text{istenen durum sayısı}}{\text{mümkün olan tüm durumların sayısı}} \quad (*)$$

$$P(T \cup B) = \frac{\text{tek sayı } \underline{\text{veya}} \text{ 5 ten büyük sayının gelme sayısı}}{\text{zar atışı sonucunda elde edilebilecek tüm sayıların sayısı}}$$

$$= \frac{s\,(T \cup B)}{s\,(\ddot{O})}$$

$$= \frac{4}{6}$$

$$= \frac{2}{3} \text{ tür.} \qquad \leftarrow \text{(Pay ve paydayı 2 ile bölme)}$$

II. Yol:

T ve B olayları ayrık olaydır çünkü zar atıldığında gelen sayı aynı zamanda tek sayı ve 5 ten büyük sayı olamaz. Başka bir deyişle, T ve B olaylarının kesişimi boş kümedir ($T \cap B = \phi$).

Tek sayının veya 5 ten büyük sayının gelme olasılığı $P(T \cup B)$ yi

$$P(T \cup B) = P(T) + P(B) \ \ldots . \ (**)$$

den yararlanarak hesaplayalım:

$P(T \cup B)$ yi hesaplamak için $P(T)$ ve $P(B)$ değerlerini bulmamız gerekmektedir.

Tek sayının gelme olasılığı $P(T)$ yi bulalım:

$$P(T) = \frac{\text{tek sayının gelme sayısı}}{\text{zar atışı sonucunda elde edilebilecek tüm sayıların sayısı}} \qquad \leftarrow (* \text{ kullanıldı.})$$

$$= \frac{s\,(T)}{s\,(\ddot{O})}$$

$$= \frac{3}{6} \text{ dır.}$$

5 ten büyük sayının gelme olasılığı P(B) yi bulalım:

$$P(B) = \frac{\text{5 ten büyük sayının gelme sayısı}}{\text{zar atışı sonucunda elde edilebilecek tüm sayıların sayısı}}$$

$$= \frac{s(B)}{s(Ö)}$$

$$= \frac{1}{6} \text{ dır.}$$

$P(T \cup B)$ yi hesaplamak için bulduğumuz P(T) ve P(B) değerlerini (**) da yerlerine koyalım:

$$P(T \cup B) = P(T) + P(B)$$

$$= \frac{3}{6} + \frac{1}{6}$$

$$= \frac{3+1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \text{ tür.}$$

← (Pay ve paydayı 2 ile bölme)

ÖRNEK 38 ⇝ Gençlerin bazı konularla ilgili tercihlerini saptamak amacıyla bir anket uygulanmıştır.

Anketteki sorularından ikisi şudur:

1)Cinsiyetiniz:…..

2)En çok sevdiğiniz spor aşağıdaki sporlardan hangisidir?
( ) Futbol ( ) Basketbol ( ) Tenis
( ) Voleybol ( ) Yüzme ( ) Atletizm

Yanıtların analizini kolaylaştırmak için bir tablo hazırlanmıştır:

Tablo 1

SPOR / CİNSİYET	Futbol	Basketbol	Tenis	Voleybol	Yüzme	Atletizm	TOPLAM
Kız	3	8	10	5	9	10	45
Erkek	27	7	8	2	11	5	60
TOPLAM	30	15	18	7	20	15	105

Anketlerden birini rastgele seçtiğimizde ankete yanıt veren kişinin futbolu veya yüzmeyi seven biri olma olasılığını hesaplayalım: (Not: Ankete yanıt veren kişiler her bir soruda yalnızca bir tercih yapmıştır.)

ÇÖZÜM ⇒ Deney: Gençlerin bazı konularda tercihlerini saptamak amacıyla bir anketin uygulanması.

Ö={ankete yanıt veren gençler}, s(Ö)= 105

F={futbolu seven genç}, s(F)=30

Y={yüzmeyi seven genç}, s(Y)= 20

$F \cap Y$= {futbolu ve yüzmeyi seven genç}, $s(F \cap Y)=0$

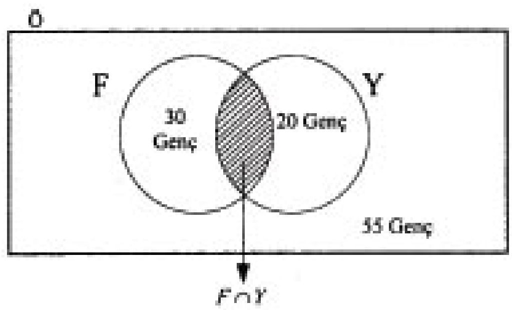
$F \cup Y$= {futbolu veya yüzmeyi seven genç}

$$s(F \cup Y) = s(F) + s(Y) - s(F \cap Y)$$

$$= s(F) + s(Y) - 0$$

$$= 30 + 20$$

$$= 50 \text{ dir.}$$



Yanda verilen Venn şemasını incelediğimizde kolayca $s(F \cup Y)$ yi bulabilmekteyiz.

$s(F \cup Y)$ nin 50 olduğunu Venn şemasından da yararlanarak bulunuz.

Yukarıda sorulan soruyu iki farklı yolla çözeceğiz:

I.Yol:
Futbolu veya yüzmeyi seven gencin seçilme olasılığı $P(F \cup Y)$ yi aşağıda verilmiş olan olasılığın tanımından yararlanarak hesaplayalım:

$$\text{İstenen durumun olma olasılığı} = \frac{\text{istenen durum sayısı}}{\text{mümkün olan tüm durumların sayısı}} \quad (*)$$

$$P(F \cup Y) = \frac{\text{futbolu veya yüzmeyi seven gencin seçilme sayısı}}{\text{ankete yanıt veren genç sayısı}}$$

$$= \frac{s\,(F \cup Y)}{s\,(Ö)}$$

$$= \frac{50}{105}$$

$= \frac{10}{21}$ dir. ← (Pay ve paydayı 5 ile bölme)

II. Yol:

F ve Y olayları ayrık olaydır, çünkü bir kişi yalnız bir tercih yaptığından aynı zamanda futbolu ve yüzmeyi tercih edemez. Başka bir deyişle, F ve Y olaylarının kesişimi boş kümedir ($F \cap Y = f$).

Futbolu veya yüzmeyi seven gencin seçilme olasılığı $P(F \cup Y)$ yi,

$$P(F \cup Y) = P(F) + P(Y) \text{ ....(**)}$$

yararlanarak hesaplayalım:

Futbolu veya yüzmeyi seven gencin seçilme olasılığı $P(F \cup Y)$ yi hesaplamak için $P(F)$ ve $P(Y)$ değerlerini bulmamız gerekmektedir.

Futbolu seven gencin seçilme olasılığı $P(F)$ yi bulalım:

$P(F) = \frac{\text{futbolu seven gencin seçilme sayısı}}{\text{ankete yanıt veren genç sayısı}}$ ← (* kullanıldı.)

$$= \frac{s\,(F)}{s\,(Ö)}$$

$= \frac{30}{105}$ tir.

Yüzmeyi seven gencin seçilme olasılığı P(Y) yi bulalım:

$$P(Y) = \frac{\text{yüzmeyi seven gencin seçilme sayısı}}{\text{ankete yanıt veren genç sayısı}} \leftarrow (\text{ * kullanıldı.})$$

$$= \frac{s(Y)}{s(\ddot{O})}$$

$$= \frac{20}{105} \text{ tir.}$$

$P(F \cup Y)$ yi hesaplamak için P(F) ve P(Y) değerlerini (**) da yerlerine koyalım:

$$P(F \cup Y) = P(F) + P(Y)$$

$$= \frac{30}{105} + \frac{20}{105}$$

$$= \frac{50}{105} = \frac{10}{21} \text{ dir.} \qquad \leftarrow (\text{Pay ve paydayı 5 ile bölme})$$

ÖRNEK 39 ⇨ Şubat ayının 29 çektiği bir yıla ait tüm günler kullanılarak her bir karta bir gün gelecek şekilde aynı özelliklere sahip 366 kart yazılarak bir torbaya atılmıştır. Bir kart rastgele torbadan çekilmiştir. Bu kartın Mart veya Haziran ayına ait olma olasılığı nedir?

ÇÖZÜM ⇨ M={Mart ayına ait kart}, s(M)=31

H={Haziran ayına ait kart}, s(H)=30

M ve H olayları ayrık olaydır çünkü çekilen kart aynı zamanda Mart ve Haziran ayına ait olamaz. Başka bir deyişle, M ve H olaylarının kesişimi boş kümedir ($M \cap H = \emptyset$).

O halde, çekilen kartın Mart veya Haziran ayına ait olma olasılığı $P(M \cup H)$ yi,

$$P(M \cup H) = P(M) + P(H) \quad \ldots(*)$$

den yararlanarak bulacağız:

Bunun için P(M) ve P(H) değerlerini bulmamız gerekmektedir.

Bu değerleri bulmak için olasılığın tanımından yararlanacağız:

$$\text{İstenen durumun olma olasılığı} = \frac{\text{istenen durum sayısı}}{\text{mümkün olan tüm durumların sayısı}} \quad (**)$$

Çekilen kartın Mart ayına ait olma olasılığı P(M) yi bulalım:

$$P(M) = \frac{\text{Mart ayına ait kart sayısı}}{\text{toplam kart sayısı}}$$ ←(** kullanıldı.)

$$= \frac{s(M)}{s(Ö)}$$

$$= \frac{31}{366} \text{ dır.}$$

Çekilen kartın Haziran ayına ait olma olasılığı P(H) yi bulalım:

$$P(H) = \frac{\text{Haziran ayına ait kart sayısı}}{\text{toplam kart sayısı}}$$ ←(** kullanıldı.)

$$= \frac{s(H)}{s(Ö)}$$

$$= \frac{30}{366} \text{ dır.}$$

Bulduğumuz P(M) ve P(H) değerlerini (*) da yerlerine koyalım:

$$P(M \cup H) = P(M)+P(H)$$
$$= \frac{31}{366} + \frac{30}{366}$$
$$= \frac{61}{366} \text{ dır.}$$

ALIŞTIRMA 11 ⇨Aşağıdaki alıştırmaları yapınız.

(A) Örnek 38 de verilmiş olan Tablo 1 deki verileri kullanarak, anketlerden birini rastgele seçtiğimizde ankete yanıt veren kişinin tenis veya voleybolu seven biri olma olasılığını hesaplayınız.

(B) Bir hilesiz tavla zarı atıldığında, 4 ten büyük çift sayı veya tek sayının gelme olasılığını hesaplayınız.

Ayrık Olmayan Olayın Olma Olasılığı

Ayrık olmayan olayın tanımını hatırlayalım:
"A ve B olayları aynı zamanda gerçekleşiyorsa A ve B ayrık olmayan olaydır. Bu olayların kesişimi boş küme değildir."

> **Ayrık Olmayan Olayının Olma Olasılığı**
>
> $\ddot{O}$ örneklem uzay, $A \subset \ddot{O}$, $B \subset \ddot{O}$ ve $A \cap B \neq \phi$ ise, A veya B olayının olma olasılığı,
>
> $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{ dir.}$$

İspat:

İspatı yaparken kümeler teorisinden yararlanalım,

$$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B) \text{ dir.}$$

Eşitliğin her iki tarafını örneklem uzayın eleman sayısına bölelim:

$$\frac{s(A \cup B)}{s(\ddot{O})} = \frac{s(A)}{s(\ddot{O})} + \frac{s(B)}{s(\ddot{O})} - \frac{s(A \cap B)}{s(\ddot{O})} \text{ dir.}$$

Olasılığın tanımından yararlanalım:

$$P(A) = \frac{s(A)}{s(\ddot{O})} \text{ dür.}$$

O halde, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ dir.

ÖRNEK 40 ⇨ Bir sınıfta 16 kız, 20 erkek öğrenci vardır. Kız ve erkeklerin yarısının gözleri kahverengidir. Bu sınıftan rastgele seçilen kişinin erkek veya kahverengi gözlü olması olasılığını hesaplayınız.

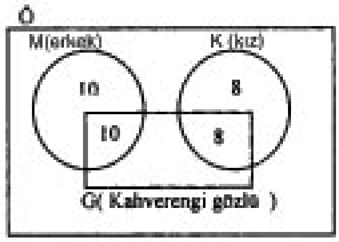
ÇÖZÜM ⇨ Ö={sınıftaki öğrenciler}, s(Ö)=16+20=36

M={erkek öğrenci}, s(M)= 20

G={kahverengi gözlü öğrenci}, $s(G)=\frac{16}{2}+\frac{20}{2}=18$

$M \cap G$= {erkek ve kahverengi gözlü öğrenci}, $s(M \cap G)=\frac{20}{2}=10$

$M \cup G$={erkek veya kahverengi gözlü öğrenci}, $s(M \cup G)=?$



$$s(M \cup G) = s(M) + s(G) - s(M \cap G)$$

$$= 20 + 18 - 10$$

$$= 28 \text{ dir.}$$

Verilen Venn şeması incelendiği zaman $s(M \cup G)=28$ olduğu kolayca görülmektedir.

Yukarıda sorulan soruyu iki farklı yolla çözeceğiz:

I.Yol:

Bir sınıftan rastgele seçilen kişinin erkek veya kahverengi gözlü olması olasılığı $P(M \cup G)$ yi, aşağıda verilmiş olan olasılığın tanımından yararlanarak hesaplayalım:

$$\text{İstenen durumun olma olasılığı} = \frac{\text{İstenen durum sayısı}}{\text{mümkün olan tüm durumların sayısı}} \qquad (*)$$

O halde, erkek veya kahverengi gözlü öğrenci seçilme olasılığı:

$$P(M \cup G) = \frac{\text{erkek } \underline{\text{veya}} \text{ kahverengi gözlü öğrenci sayısı}}{\text{sınıftaki toplam öğrenci sayısı}}$$

$$= \frac{s(M \cup G)}{s(Ö)}$$

$$= \frac{28}{36}$$

$$= \frac{7}{9} \text{ dur.}$$

← (Pay ve paydayı 4 ile bölme)

II. Yol:
İstenen olayların seçilen öğrencinin erkek veya kahverengi gözlü olması" olduğunu hatırlayalım. Buradaki olaylar M ve G olaylarıdır. Bu olayların çeşidi ise ayrık olmayan olaydır. Çünkü, seçilen öğrenci erkek ve aynı zamanda kahverengi gözlü olabilir. Başka bir deyişle, M ve G olaylarının kesişimi boş küme değildir ($M \cap G \neq \phi$).

Yukarıdaki soruda sorulan erkek veya kahverengi gözlü öğrenci seçme olasılığı $P(M \cup G)$ yi hesaplayalım:

$$P(M \cup G) = P(M) + P(G) - P(M \cap G) \ldots . (**)$$

$P(M \cup G)$ yi hesaplamak için $P(M)$, $P(G)$ ve $P(M \cap G)$ değerlerini bulmamız gerekmektedir.

Erkek öğrencinin seçilme olasılığı $P(M)$ yi bulalım:

$$P(M) = \frac{\text{erkek öğrenci sayısı}}{\text{sınıftaki toplam öğrenci sayısı}} \quad \leftarrow \text{(*) Kullanıldı.}$$

$$= \frac{s\,(M)}{s\,(Ö)}$$

$$= \frac{20}{36} \text{ dır.}$$

$$P(G) = \frac{\text{kahverengi gözlü öğrenci sayısı}}{\text{sınıftaki toplam öğrenci sayısı}}$$

$$= \frac{s(G)}{s(Ö)}$$

$$= \frac{18}{36} \text{ dır.}$$

$$P(M \cap G) = \frac{\text{erkek ve kahverengi gözlü öğrenci sayısı}}{\text{sınıftaki toplam öğrenci sayısı}} \quad \leftarrow \text{(* kullanıldı.)}$$

$$= \frac{s\,(M \cap G)}{s\,(Ö)}$$

$$= \frac{10}{36} \text{ dır.}$$

Bulduğumuz değerleri (**) da yerine koyalım:

$$P(M \cup G)=P(M) + P(G) - P(M \cap G)$$

$$=\frac{20}{36}+\frac{18}{36}-\frac{10}{36}$$

$$=\frac{20+18-10}{36}=\frac{28}{36}=\frac{7}{9} \text{ dur}$$ ←(Pay ve paydayı 4 ile bölme)

ÖRNEK 41 ➾ Bir hilesiz tavla zarının atılması sonucunda tek sayı veya 3 ten büyük bir sayının gelme olasılığını hesaplayınız.

ÇÖZÜM ➾ Ö={1, 2, 3, 4, 5, 6}, s(Ö)=6

T={tek sayının gelmesi}={1, 3, 5,}, s(T)=3

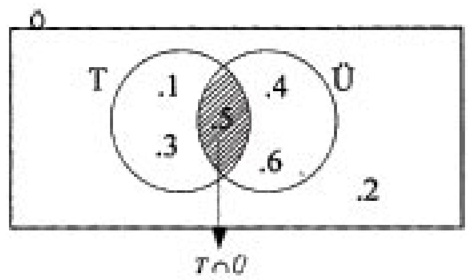
Ü={3 ten büyük sayının gelmesi} = { 4, 5, 6}, s(Ü)=3

$T \cap$ Ü={tek sayı ve 3 ten büyük sayının gelmesi}={ 5 }, s($T \cap$ Ü)=1

$T \cup$ Ü={tek sayı veya 3 ten büyük sayının gelmesi}

={1,3, 4, 5, 6 }, s($T \cup$ Ü)=5

İstenen olayları Venn şeması ile gösterelim:



Yukarıda sorulan soruyu iki farklı yolla çözeceğiz:

I.Yol:
T ve Ü olayları ayrık olmayan olaydır. Çünkü seçilen sayı aynı zamanda tek sayı ve 3 ten büyük sayı olabilir. Başka bir deyişle, T ve Ü olaylarının kesişimi boş küme değildir ($T \cap Ü \neq$ f).

Bir hilesiz tavla zarının atılması sonucunda tek sayı veya 3 ten büyük bir sayının gelme olasılığı P($T \cup$ Ü) yü hesaplayalım:

$$P(T \cup Ü)=P(T) + P(Ü) - P(T \cap Ü) \text{ ....(*)}$$

$P(T \cup Ü)$ yü hesaplamak için P(T), P(Ü) ve $P(T \cap Ü)$ değerlerini bulmamız gerekmektedir. Bu değerleri olasılığın tanımından yararlanarak hesaplayalım:

$$\text{İstenen durumun olma olasılığı} = \frac{\text{istenen durum sayısı}}{\text{mümkün olan tüm durumların sayısı}} \quad (**)$$

Zar atıldığında tek sayının gelme olasılığı P(T) yi bulalım:

$$P(T) = \frac{\text{tek sayının gelme sayısı}}{\text{zarın atılması sonucu elde edilen tüm sayıların sayısı}}$$

← (** kullanıldı.)

$$= \frac{s(T)}{s(Ö)}$$

$$= \frac{3}{6} \text{ dır.}$$

Zar atıldığında 3 ten büyük sayının gelme olasılığı P(Ü) yü bulalım:

$$P(Ü) = \frac{\text{3 ten büyük sayının gelme sayısı}}{\text{zarın atılması sonucu elde edilen tüm sayıların sayısı}}$$

← (** kullanıldı.)

$$= \frac{s(Ü)}{s(Ö)}$$

$$= \frac{3}{6} \text{ dır.}$$

Zar atıldığında tek sayının ve 3 ten büyük sayının gelme olasılığı $P(T \cap Ü)$ yü bulalım:

$$P(T \cap Ü) = \frac{\text{tek sayının \underline{ve} 3 ten büyük sayının gelme sayısı}}{\text{zarın atılması sonucu elde edilen tüm sayıların sayısı}}$$

← (** kullanıldı.)

$$= \frac{s(T \cap Ü)}{s(Ö)}$$

$$= \frac{1}{6} \text{ dır.}$$

Bulduğumuz P(T), P(Ü) ve $P(T \cap Ü)$ değerlerini (*) da yerlerine koyalım:

$$P(T \cup Ü) = P(T) + P(Ü) - P(T \cap Ü)$$

$$= \frac{3}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6}$$

$$= \frac{3+3-1}{6} = \frac{5}{6} \text{ olur.}$$

II.Yol:
Bir hilesiz tavla zarının atılması sonucunda tek sayı veya 3 ten büyük bir sayının gelme olasılığı $P(T \cup Ü)$ yü, olasılığın tanımından yararlanarak hesaplayalım:

$$P(T \cup Ü) = \frac{\text{tek sayının \underline{veya} 3 ten büyük sayının gelme sayısı}}{\text{zarın atılması sonucu elde edilen tüm sayıların sayısı}}$$

$$= \frac{s(T \cup Ü)}{s(Ö)} \qquad \leftarrow \text{(** kullanıldı.)}$$

$$= \frac{5}{6} \text{ dır.}$$

ÖRNEK 42 ➨ 5. sınıftaki öğrencilerin bazı konularla ilgili tercihlerini saptamak amacıyla bir anket uygulanmıştır. Anketteki sorulardan ikisi şudur:

1. Cinsiyetiniz:……….
2. En çok sevdiğiniz ders aşağıdakilerden hangisidir?

( ) Matematik ( ) Fen Bilgisi ( ) Türkçe ( ) Resim
( ) Müzik ( ) Sosyal Bilgiler ( ) Beden Eğitimi

Verilen yanıtları analiz edebilmek için aşağıdaki tablo hazırlanmıştır.

Tablo 2

Ders / Cinsiyet	Matematik	Fen Bilgisi	Türkçe	Resim	Müzik	Sosyal Bilgiler	Beden Eğitimi	TOPLAM
Kız	25	10	7	12	7	4	10	75
Erkek	20	14	10	7	5	9	15	80
TOPLAM	45	24	17	19	12	13	25	155

Anketlerden birini rastgele seçtiğimizde ankete yanıt veren öğrencinin kız veya matematiği seven bir öğrenci olma olasılığını hesaplayalım. (Not: Öğrenci her soruda yalnız bir tercih yapmaktadır.)

ÇÖZÜM ⇒ Deney: 5. sınıftaki öğrencilerin bazı konulardaki tercihlerini saptamak amacıyla bir anket uygulanması.

Ö={ankete yanıt veren öğrenciler}, s(Ö)=155

K={kız öğrencinin seçilmesi}, s(K)=75

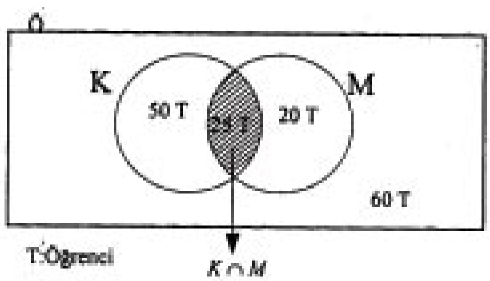
M={matematiği seven öğrencinin seçilmesi}, s(M)=45

$K \cap M$={kız ve matematiği seven öğrencinin seçilmesi}, $s(K \cap M)=25$

$K \cup M$={kız öğrenci veya matematiği seven öğrencinin seçilmesi}

$$\begin{aligned} s(K \cup M) &= s(K)+s(M)- s(K \cap M) \\ &= 75 + 45 - 25 \\ &= 95 \text{ tir.} \end{aligned}$$

İstenen olayları Venn şeması ile gösterelim:



Yanda verilen Venn şemasını incelediğimiz zaman kolayca $s(K \cup M)$ yi bulabilmekteyiz. $s(K \cup M)$ nin 95 olduğunu Venn şemasından da yararlanarak bulunuz.

Yukarıda sorulan soruyu iki farklı yolla çözeceğiz:

I.Yol:
K ve M olayları ayrık olay değildir çünkü seçtiğimiz ankete yanıt veren kişi kız ve aynı zamanda matematiği seven kişi olabilir. Başka bir deyişle, K ve M olaylarının kesişimi boş küme değildir ($K \cap M \neq$ f).

Kız veya matematiği seven öğrencinin seçilme olasılığı $P(K \cup M)$ yi

$$P(K \cup M) = P(K) + P(M) - P(K \cap M) \ldots (*)$$

den yararlanarak hesaplayalım:

$P(K \cup M)$ yi hesaplamak için P(K), P(M) ve $P(K \cap M)$ değerlerini bulmamız gerekmektedir. Bu değerleri olasılığın tanımından yararlanarak hesaplayalım:

$$\text{İstenen durumun olma olasılığı} = \frac{\text{İstenen durum sayısı}}{\text{mümkün olan tüm durumların sayısı}} \quad (**)$$

Kız öğrencinin seçilme olasılığı P(K) yi bulalım:

$$P(K) = \frac{\text{kız öğrencinin seçilme sayısı}}{\text{ankete yanıt veren öğrenci sayısı}} \quad \leftarrow (** \text{ kullanıldı.})$$

$$= \frac{s(K)}{s(Ö)}$$

$$= \frac{75}{155} \text{ tir.}$$

Matematiği seven öğrencinin seçilme olasılığı P(M) yi hesaplayalım:

$$P(M) = \frac{\text{matematiği seven öğrencinin seçilme sayısı}}{\text{ankete yanıt veren öğrenci sayısı}} \quad \leftarrow (** \text{ kullanıldı.})$$

$$= \frac{s(M)}{s(Ö)}$$

$$= \frac{45}{155} \text{ tir.}$$

$K \cap M \neq \phi$ olduğundan, kız ve matematiği seven öğrencinin seçilme olasılığı $P(K \cap M)$ yi hesaplayalım:

$$P(K \cap M) = \frac{\text{kız ve matematiği seven öğrencinin seçilme sayısı}}{\text{ankete yanıt veren öğrenci sayısı}} \quad \leftarrow (** \text{ kullanıldı.})$$

$$= \frac{s(K \cap M)}{s(Ö)}$$

$$= \frac{25}{155} \text{ tir.}$$

$P(K \cup M)$ yi hesaplamak için bulduğumuz P(K), P(M) ve $P(K \cap M)$ değerlerini (*) da yerlerine koyalım.

$$P(K \cup M) = P(K) + P(M) - P(K \cap M)$$

$$= \frac{75}{155} + \frac{45}{155} - \frac{25}{155}$$

$$= \frac{75+45-25}{155} = \frac{95}{155} = \frac{19}{31} \text{ dir.}$$ ⟵(Pay ve paydayı 5 ile bölme)

II.Yol:

Kız veya matematiği seven öğrenci seçilme olasılığı $P(K \cup M)$yi aşağıda verilmiş olan olasılığın tanımından yararlanarak hesaplayalım:

$$P(K \cup M) = \frac{\text{kız öğrenci veya matematiği seven öğrenci sayısı}}{\text{ankete cevap veren öğrenci sayısı}}$$

$$= \frac{s(K \cup M)}{s(Ö)}$$ ⟵(** kullanıldı.)

$$= \frac{95}{155}$$ ⟵ (Pay ve paydayı 5 ile bölme)

$$= \frac{19}{31} \text{ dir.}$$

ÖRNEK 43 ⇨ Şubat ayının 29 çektiği bir yıla ait tüm günler kullanılarak her bir karta bir gün gelecek şekilde aynı özelliklere sahip 366 kart yazılarak bir torbaya atılmıştır. Bir kart rastgele torbadan çekilmiştir. Bu kartın Aralık ayına veya ayın 20 sine ait olma olasılığı nedir?

ÇÖZÜM ⇨ $A = \{\text{Aralık ayına ait kart}\}$, $s(A)=31$

$Y = \{\text{ayın 20 sine ait kart}\}$, $s(Y)=12$

$A \cap Y = \{\text{Aralık ayına } \underline{\text{ve}} \text{ ayın 20 sine ait kart}\}$, $s(A \cap Y)=1$

A ve Y olayları ayrık olmayan olaydır çünkü çekilen kart aynı zamanda Aralık ayına ve Aralık ayının 20 sine ait olabilir. Başka bir deyişle, A ve Y olaylarının kesişimi boş küme değildir ($A \cap Y \neq \emptyset$).

O halde, çekilen kartın Aralık ayına veya ayın 20 sine ait olma olasılığı $P(A \cup Y)$ yi,

$$P(A \cup Y) = P(A) + P(Y) - P(A \cap Y) \; .... (*)$$

den yararlanarak bulacağız:

Bunun için $P(A)$, $P(Y)$ ve $P(A \cap Y)$ değerlerini bulmamız gerekmektedir. Bu değerleri bulmak için olasılığın tanımından yararlanacağız:

$$\text{İstenen durumun olma olasılığı} = \frac{\text{istenen durum sayısı}}{\text{mümkün olan tüm durumların sayısı}} \qquad (**)$$

Çekilen kartın Aralık ayına ait olma olasılığı P(A) yı bulalım:

$$P(A) = \frac{\text{Aralık ayına ait kart sayısı}}{\text{toplam kart sayısı}} \qquad \leftarrow (\text{** kullanıldı.})$$

$$= \frac{s(A)}{s(Ö)}$$

$$= \frac{31}{366} \text{ dır.}$$

Çekilen kartın ayın 20 sine ait olma olasılığı P(Y) yi bulalım:

$$P(Y) = \frac{\text{ayın 20 sine ait kart sayısı}}{\text{toplam kart sayısı}} \qquad \leftarrow (\text{** kullanıldı.})$$

$$= \frac{s(Y)}{s(Ö)}$$

$$= \frac{12}{366} \text{ dır.}$$

Çekilen kartın Aralık ayına ve ayın 20 sine ait olma olasılığı $P(A \cap Y)$ yi hesaplayalım:

$$P(A \cap Y) = \frac{\text{Aralık ayına } \underline{\text{ve}} \text{ ayın 20 sine ait kart sayısı}}{\text{toplam kart sayısı}} \qquad \leftarrow (\text{** kullanıldı.})$$

$$= \frac{s(A \cap Y)}{s(Ö)}$$

$$= \frac{1}{366} \text{ dır.}$$

$P(A \cup Y)$ yi hesaplamak için bulduğumuz P(A), P(Y) ve $P(A \cap Y)$ değerlerini (*) da yerlerine koyalım:

$$P(A \cup Y) = P(A) + P(Y) - P(A \cap Y)$$

$$= \frac{31}{366} + \frac{12}{366} - \frac{1}{366}$$

$$= \frac{42}{366} = \frac{7}{61} \text{ dir.} \qquad \leftarrow (\text{Pay ve paydayı 6 ile bölme})$$

ÖRNEK 44 ⇨ 26 kişilik bir sınıf 14 kız 12 erkekten oluşmaktadır. Kızların 9 unun, erkeklerin 7 sinin gözleri kahverengidir. Sınıftan rastgele seçilen bir öğrencinin erkek veya kahverengi gözlü olma olasılığı nedir?

ÇÖZÜM ⇨ Olasılığın tanımından yararlanarak aşağıdaki olayların olma olasılıklarını hesaplayalım:

$$\text{İstenen durumun olma olasılığı} = \frac{\text{istenen durum sayısı}}{\text{mümkün olan tüm durumların sayısı}}$$

Ö={çalışmaya katılan öğrenciler}, s(Ö)=14+12=26

A={erkek öğrenci }, s(A)=12, $P(A)=\frac{12}{26}$

B={ kahverengi gözlü öğrenci}, s(B)= 16, $P(B)=\frac{16}{26}$

$A \cap B$={kahverengi gözlü <u>ve</u> erkek öğrenci }, $s(A \cap B)= 7$,

$$P(A \cap B) = \frac{7}{26}$$

$A \cup B$={ kahverengi gözlü <u>veya</u> erkek öğrenci },

O halde,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{12}{26} + \frac{16}{26} - \frac{7}{26}$$

$$= \frac{12+16-7}{26} = \frac{21}{26} \text{ dır.}$$

ALIŞTIRMA 12 ⇨ Aşağıdaki alıştırmaları yapınız:

(A) Örnek 42 deki Tablo 2 de verilen verileri kullanarak, anketlerden birini rastgele seçtiğimizde ankete yanıt veren öğrencinin erkek veya Fen dersini seven bir öğrenci olma olasılığını hesaplayınız

(B) Bir hilesiz tavla zarı atıldığında çift sayı veya 3 ten büyük sayı gelme olasılığını hesaplayınız.

◆ *KOŞULLU OLASILIK*

"Bir sınıfta 10 kız ve 8 erkek öğrenci vardır. Kızların 5 i erkeklerin 4 ü matematikten başarılı olmuştur. Bu sınıftan rastgele seçilen 3 öğrencinin üçünün de matematikten başarılı olduğu bilindiğine göre, üçünün de kız olma olasılığı nedir?"

Bu bölümde koşullu olasılık örneklerle açıklanacaktır.

Koşullu Olasılık

A ve B, eş olumlu $Ö$ örneklem uzayında iki olay olsun. A olayının gerçekleşmiş olması durumunda, B olayının olma olasılığına, B olayının A ya bağlı koşullu olasılığı denir ve $P(B \setminus A)$ ile gösterilir.

$$P(B \setminus \mathrm{A}) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \quad P(A) \neq 0$$

Teorem: Eş olumlu $Ö$ örneklem uzayında A, B iki olay ve $s(A) \neq 0$ ise, B olayının, A ya bağlı koşullu olasılığı,

$$P(B \setminus A) = \frac{s(A \cap B)}{s(A)} \text{ dır.}$$

İspat:

Koşullu olasılığın tanımına göre, B olayının, A ya bağlı koşullu olasılığı,

$$P(B \setminus A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \text{ dır.}$$

$Ö$ örneklem uzayı eş olumlu olduğundan,

$$P(A \cap B) = \frac{s(A \cap B)}{s(Ö)} \quad ve \quad P(A) = \frac{s(A)}{s(Ö)} \text{ dür.}$$

Buna göre,

$$P(B \setminus A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

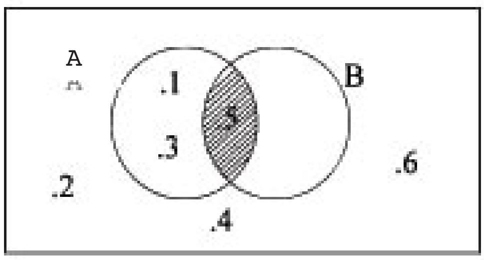
$$= \frac{\dfrac{s(A \cap B)}{s(\ddot{O})}}{\dfrac{s(A)}{s(\ddot{O})}}$$

$$= \frac{s(A \cap B)}{s(\ddot{O})} \cdot \frac{s(\ddot{O})}{s(A)} \quad \leftarrow \left(\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \right)$$

$$= \frac{s(A \cap B)}{s(A)} \text{ olur.} \quad ✓$$

ÖRNEK 45 ⇨ 6 yüzlü bir zarın atılması deneyinde tek sayı geldiği bilindiğine göre bu sayının 5 olma olasılığı nedir?

ÇÖZÜM ⇨ Bir zarın atılması deneyinde örneklem uzay,



Ö={ 1, 2, 3, 4, 5, 6 }, s(Ö)= 6

A= { tek sayının gelmesi }= { 1, 3, 5 }, s(A)=3

B= {5 sayısının gelmesi}={5}, s(B)=1

A∩B={tek sayının ve 5 sayısının gelmesi}={5}, s(A∩B)=1

Yukarıda sorulan soruyu iki farklı yolla çözeceğiz:

I.Yol:
Altı yüzlü bir zarın atılması deneyinde tek sayı geldiği bilindiğine göre bu bir koşuldur. O halde, "altı yüzlü bir zarın atılması deneyinde tek sayı geldiği bilindiğine göre bu sayının 5 olma olasılığı nedir?" sorusunu koşullu olasılıkla ilgili teoremden yararlanarak hesaplayalım:

s(A∩B) ve s(A) değerlerini aşağıda yerine koyalım:

$$P(B \setminus A) = \frac{s(A \cap B)}{s(A)}$$
$$= \frac{1}{3} tür.$$

II. Yol:

Yukarıda sorulan soruyu cevaplamak için B nin A ya bağlı koşullu olasılığı,

$$P(B \setminus \mathrm{A}) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad .... (*)$$

dan yararlanacağız.

Bunun için P(A∩B) ve P(A) değerlerini bulmamız gerekmektedir.

Zar atıldığında tek sayı ve 5 gelme olasılığı P(A∩B) yi hesaplamak için, aşağıda tanımı verilmiş olan olayın olma olasılığından yararlanacağız:

$$\text{İstenen durumun olma olasılığı} = \frac{\text{istenen durum sayısı}}{\text{mümkün olan tüm durumların sayısı}} \quad (**)$$

$$P(A \cap B) = \frac{\text{zar atıldığında tek sayının } \underline{\text{ve}} \text{ 5 sayısının gelmesi}}{\text{zar atıldığında elde edilecek tüm durumların sayısı}}$$
$$= \frac{s(A \cap B)}{s(\ddot{O})}$$
$$= \frac{1}{6} \text{ dır.}$$

Zar atıldığında tek sayının gelme olasılığı P(A) yı bulalım:

$$\mathrm{P(A)} = \frac{\text{zar atıldığında tek sayının gelme sayısı}}{\text{zar atıldığında elde edilecek tüm durumların sayısı}} \leftarrow \text{(** kullanıldı.)}$$
$$= \frac{s(A)}{s(\ddot{O})}$$

$= \frac{3}{6}$ dır.

Bulduğumuz $P(A \cap B)$ ve $P(A)$ değerlerini (*) da yerlerine koyalım:

$$P(B \setminus A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

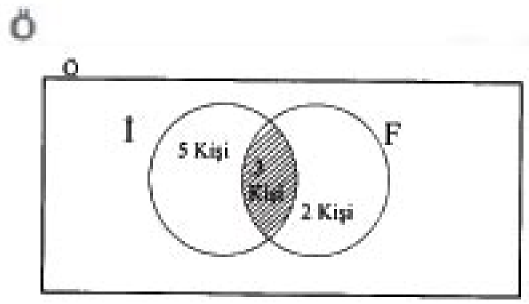
$$= \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{3} = \frac{1}{3} \text{ tür.}$$

ÖRNEK 46 ⇒ On öğretim elemanından oluşan bir grup, Paris ve Londra'da yapılacak olan uluslararası konferanslara katılacaklardır. Bu gruptan 5 kişi sadece İngilizce, 2 kişi sadece Fransızca, 3 kişi hem İngilizce hem Fransızca bilmektedir. Bu gruptan rastgele seçilen bir kişi İngilizce bildiğine göre bu kişinin Fransızcayı da bilen biri olma olasılığı nedir?

ÇÖZÜM ⇒ Yukarıda sorulan soruda seçilen kişinin İngilizce bildiği söylendiğine göre bu bir koşuldur. O halde, soru koşullu olasılıkla ilgilidir.

Yukarıda verilen olayları Venn şeması ile gösterelim:



Ö={ öğretim elemanları }, s(Ö)=10

İ= {İngilizce bilen öğretim elemanı}, s(İ)= 8

F= {Fransızca bilen öğretim elemanı }, s(F)= 5

$İ \cap F$ ={İngilizce ve Fransızca bilen öğretim elemanı}, s(İ ∩ F) = 3

Yukarıdaki soruyu iki farklı yolla çözeceğiz:

I.Yol:
F olayının, $\dot{I}$ ye bağlı koşullu olasılığı,

$$P(F \setminus \dot{I}) = \frac{s(\dot{I} \cap F)}{s(\dot{I})}$$

$$= \frac{3}{8} \ olur.$$

II. Yol:
Yukarıda sorulan soruyu cevaplamak için F nin $\dot{I}$ ye bağlı koşullu olasılığı,

$$P(F \setminus \dot{I}) = \frac{P(\dot{I} \cap F)}{P(\dot{I})} \quad .... (*)$$

den yararlanacağız.

Bunun için $P(F \cap \dot{I})$ ve $P(\dot{I})$ değerlerini bulmamız gerekmektedir.

Seçilen kişinin İngilizce <u>ve</u> Fransızca bilen öğretim elemanı olma olasılığı $P(\dot{I} \cap F)$ yi hesaplamak için, aşağıda tanımı verilmiş olan olayın olma olasılığından yararlanalım:

$$\text{İstenen durumun olma olasılığı} = \frac{\text{istenen durum sayısı}}{\text{mümkün olan tüm durumların sayısı}} \quad (**)$$

$$P(\dot{I} \cap F) = \frac{\text{İngilizce } \underline{\text{ve}} \text{ Fransızca bilen öğretim elemanı}}{\text{toplam öğretim elemanı}}$$

$$= \frac{s(\dot{I} \cap F)}{s(\ddot{O})}$$

$$= \frac{3}{10} \ \text{dur.}$$

Seçilen kişinin İngilizce bilen öğretim elemanı olma olasılığı $P(\dot{I})$ yi bulalım:

$$P(\dot{I}) = \frac{\text{İngilizce bilen öğretim elemanı}}{\text{toplam öğretim elemanı}} \quad \leftarrow \text{(** kullanıldı.)}$$

$$= \frac{s(\dot{I})}{s(\ddot{O})}$$

$$= \frac{8}{10} \text{ dur.}$$

$P(F \setminus \dot{I})$ yi hesaplamak için bulduğumuz $P(\dot{I} \cap F)$ ve $P(\dot{I})$ değerlerini (*) da yerlerine koyalım:

$$P(F \setminus \dot{I}) = \frac{P(\dot{I} \cap F)}{P(\dot{I})}$$

$$= \frac{\frac{3}{10}}{\frac{8}{10}}$$

$$= \frac{3}{10} \cdot \frac{10}{8} = \frac{3}{8} \text{ dir.}$$

ÖRNEK 47 ⇨ Bir sınıfta 10 kız ve 8 erkek öğrenci vardır. Kızların 5 i erkeklerin 4 ü matematikten başarılıdır. Bu sınıftan rastgele seçilen 3 öğrenciden 3ünün de matematikten başarılı olduğu bilindiğine göre, üçünün de kız olma olasılığı nedir?

ÇÖZÜM ⇨ A={ matematikte başarılı öğrencilerden oluşan 3 lüler}

B= { kız öğrencilerden oluşan 3 lü}

$A \cap B =$ {matematikte başarılı olan ve kız öğrencilerden oluşan 3 lü}

Matematikte toplam 5+4=9 öğrenci başarılıdır.

Matematikte başarılı öğrencilerden oluşan 3 lülerin sayısı,

$$s(A) = C(9,3) = \frac{9!}{(9-3)! \cdot 3!} = \frac{9!}{6! \cdot 3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6! 3 \cdot 2 \cdot 1} = 3 \cdot 4 \cdot 7 = 84 \;\; \textit{tür.}$$

Matematikte başarılı olan öğrencilerden 5 i kızdır.

Matematikte başarılı olan ve kız öğrencilerden oluşan 3 lülerin sayısı,

$$s\,(A\cap B)=C(5,3)=\frac{5!}{(5-3)!\cdot 3\,!}=\frac{5\,!}{2\,!\cdot 3\,!}=\frac{5\cdot 4\cdot 3\,!}{2\cdot 1\cdot 3\,!}=10\ \text{dur.}$$

P(B \ A) yı hesaplamak için koşullu olasılıkla ilgili teoremden,

$$P(B\backslash A)=\frac{s(A\cap B)}{s(A)} \qquad (*)$$

yararlanalım:

Bulduğumuz s(A∩B) ve s(A) değerlerini (*) da yerine koyalım:

$$P(B\setminus A)=\frac{s\,(A\cap B)}{s\,(A)}$$

$$=\frac{10}{84}=\frac{5}{42}\ dir. \qquad \leftarrow \text{(Pay ve paydayı 2 ile bölme)}$$

ALIŞTIRMA 13 ⇨Aşağıdaki alıştırmaları yapınız:

(A) Örnek 47 deki soruyu *B* nin *A* ya bağlı koşulluğu olasılığı,

$$P(B\setminus \mathrm{A})=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

dan yararlanarak çözünüz.

(B) 1 den 7 ye kadar numaralandırılmış, aynı özellikte 6 topun bulunduğu bir torbadan rastgele 1 top çekiliyor. Çekilen topun üzerindeki numaranın tek sayı olduğu bilindiğine göre, asal sayı olma olasılığı nedir?" sorusunu iki farklı yolla çözünüz.

◆ BAĞIMSIZ OLAYIN ve BAĞIMLI OLAYIN OLMA OLASILIĞI

Bu bölümde bağımsız olayın ve bağımlı olayın olma olasılığının hesaplanması örneklerle açıklanacaktır.

Bağımsız Olayın Olma Olasılığı

Bağımsız olayın tanımını hatırlayalım:

"Bir olayın olma olasılığı diğer olayın olma olasılığını etkilemiyorsa, bu iki olay birbirinden bağımsızdır. Bu iki olay, bağımsız olay olarak isimlendirilir.

$P(B \setminus A) = P(B)$ veya $P(A \setminus B) = P(A)$ ise A ile B bağımsız olaydır."

Teorem: A ve B olayları bağımsız olay ise, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ dir.

İspat:

Koşullu olasılıkta,

$$P(A \setminus B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

olduğuna göre,

$$P(A \cap B) = P(A \setminus B) \cdot P(B) \text{ dir.}$$

A ve B olayları bağımsız olay olduğundan,

$$P(A \setminus B) = P(A) \text{ dır.}$$

O halde,

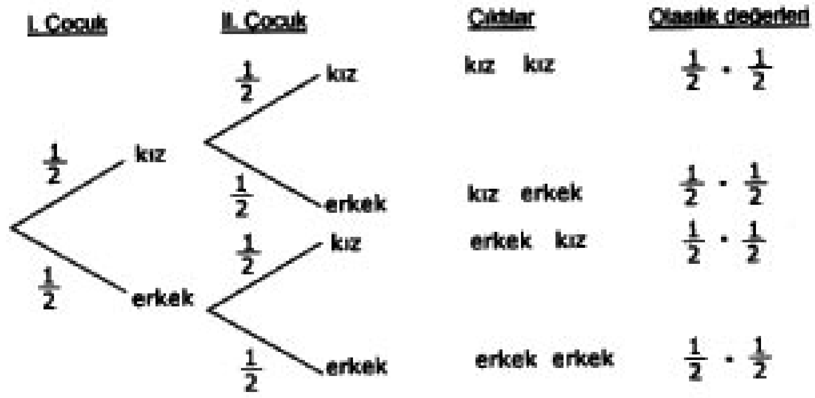
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \text{ olur. } ✓$$

ÖRNEK 48 ⇨ Seçil ile Betül yıllar sonra tesadüfen park yerinde karşılaşmışlardır. Seçil sohbet sırasında Betül'ün evlendiğini ve 2 çocuğunun olduğunu öğrenmiştir.
(A) Bu iki çocuğun kız olma olasılığı nedir?
(B) Büyük çocuğun kız, küçüğün erkek olma olasılığı nedir?
(C) İki çocuktan birinin kız diğerinin erkek olma olasılığı nedir?

ÇÖZÜM ⇨ **(A)** Yukarıda sorulan "iki çocuğun kız olma olasılığı nedir?" sorusunu iki farklı yolla çözeceğiz:

I.Yol:

Ağaç şeması kullanarak çözelim:



Ağaç şeması incelendiğinde, iki çocuğun kız olma olasılığı,

$$P(kız, kız) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \text{ tür.}$$

II.Yol:

Bağımsız olayın olma olasılığı ile ilgili teoremden yararlanarak çözelim.

Büyük çocuğun kız olması, küçük çocuğun kız olmasını etkilemediği için bu olaylar bağımsız olaydır. Bir olayın olma olasılığı, diğerinin olma olasılığını etkilememektedir.

A= { büyük çocuğun kız olması}, $P(A)=\frac{1}{2}$

B= { küçük çocuğun kız olması}, $P(B)=\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) \cdot P(B) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4} \text{ tür.} \end{aligned}$$

(B) Yukarıda sorulan "büyük çocuğun kız, küçüğün erkek olma olasılığı nedir?" sorusunu iki farklı yolla çözeceğiz:

I.Yol:

Ağaç şeması incelendiğinde, büyük çocuğun kız, küçüğün erkek olma olasılığı,

$$P(\text{kız, erkek}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \text{ tür.}$$

II.Yol:

Bağımsız olayın olma olasılığı ile ilgili teoremden yararlanarak çözelim.

B={ büyük çocuğun kız olması}, $P(B)=\frac{1}{2}$

K= {küçük çocuğun erkek olması}, $P(K)=\frac{1}{2}$

B ve K olaylarının olma olasılığı birbirinden etkilenmediği için bu olaylar bağımsız olaydır. Büyük çocuğun kız, küçük çocuğun erkek olma olasılığını $P(B\cap K)$ ile gösterelim.

$$\begin{aligned} P(B\cap K) &= P(B)\cdot P(K) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4} \text{ tür.} \end{aligned}$$

(C) Yukarıda sorulan "iki çocuktan birinin kız diğerinin erkek olma olasılığı nedir?" sorusunu iki farklı yolla çözeceğiz.

I.Yol:
Yukarıda sorulan soruyu ağaç şemasını kullanarak çözelim:

İki çocuktan birinin kız diğerinin erkek olması durumu şu şekilde olabilir: Büyük çocuğun kız, küçük çocuğun erkek olması (*kız*, *erkek*); Büyük çocuğun erkek, küçük çocuğun kız olması (*erkek*, *kız*).

P(F) = P(*kız*, *erkek*)+P(*erkek*, *kız*)

=P(*kız*) · P(*erkek*)+ P(*erkek*) · P(*kız*)

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2} \text{ dir.}$$

II. Yol:
İki çocuktan birinin kız diğerinin erkek olması durumu şu şekilde olabilir: Büyük çocuğun kız ve küçük çocuğun erkek olması; büyük çocuğun erkek ve küçük çocuğun kız olması.

H= {büyük çocuğun kız olması}
M= {küçük çocuğun erkek olması}

N= { büyük çocuğun erkek olması}
O= { küçük çocuğun kız olması}

$$P(T) = P(H \cap M) + P(N \cap O)$$

$$= P(H) \cdot P(M) + P(N) \cdot P(O)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ dir.}$$

ÖRNEK 49 ⇨ Sevgi, değerli evraklarını saklamak için bir şifreli kasa almıştır. Şifre, üç rakamdan oluşmaktadır. Sevgi şifresini oluşturmak için 0, 1, 2, 3, 4 rakamlarını birden fazla kullanmıştır. Bu şifrenin başka bir kişi tarafından tahmin edilme olasılığı nedir?

ÇÖZÜM ⇨ Bu soruda 3 farklı olay vardır ve bunlar bağımsız olaydır. Çünkü seçilen bir rakam tekrar seçilebilmektedir. Başka bir deyişle, aynı rakam birden fazla kullanılabilmektedir. Sonuç olarak, bir olayın olma olasılığı diğer olayların olma olasılıklarını <u>etkilememektedir</u>. O halde, bu şifrenin başka bir kişi tarafından tahmin edilme olasılığı,

$$P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = P(R_1) \cdot P(R_2) \cdot P(R_3)$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}$$

$$= \frac{1}{125} \text{ tir.}$$

ÖRNEK 50 ⇨ 4 beyaz 3 mavi bilye bir kutunun içine konulmuştur. Bir bilye rastgele çekildikten sonra bu bilyenin rengi bir kağıda not edilmiştir. İkinci bilye çekilmeden önce ilk çekilen bilye tekrar kutuya konulmuştur. Bu işlem sonucunda, çekilen her iki bilyenin aynı renkli olma olasılığı nedir?

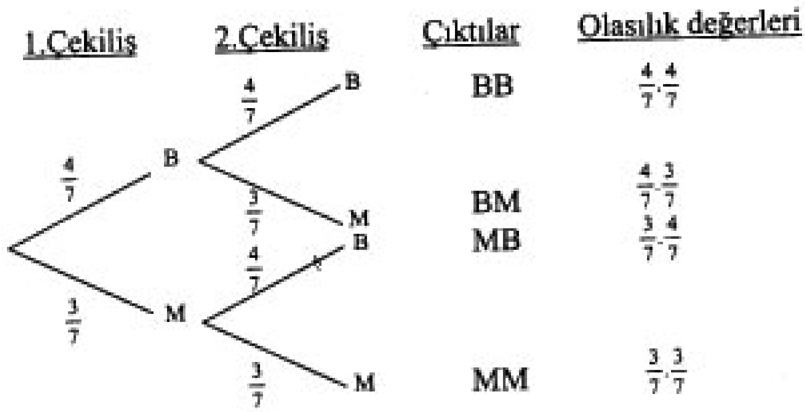
ÇÖZÜM ⇨ B={beyaz bilye}, s(B)=4

M={mavi bilye}, s(M)=3

s(Ö) = s(B)+s(M)

= 4 + 3 = 7 dir.

Ağaç şeması kullanarak soruyu çözelim:



Birinci çekilişte beyaz bilyenin çekilme olasılığı $\frac{4}{7}$ dir.

Birinci çekilişte beyaz bilyenin, ikinci çekilişte de beyaz bilyenin çekilme olasılığı,

$$P(BB)=\frac{4}{7}\cdot\frac{4}{7}=\frac{16}{49} \text{ dur.}$$

Not: İkinci çekilişteki toplam bilye sayısı ve beyaz bilye sayısı değişmemiştir. Çünkü birinci çekilişte çekilen bilye tekrar kutuya konulmuştur.

Birinci çekilişte mavi bilyenin çekilme olasılığı $\frac{3}{7}$ dir.

Birinci çekilişte mavi bilyenin, ikinci çekilişte de mavi bilyenin çekilme olasılığı,

$$P(MM)=\frac{3}{7}\cdot\frac{3}{7}=\frac{9}{49} \text{ dur.}$$

O halde, iki çekiliş sonucunda aynı renkli bilyenin çekilme olasılığı,

$$P(T) = P(BB) + P(MM)$$

$$=\frac{16}{49}+\frac{9}{49}$$

$$=\frac{25}{49} \text{dur.}$$

ÖRNEK 51 ➾ Bir araştırma merkezinde psikolojik tedavi için bir ilaç geliştirilmiştir. Araştırmacının söylediğine göre ilaç %90 etkilidir. Bu ilacın 8 farklı hasta üzerinde başarılı olma olasılığı nedir?

ÇÖZÜM ⇒ İlacın 8 farklı hasta üzerinde denenmesi demek burada birbirinden farklı ve bağımsız 8 olay var demektir. Bu 8 olay bağımsız olaydır. O halde, 8 hasta üzerinde başarılı olma olasılığı:

$$P(A)=0{,}90\cdot 0{,}90\cdot 0{,}90\cdot 0{,}90\cdot 0{,}90\cdot 0{,}90\cdot 0{,}90\cdot 0{,}90$$
$$=0{,}43046721 \text{ dir.}$$

ALIŞTIRMA 14 ⇒ Beş kırmızı ve dört yeşil top bir torbaya konulmuştur. Bir top rastgele çekildikten sonra bu topun rengi bir kağıda not edilmiştir. İkinci top çekilmeden önce ilk çekilen top tekrar torbaya konulmuştur. Bu işlem sonucunda, çekilen topların farklı renkli olma olasılığı nedir?

Bağımlı Olayın Olma Olasılığı

Bağımlı olayın tanımını hatırlayalım:
"Bir olayın olma olasılığı diğer olayın olma olasılığını <u>etkiliyorsa</u>, bu iki olay bağımlı olay olarak isimlendirilir.

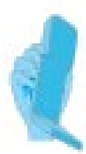
$P(B \setminus A) \neq P(B)$ veya $P(A \setminus B) \neq P(A)$ ise A ve B olayları bağımlı olaydır."

Teorem: A olayının olma olasılığı, B olayının olma olasılığını etkiliyorsa bu iki olayın olma olasılığı, A olayının ve B olayının olma olasılıklarının çarpımına eşittir.

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B\setminus A)$$

ÖRNEK 52 ⇒ Bir eğlence programında hediye çekilişi yapılacaktır. Bunun için aynı özelliklere sahip 20 kartın üzerine birer tane hediye ismi yazılmıştır. Hediyeler; 7 kitap, 6 kalem, 4 tenis raketi, 2 voleybol topu ve 1 cep telefonudur. İki çekiliş yapılacaktır. Birinci çekilişte cep telefonunun ikinci çekilişte tenis raketinin çıkma olasılığı nedir?

ÇÖZÜM ⇒ Yukarıda istenen olayları yazalım:



C={birinci çekilişte cep telefonunun çıkması}
R={ikinci çekilişte tenis raketinin çıkması}

C ve R olayları bağımlı olaydır çünkü birinci çekilişteki hediye sayısı 20 iken ikinci çekilişteki hediye sayısı bir eksilerek 19 olmaktadır. Bu da ikinci çekilişteki hediyenin çekilme olasılığını etkilemektedir. O halde, birinci çekilişte cep telefonunun ikinci çekilişte tenis raketinin çıkma olasılığı, $P(C\cap R)$ yi

$$P(C\cap R)=P(C)\cdot P(R\setminus C) \quad \ldots(*)$$

den yararlanarak hesaplayacağız.

Birinci çekilişte cep telefonunun çıkma olasılığı P (C) yi hesaplayalım:

$\ddot{O}_1$={birinci çekilişteki hediyeler}, s ($\ddot{O}_1$)=20

C={birinci çekilişte cep telefonunun çıkması}, s(C)=1

P(C) yi hesaplamak için aşağıda verilmiş olan olasılığın tanımından yararlanalım:

$$\text{İstenen durumun olma olasılığı} = \frac{\text{istenen durum sayısı}}{\text{mümkün olan tüm durumların sayısı}} \quad (**)$$

$$P(C) = \frac{\text{cep telefonu sayısı}}{\text{birinci çekilişteki hediye sayısı}}$$

$$= \frac{s(C)}{s(\ddot{O}_1)}$$

$$= \frac{1}{20} \text{ dir.}$$

İkinci çekilişte tenis raketinin çıkma olasılığı P(R\C) yi hesaplayalım:

$\ddot{O}_2$={ikinci çekilişteki hediyeler}, s($\ddot{O}_2$)=19

R={ikinci çekilişte tenis raketinin çıkması}, s(R)=4

$$P(R \backslash C) = \frac{\text{tenis raketi sayısı}}{\text{ikinci çekilişteki hediye sayısı}}$$

$$= \frac{s(R)}{s(\ddot{O}_2)}$$

$$= \frac{4}{19} \text{ dur.}$$

P(C∩R) yi hesaplamak için bulduğumuz değerleri (*) da yerlerine koyalım:

$$\begin{aligned} P(C \cap R) &= P(C) \cdot P(R \setminus C) \\ &= \frac{1}{20} \cdot \frac{4}{19} \\ &= \frac{4}{380} \\ &= \frac{1}{95} \text{ tir.} \end{aligned}$$

←(Pay ve paydayı 4 ile bölme)

ÖRNEK 53 ➯ Yasemin değerli evraklarını ve mücevherlerini saklamak için bir şifreli kasa almıştır. Şifre, üç rakamdan oluşmaktadır.Yasemin şifresini oluştururken, 0, 1, 2, 3, 4 rakamlarından 3 farklı rakamı kullanarak kendine şifre oluşturmuştur. Bu şifrenin başka bir kişi tarafından tahmin edilme olasılığı nedir?

ÇÖZÜM ➯ Bu soruda 3 farklı olay vardır. Her bir rakam seçiminde rakamlar tekrar seçilememektedir. Böylece kümede kullanılan toplam rakam sayısı her bir çekilişte bir azalarak olayların olma olasılıkları birbirini etkilemektedir. Bu nedenle, soruda istenen durumların gerçekleşmesi halinde Yaseminin kasasının şifresinin tahmin edilme olasılığını $P(R_1 \cap R_2 \cap R_3)$ yi şu şekilde hesaplayabiliriz.

$$P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{60} \text{ tır.}$$

ÖRNEK 54 ➯ Bir torbada aynı özelliklere sahip 2 yeşil, 3 mavi ve 4 kırmızı top bulunmaktadır. Torbadan rastgele 3 top çekiliyor.

(A) Çekilen üç topun sırasıyla yeşil, mavi ve kırmızı renkli olma olasılığı nedir?

(B) Çekilen üç topun farklı renklerde olma olasılığı nedir?

ÇÖZÜM ➯ $Ö_1$={birinci çekilişteki torbadaki toplar}, s $(Ö_1)=9$

$Ö_2$={ikinci çekilişteki torbadaki toplar}, s $(Ö_2)=8$

$Ö_3$={üçüncü çekilişteki torbadaki toplar}, s $(Ö_3)=7$

Y={birinci çekilişte yeşil topun çekilmesi}, s $(Y)=2$

M={ikinci çekilişte mavi topun çekilmesi}, s $(M)=3$

K={üçüncü çekilişte kırmızı topun çekilmesi}, s $(K)=4$

(A) Birinci topun yeşil, ikinci topun mavi, üçüncü topun kırmızı çekilme olasılığı,

$$P(Y \cap M \cap K) = \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{24}{504} = \frac{1}{21} \text{ dir.}$$

(B) Çekilen üç topun farklı renklerde olma durumları 6=3! tanedir:

(Y, M, K), (Y, K, M), (M,Y, K), (M, K, Y), (K, Y, M) ve (K,M,Y) dir.

Görüldüğü üzere çekilen topların renkleri farklı sırada olabileceğinden,

3 topun farklı renkte olma olasılığı, $\frac{2}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{7}$ çarpımının 3!=6 katı olur.

Buna göre üç topun farklı renkte olma olasılığı,

$$\text{P(T)} = \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot 3! = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot}{9 \cdot 8 \cdot 7} \cdot 6 = \frac{2}{7} \text{ dir.}$$

ÖRNEK 55 ⇨ 12 kişiden oluşan bir grup kendi aralarında futbol oynamaktadır. Maç berabere biterse karşılıklı 3 penaltı atacaklardır. Hasan, Ayhan, Esin, Oya, Soner ve Ali'den oluşan "Kelebek" isimli takımdaki çocuklar kimin penaltı atacağına karar veremeyince kendi aralarında kura çekmeye karar verirler. Kura sonucunda seçilen kişiler, sadece bir kez penaltı kullanacaktır.

(A) "Kelebek" takımı adına birinci penaltıyı Hasan'ın, ikinci penaltıyı Soner'in ve üçüncü penaltıyı Ali'nin atma olasılığı nedir? (Not: H:Hasan, S:Soner, A:Ali)

(B) "Kelebek" takımı adına üç penaltının Hasan, Soner ve Ali tarafından atılması olasılığı nedir?

ÇÖZÜM ⇨ **(A)** Sorudaki olayları tanımlayalım:

H={Hasan'ın penaltıyı atması}

S={Soner'in penaltıyı atması}

A={Ali'nin penaltıyı atması}

H, S ve A olayları bağımlı olaydır.Örneğin, ilk kuradaki kişi sayısı 6 iken, bir sonraki çekilişte kişi sayısı 5, son çekilişte ise 4 olmaktadır.

$$P(H \cap S \cap A) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{120} \text{ dir.}$$

(B) Bir önceki soru ile bu sorunun birbirinden farkı ilk soruda penaltıyı kimin hangi sırada atacağı belli iken bu seçenekteki soruda belli bir sıra yoktur. Başka bir deyişle, penaltılar (H,S,A), (H,A,S), (A,H,S), (A,S,H), (S,A,H), (S,H,A) olmak üzere 6=3! biçimde atılabilir. "Kelebek" takımı adına üç penaltının Hasan, Soner ve Ali tarafından atılma olasılığını P(R) ile gösterelim:

$$P(R) = P(H \cap S \cap A) + P(H \cap A \cap S) + P(A \cap H \cap S) + P(A \cap S \cap H) + P(S \cap A \cap H) + P(S \cap H \cap A)$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}$$

$$= 6\cdot\left(\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}\right) = \frac{6}{120} = \frac{1}{20} \text{ dir.}$$

veya

$$P(R) = 3!\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4} = \frac{6}{120} = \frac{1}{20} \ dir.$$

ÖRNEK 56 ⇨ Bir yüksek lisans öğrencisi veri toplamak amacıyla 8 bay 16 bayan arasından rastgele 3 kişi seçecektir. Bu seçilen kişilerin tümünün bayan olma olasılığı nedir?

ÇÖZÜM ⇨ 3 kişinin seçilme olayları bağımlı olaydır. Bir kişi seçildikten sonra geriye kalan kişi sayısı bir azalmaktadır. Bu işlem, üç kez yapılmaktadır. Başka bir deyişle, bir olayın olma olasılığı diğerlerinin olma olasılığını etkilemektedir.

$Ö_1$={birinci seçimdeki kişiler}, s ($Ö_1$)=24

$Ö_2$={ikinci seçimdeki kişi}, s ($Ö_2$)=23

$Ö_3$={üçüncü seçimdeki kişi}, s ($Ö_3$)=22

A={birinci seçimdeki kişinin bayan olması}, s (A)=16

B={ikinci seçimdeki kişinin bayan olması}, s (B)=15

C={üçüncü seçimdeki kişinin bayan olması}, s (C)=14

Seçilen kişilerin tümünün bayan olma olasılığı,

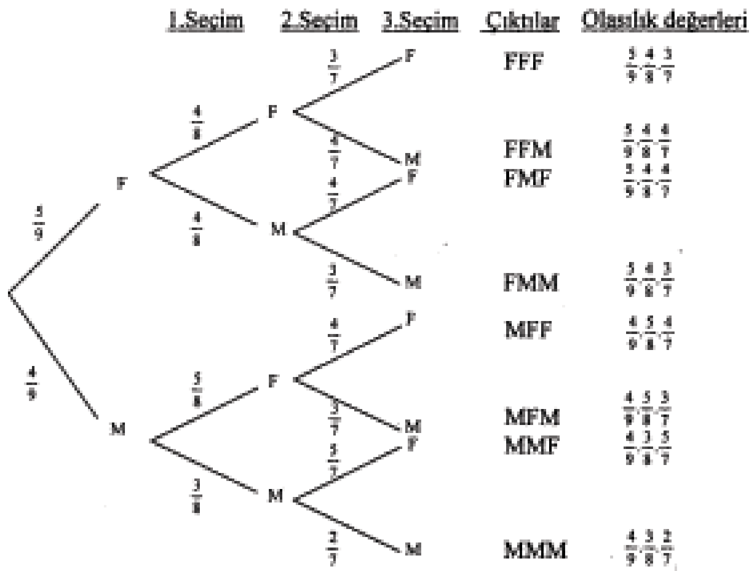
$$P(A \cap B \cap C) = \frac{16}{24}\cdot\frac{15}{23}\cdot\frac{14}{22}$$

$$= \frac{3360}{12144} = \frac{70}{253} \approx 0,277 \text{ dir.}$$ ←(Pay ve paydayı 48 ile bölme)

ÖRNEK 57 ⇨ Feza Gürsey Bilim Merkezine bir gezi düzenlenmiştir. Bu gezi için 5 fizik, 4 matematik öğretmeni arasından 3 öğretmen rastgele seçilerek görevlendirilecektir. Seçilen grupta 2 matematik öğretmeni bulunma olasılığı nedir?

ÇÖZÜM ⇨ Yukarıda sorulan soruyu iki farklı yolla çözeceğiz:

I.Yol:
Soruyu çözmek için ağaç şeması çizelim:



$$P(A)=P(FMM)+P(MFM)+P(MMF)$$

$$=\left[\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}\right]+\left[\frac{4}{9}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7}\right]+\left[\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}\right]$$

$$=\frac{60}{504}+\frac{60}{504}+\frac{60}{504}$$

$$=\frac{180}{504}=\frac{5}{14} \text{ tür.}$$ ←(Pay ve paydayı 36 ile bölme)

II. Yol:
Tekrarlı permütasyon kullanarak hesaplayalım:

$$\begin{array}{ccc} M & M & F \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$$\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{3!}{2!\cdot 1!}=\frac{360}{1008}=\frac{5}{14} \text{ tür.}$$ ←(Pay ve paydayı 72 ile bölme)

ÖRNEK 58 ⇒ Bir şirketin yönetim kurulunda 3 erkek ve 5 kadın üye vardır. Yönetim kurulunun üyeleri arasında çeşitli alanlarda çalışacak 4 er kişilik komiteler kurulacaktır. Bu komitelerin birinde 2 erkek 2 kadın bulunması olasılığı nedir?

ÇÖZÜM ⇒ Olasılığın tanımını kulanarak yukarıda sorulan soruyu çözelim:

$$\text{İstenen durumun olma olasılığı} = \frac{\text{istenen durum sayısı}}{\text{mümkün olan tüm durumların sayısı}}$$

İstenen durum sayısını ve mümkün olan tüm durumların sayısını bulmak için kombinasyondan yararlanacağız.

İstenen Durum:

3 erkekten 2 si ve 5 kadından 2 si alınarak oluşturulabilcek 4 er kişilik komisyonların sayısı $C(3,2)\cdot C(5,2)$ dir.

$$C(3,2)= \frac{3!}{(3-2)!\cdot 2!} = \frac{3\cdot 2!}{1!\cdot 2!} = 3 \text{ tür.} \qquad \leftarrow \left(C(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!\cdot r!} \right)$$

$$C(5,2)= \frac{5!}{(5-2)!\cdot 2!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3!}{3!\cdot 2} = 10 \text{ dur.}$$

Mümkün Olan Tüm Durumlar:

3 erkek ve 5 kadın arasından oluşturulacak 4 er kişilik komisyonların sayısı,

$$C(8,4) = \frac{8!}{(8-4)!\cdot 4!}$$

$$= \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!}{4!\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 2\cdot 7\cdot 5 = 70 \text{ tir.}$$

O halde, oluşturulacak komitelerin birinde 2 erkek ve 2 kadın bulunması olasılığı,

$$P(2\ erkek, 2\ kadın) = \frac{C(3,2)\cdot C(5,2)}{C(8,4)} = \frac{3\cdot 10}{70} = \frac{3}{7} \text{ dir.}$$

ALIŞTIRMA 15 ⇨ Aşağıdaki alıştırmaları yapınız:

(A) Bir sınıfta 20 kız ve 10 erkek öğrenci vardır. Matematik dersinde öğretmen üç öğrenciyi ödev sorularını çözmeleri için rastgele tahtaya kaldıracaktır. Bu öğrencilerin üçünün de kız olma olasılığı nedir?

(B) Bir torbaya 5 kırmızı 4 yeşil top konulmuştur. Bir top rastgele çekildikten sonra bu topun rengi bir kağıda not edilmiştir. Çekilen top tekrar yerine konulmadan ikinci top çekilmiştir. Bu işlem sonucunda birinci topun yeşil ikinci topun kırmızı olma olasılığı nedir?

(C) "Bir yüksek lisans öğrencisi veri toplamak amacıyla 8 bay 16 bayan arasından rastgele 3 kişi seçecektir. Bu seçilen kişilerin tümünün bayan olma olasılığı nedir?" sorusunda örneklem uzayın ve istenen olayın eleman sayısını kombinasyondan yararlanarak bulduktan sonra istenen olayın olma olasılığını hesaplayınız.

Genel Örnek

ÖRNEK 59 ⇨ 20 kişilik sınıfta öğrencilerin çeşitli konuda tercihlerini saptamak amacıyla bir anket yapılmıştır. Sorulardan biri öğrencilerin boş zamanlarını değerlendirmeleri ile ilgilidir. Boş zamanlarında 10 öğrenci yalnız kitap okuyor, 5 öğrenci yalnız oyun oynuyor, 2 öğrenci sinemaya gidiyor, 3 öğrenci hem kitap okuyor hem de oyun oynuyor. Bu sınıftan rastgele seçilen bir öğrencinin:

(A) Yalnız kitap okuyan bir öğrenci olma olasılığı nedir?

(B) Hem kitap okuyan hem de oyun oynayan öğrenci olma olasılığı nedir?

(C) Oyun oynadığı bilindiğine göre, kitap okuyan bir öğrenci olma olasılığı nedir?

(D) Kitap okuyan veya oyun oynayan bir öğrenci olma olasılığı nedir?

ÇÖZÜM ⇨ **(A)** Ö={ankete yanıt veren öğrenciler}, s(Ö)=20

K={yalnız kitap okuyan öğrenci}, s(K)=10

Yukarıdaki soruda sorulan kitap okuyan bir öğrenci olma olasılığını aşağıda tanımı verilmiş olan olayın olma olasılığından yararlanarak hesaplayalım:

$$\text{İstenen durumun olma olasılığı} = \frac{\text{istenen durum sayısı}}{\text{mümkün olan tüm durumların sayısı}} \quad (*)$$

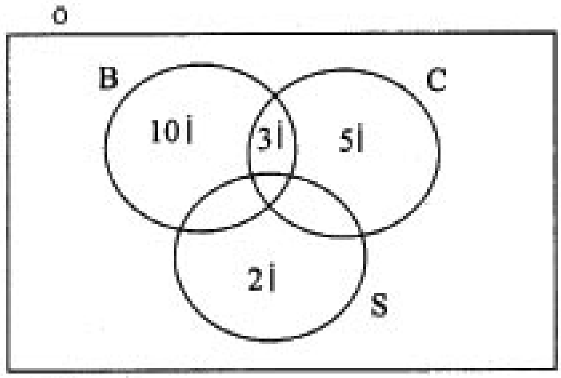
$$P(K) = \frac{\text{yalnız kitap okuyan öğrenci sayısı}}{\text{ankete yanıt veren öğrenci sayısı}}$$

$$= \frac{s(K)}{s(\ddot{O})}$$

$$= \frac{10}{20}$$

$$= \frac{1}{2} \quad dir.$$

(B) Soruda verilen olayları Venn şeması kullanarak gösterelim:



İ:Öğrenci

Ö={ankete yanıt veren öğrenciler}, s(Ö) = 20

B={kitap okuyan öğrenci}, s(B)=10+3=13

C={ oyun oynayan öğrenci}, s(C) = 5 + 3 = 8

S= {sinemaya giden öğrenci}, s(S)=2

$B \cap C$ = { kitap okuyan ve oyun oynayan öğrenci}, $s(B \cap C) = 3$

Kitap okuyan ve oyun oynayan öğrenciyi seçme olasılığı $P(B \cap C)$ yi aşağıda verilmiş olan olasılığın tanımından yararlanarak hesaplayalım:

$$\text{İstenen durumun olma olasılığı} = \frac{\text{istenen durum sayısı}}{\text{mümkün olan tüm durumların sayısı}} \quad (*)$$

$$P(B \cap C) = \frac{\text{kitap okuyan } \underline{\text{ve}} \text{ oyun oynayan öğrenci sayısı}}{\text{ankete yanıt veren öğrenci sayısı}}$$

$$= \frac{s\,(B \cap C)}{s\,(\ddot{O})}$$

$$= \frac{3}{20} \quad dir.$$

(C) Yukarıda sorulan soruda seçilen kişinin oyun oynadığı bilindiği belirtildiğine göre ortada bir koşul vardır. O halde hesaplayacağımız olasılık koşullu olasılıktır.

Yukarıda sorulan soruyu iki farklı yolla çözeceğiz:

I.Yol:
Koşullu olasılık sorusunu çözebilmek için,

$$P(B \setminus C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} \quad \ldots. (**)$$

kullanacağız.

Bunun için, $P(B \cap C)$ ve $P(C)$ değerlerini bulmamız gerekmektedir.

İkinci soruda $P(B \cap C) = \dfrac{3}{20}$ olarak bulunmuştu.

Yukarıda sorulan sorudaki olaylardan oyun oynayan öğrenci seçme olasılığı P(C) yi hesaplayalım:

$$P(C) = \frac{\text{oyun oynayan öğrenci sayısı}}{\text{ankete yanıt veren öğrenci sayısı}} \quad \leftarrow \text{(* kullanıldı.)}$$

$$= \frac{s\,(C)}{s\,(\ddot{O})}$$

$$= \frac{8}{20}$$

$$= \frac{2}{5} \quad tir.$$

Bulduğumuz $P(B \cap C)$ ve $P(C)$ değerlerini (**) da yerine koyalım:

$$P(B \setminus C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)}$$

$$= \frac{\frac{3}{20}}{\frac{2}{5}} = \frac{3}{20} \cdot \frac{5}{2} = \frac{3 \cdot 5}{20 \cdot 2} = \frac{3}{8} \text{ dir.}$$

II. Yol:
C={ oyun oynayan öğrenci}, $s(C) = 8$

$B \cap C$ = {kitap okuyan <u>ve</u> oyun oynayan öğrenci}, $s(B \cap C) = 3$

Koşullu olasılık sorusunu çözebilmek için koşullu olasılıkla ilgili teoremden yararlanacağız:

$$P(B \setminus C) = \frac{s(B \cap C)}{s(C)}$$
$$= \frac{3}{8} \text{ dir.}$$

(D) Ö={ ankete yanıt veren öğrenci}, s(Ö)=20

B={kitap okuyan öğrenci}, s (B)=13

C={oyun oynayan öğrenci}, s (C)=8

$B \cap C$ = {kitap okuyan <u>ve</u> oyun oynayan öğrenci}, $s(B \cap C)=3$

$B \cup C$ ={kitap okuyan <u>veya</u> oyun oynayan öğrenci},

$$s(B \cup C) = s(B) + s(C) - s(B \cap C)$$

$$=13+8-3$$

$$=18 \text{ dir.}$$

Yukarıdaki sorulan soruyu iki farklı yolla çözeceğiz:

I.Yol:
Yukarıda soruda sorulan kitap okuyan veya oyun oynayan öğrenciyi seçme olasılığı $P(B \cup C)$ yi aşağıda verilmiş olan olasılığın tanımından yararlanarak hesaplayalım:

$$\text{İstenen durumun olma olasılığı} = \frac{\text{istenen durum sayısı}}{\text{mümkün olan tüm durumların sayısı}} \quad (*)$$

$$P(B \cup C) = \frac{\text{kitap okuyan \underline{veya} oyun oynayan öğrenci sayısı}}{\text{ankete yanıt veren öğrenci sayısı}}$$

$$= \frac{s(B \cup C)}{s(\ddot{O})}$$

$$= \frac{18}{20}$$

$$= \frac{9}{10} \text{ dur.}$$ ← (Pay ve paydayı 2 ile bölme)

II. Yol:

B ve C olayları ayrık olmayan olaydır çünkü seçilen öğrenci aynı zamanda kitap okuyan ve oyun oynayan öğrenci olabilir. Başka bir deyişle B ve C olaylarının kesişimleri boş küme değildir.

Ayrık olmayan bu olayın olasılığı $P(B \cup C)$ yi bulurken,

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) \quad \ldots. \ (***)$$

den yararlanalım:

Daha önceki sorularda P(B), P (C) ve $P(B \cap C)$ değerlerini bulmuştuk.

Bu değerleri (***) da yerine koyalım:

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)$$

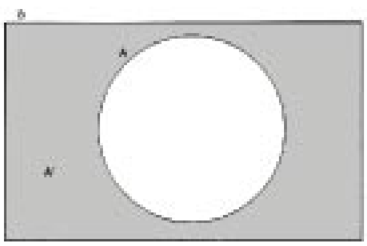
$$= \frac{13}{20} + \frac{8}{20} - \frac{3}{20}$$

$$= \frac{13 + 8 - 3}{20} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10} \text{ dur.}$$ ← (Pay ve payda 2 ile bölme)

◆ TÜMLEYEN OLAYIN OLMA OLASILIĞI

Bu bölümde tümleyen olayın tanımı ve olma olasılığı örneklerle açıklanacaktır.

> **Tümleyen Olayın Olma Olasılığı**
>
> A olayının tümleyeni, A olayında olmayan, deneyin tüm çıktılarından oluşmaktadır ve A' ile gösterilir.
>
> P(A')= 1 – P(A)   ve   P(A)= 1- P(A')



Venn şeması ile A ve A' nü gösterdik. Venn şemasını inceleyiniz.

Yukarıda verilen tanıma göre, A olayı ve A' olayı aynı zamanda gerçekleşemeyeceğinden, A ve A' olayları ayrık olaylardır. Ayrıca, A veya A' olaylarının gerçekleşmesi kesindir. Bu açıklamalara göre,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(A') = 1$$

O halde,

P(A')= 1 – P(A) ve P(A)= 1- P(A') dür.

ÖRNEK 60 ➪ Eğer A olayı bir hilesiz madenî para atıldığında yazı gelmesi ise A olayının tümleyeni olan A' olayı bu madenî paranın tura gelmesidir.

Deney: Bir hilesiz madenî paranın atılması.

Ö={T, Y}, s(Ö)=2

A={Yazı Gelmesi}={Y}, s(A)=1 $\Rightarrow$ A' ={Tura Gelmesi}={T}, s(A')=1

s(Ö) = s(A) +s (A')

2 = 1 + 1

2 = 2 ✓

ÖRNEK 61 ⇨ Serpil, bir arkadaşına doğum günü hediyesi alacaktır. Mağazada bulunan 2 kızıl saçlı, 3 sarı saçlı, 4 siyah saçlı bebek arasından rastgele bir tane bebek seçecektir. Siyah saçlı bebeği seçmeme olasılığı nedir?

ÇÖZÜM ⇨ Bu soruyu iki farklı yolla çözeceğiz.

I. Yol:

Ö = {mağazadan bebeğin seçilmesi}, s (Ö)=2+3+4=9

B = {siyah saçlı bebeğin seçilmesi}, s (B)=4,

B' = {siyah saçlı bebeğin seçilmemesi}

Siyah saçlı bebeğin seçilme olasılığı P(B) yi aşağıda verilmiş olan tanımdan yararlanarak hesaplayalım:

$$\text{İstenen durumun olma olasılığı} = \frac{\text{istenen durum sayısı}}{\text{mümkün olan tüm durumların sayısı}}$$

$$P(B) = \frac{\text{siyah bebeğin seçilme sayısı}}{\text{mağazadaki tüm bebek sayısı}}$$

$$= \frac{s(B)}{s(Ö)}$$

$$= \frac{4}{9} \text{ dur.}$$

O halde, siyah saçlı bebeğin seçilmeme olasılığı $P(B')$,

$$P(B) + P(B') = 1 \Rightarrow P(B') = 1 - P(B)$$

$$= 1 - \frac{4}{9}$$

$$= \frac{5}{9} \text{ dur.}$$

II. Yol:

Ö= {mağazadan bebeğin seçilmesi}, s (Ö)=9

Mağazada kızıl, sarı ve siyah saçlı olmak üzere üç farklı renkte bebek vardır. Eğer seçilen bebek siyah saçlı olmayacak ise, kızıl veya sarı saçlı olacaktır. O halde, kızıl veya sarı saçlı bebek sayısı, 2+3=5 tir. Kızıl saçlı veya sarı saçlı bebeğin seçilme olasılığı $P(K \cup S)$ yi aşağıda verilmiş olan olasılığın tanımından yararlanarak hesaplayalım:

$$\text{İstenen durumun olma olasılığı} = \frac{\text{istenen durum sayısı}}{\text{mümkün olan tüm durumların sayısı}}$$

$$P(K \cup S) = \frac{\text{kızıl saçlı veya sarı saçlı bebeğin seçilme sayısı}}{\text{mağazadaki tüm bebek sayısı}}$$

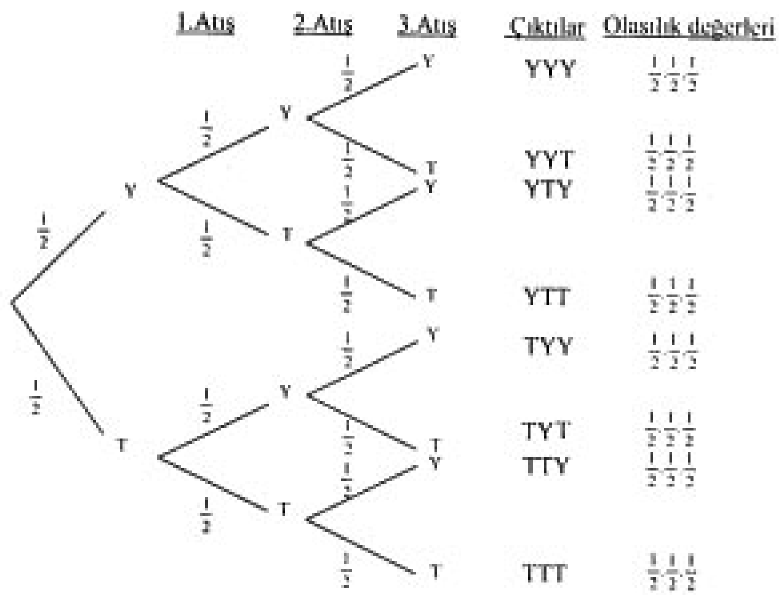
$$= \frac{s(K \cup S)}{s(Ö)}$$

$$= \frac{5}{9} \text{ dur.}$$

ÖRNEK 62 ⇒ Bir hilesiz madenî paranın 3 kez atılması sonucu en az bir atışın tura gelme olasılığı nedir?

ÇÖZÜM ⇒ Deney: Bir hilesiz madenî paranın 3 kez atılması.

Bu deneyin örneklem uzayını ağaç şeması ile gösterelim:



Ö={(Y,Y,Y), (Y,Y,T), (Y,T,Y), (Y,T,T), (T,Y,Y), (T,Y,T), (T,T,Y), (T,T,T)}, s(Ö)=8

İstenen olayı tanımlayalım:

A={en az bir atışta tura gelmesi}, s(A)=7
veya
A= { (Y,Y,T), (Y,T,Y), (Y,T,T), (T,Y,Y), (T,Y,T), (T,T,Y), (T,T,T)},

İstenen olayın tümleyen olayını tanımlayalım:

A' ={ hiç bir atışta tura gelmemesi}= {(Y,Y,Y)}, s(A')=1

$$s(\bar{O}) = s(A) + s(A')$$

$$8 = 7 + 1$$

$$8 = 8 \checkmark$$

Yukarıda sorulan soruyu üç farklı yolla çözeceğiz:

I.Yol:
3 atış birbirinden bağımsızdır. Çünkü bir atışın olma olasılığı diğer atışların olma olasılıklarını etkilememektedir.

Eğer bu 3 atışı ayrı 3 olay olarak düşünüp bu olayların bağımsız olay olduklarını göz önüne aldığımızda:

$P(A)$: en az bir atışta tura gelme olasılığı

$P(A')$: üç atışın yazı gelme olasılığı

$P(Y_1)$: birinci atışta yazı gelme olasılığı

$P(Y_2)$: ikinci atışta yazı gelme olasılığı

$P(Y_3)$: üçüncü atışta yazı gelme olasılığı

$$P(A') = P(Y_1) \cdot P(Y_2) \cdot P(Y_3)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{8} \text{ dir.}$$

Bulduğumuz $P(A')$ değerini,

$P(A)=1-P(A')$ de yerine koyalım:

$$P(A)=1-\frac{1}{8}$$

$$=\underset{(8)}{\frac{1}{1}}-\frac{1}{8}=\frac{8}{8}-\frac{1}{8}=\frac{8-1}{8}=\frac{7}{8}=0{,}875 \text{ tir.}$$

II. Yol:
Yukarıdaki soruyu daha önce çizdiğimiz ağaç şemasını kullanarak çözelim:

$$P(A')=P(YYY)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{8} \text{ dir.}$$

Üç kez para atışı yapıldıktan sonra en az bir tanesinin tura gelme olasılığı,

$$P(A)=1-P(A')$$
$$=1-\frac{1}{8}$$
$$=\frac{7}{8}=0{,}875 \text{ tir.}$$

III. Yol:
Yine ağaç şemasını kullanarak sorumuzu çözelim:

$$P(A)=P(YYT)+P(YTY)+P(YTT)+P(TYY)+P(TYT)+P(TTY)+P(TTT)$$

$$=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$$

$$=\frac{7}{8}=0{,}875 \text{ dir}$$

ÖRNEK 63 ⇨ Matematik eğitimi ile ilgili bir konferansa 20 öğretmen ve 32 öğretim elemanı katılmıştır. 3 kişiden oluşan bir tartışma grubu rastgele oluşturulduğunda, bu grupta en az 1 tane öğretmen olma olasılığı nedir?

ÇÖZÜM ⇒ Verilen soru dört farklı yolla çözülebilir:

I.Yol:
En az 1 tane öğretmen olması durumunda seçilen 3lü gruplar şu şekilde oluşturulabilir: (H,H,H), (H,H,E), (H,E,H), (H,E,E), (E,H,H), (E,H,E), (E,E,H). (Not: H: Öğretmen, E: Öğretim Elemanıdır.)

Grupta öğretmen bulunmayan tek üçlü (E,E,E) dir. Başka bir deyişle, 3 kişiden oluşan bir tartışma grubu rastgele oluşturulduğunda, bu grupta en az 1 tane öğretmen olma olayının tümleyen olayı (A') gruptaki üç kişinin de öğretim elemanı olma durumudur.

O halde, seçilen grupta en az 1 tane öğretmen olma olasılığı P(A) yı bulmak için seçilen 3 kişinin de öğretim elemanı olduğunu varsayarak

$$P(A) = 1 - P(A')$$

den yararlanacağız:

Yapılan 3 seçim birbirine bağımlıdır. Çünkü bir seçme olayının olma olasılığı diğerilerinin olma olasılıklarını etkilemektedir. Başka bir deyişle, bir kişi seçildikten sonra geriye kalan kişi sayısında azalma olacaktır. Bu durumda ikinci kişinin seçilme olasılığı artacaktır. Aynı durum seçilecek üçüncü kişi için de geçerlidir.

Konferansa katılan toplam, 20+32=52 kişidir.

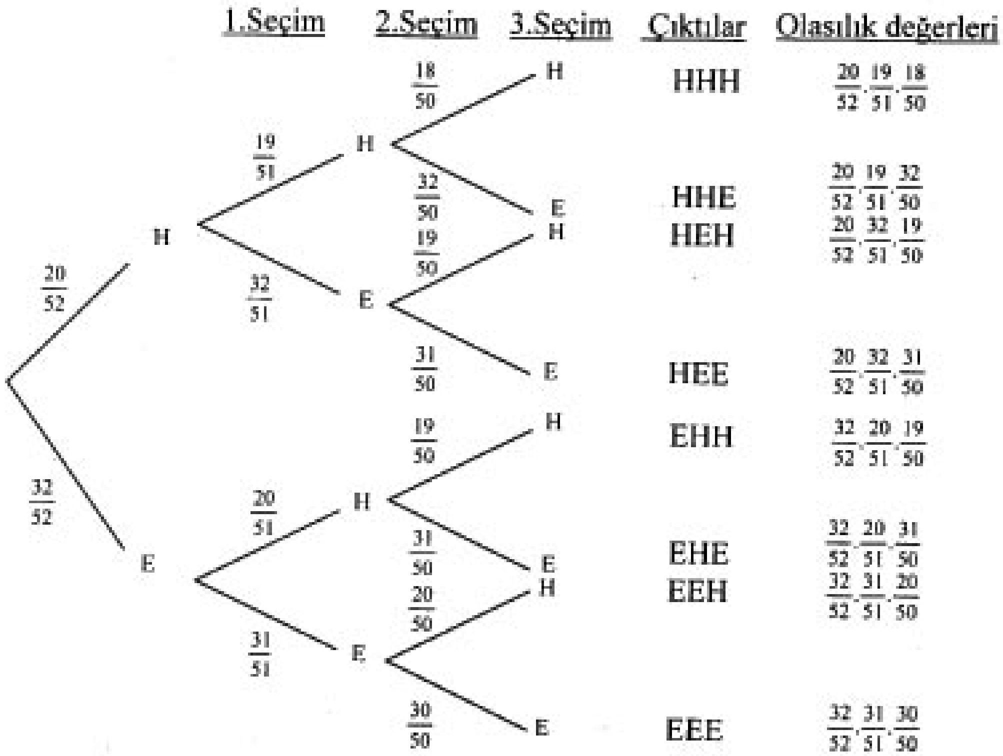
$$\begin{aligned} P(A') &= P(\text{üç öğretim elemanı}) \\ &= P(E_1) \cdot P(E_2) \cdot P(E_3) \\ &= \frac{32}{52} \cdot \frac{31}{51} \cdot \frac{30}{50} \\ &= \frac{29760}{132600} \text{ dür.} \end{aligned}$$

3 kişiden oluşan bir tartışma grubu rastgele oluşturulduğunda, bu grupta en az 1 tane öğretmen olma olasılığı,

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(A') \\ &= 1 - \frac{29760}{132600} = \frac{102840}{132600} \approx 0{,}776 \text{ dır.} \end{aligned}$$

II. Yol:

Yukarıdaki soruyu ağaç şeması kullanarak çözelim:



P(A') = P(EEE)

$$= \frac{32}{52}\cdot\frac{31}{51}\cdot\frac{30}{50}$$

$$= \frac{29760}{132600} \text{ dür.}$$

3 kişiden oluşan bir tartışma grubu rastgele oluşturulduğunda, bu grupta en az 1 tane öğretmen olma olasılığı,

$$P(A) = 1 - P(A')$$

$$= 1 - \frac{29760}{132600}$$

$$= \frac{102840}{132600} \approx 0{,}776 \text{ dır.}$$

III. Yol:
Yine ağaç şemasını kullanarak sorumuzu çözelim:

P(A)=P(HHH)+P(HHE)+P(HEH)+P(HEE)+P(EHH)+P(EHE)+P(EEH)

$$=\left[\frac{20}{52}\cdot\frac{19}{51}\cdot\frac{18}{50}\right]+\left[\frac{20}{52}\cdot\frac{19}{51}\cdot\frac{32}{50}\right]+\left[\frac{20}{52}\cdot\frac{32}{51}\cdot\frac{19}{50}\right]+\left[\frac{20}{52}\cdot\frac{32}{51}\cdot\frac{31}{50}\right]$$
$$+\left[\frac{32}{52}\cdot\frac{20}{51}\cdot\frac{19}{50}\right]+\left[\frac{32}{52}\cdot\frac{20}{51}\cdot\frac{31}{50}\right]+\left[\frac{32}{52}\cdot\frac{31}{51}\cdot\frac{20}{50}\right]$$

$$=\frac{6840}{132600}+\frac{12160}{132600}+\frac{12160}{132600}+\frac{19840}{132600}+\frac{12160}{132600}+\frac{19840}{132600}+\frac{19840}{132600}$$

$$=\frac{102840}{132600}\approx 0{,}776 \text{ dır.}$$

IV.Yol:
Verilen soruyu kombinasyon kullanarak çözelim:

Ö={ konferansa katılan kişilerden oluşan 3 lüler}

A= { öğretim üyelerinden oluşan 3 lü}

Konferansa katılan toplam kişi sayısı 20+32=52 dir.

Konferansa katılan kişilerden oluşan 3 lülerin sayısı,

$$s(Ö)=C(52,3)=\frac{52!}{(52-3)!\cdot 3!}=\frac{52!}{49!\cdot 6}=\frac{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49!}{49!6}=22100 \quad dür.$$

Öğretim üyelerinden oluşan 3 lülerin sayısı,

$$s(A)=C(32,3)=\frac{32!}{(32-3)!\cdot 3!}=\frac{32!}{29!6}=\frac{32\cdot 31\cdot 30\cdot 29!}{29!6}=4960 \text{ tır.}$$

3 kişiden oluşan bir tartışma grubu rastgele oluşturulduğunda, bu grupta 3 kişinin de öğretim elemanı olma olasılığını hesaplamak için, olasılığın tanımından yararlanalım:

$$\text{İstenen durumun olma olasılığı} = \frac{\text{istenen durum sayısı}}{\text{mümkün olan tüm durumların sayısı}} \quad (**)$$

$$P(A) = \frac{C(32,3)}{C(52,3)}$$

$$= \frac{4960}{22100} \text{ dür.}$$

3 kişiden oluşan bir tartışma grubu rastgele oluşturulduğunda, bu grupta en az 1 tane öğretmen olma olasılığı,

$$P(A) = 1 - P(A')$$

$$= 1 - \frac{4960}{22100} = \frac{17140}{22100} \approx 0,776 \text{ dır.}$$

ÖRNEK 64 ⇨ Nezihi'nin üniversiteyi kazanma olasılığı $\frac{1}{4}$, Hülya'nın ise $\frac{3}{5}$ tir. Yalnız Hülya'nın üniversiteyi kazanma olasılığı nedir?

ÇÖZÜM ⇨ N={Nezihi'nin üniversiteyi kazanması}, $P(N) = \frac{1}{4}$

H={Hülya'nın üniversiteyi kazanması}, $P(H) = \frac{3}{5}$

Yalnız Hülya'nın üniversiteyi kazanması demek Nezihi'nin üniversiteyi kazanmamasıdır. O halde, Nezihi'nin üniversiteyi kazanmama olasılığı;

$$P(N) + P(N') = 1 \Rightarrow P(N') = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Yalnız Hülya'nın üniversiteyi kazanma olasılığı ise,

$$P(H \cap N') = P(H) \cdot P(N') = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{20} \text{ dir.}$$

ALIŞTIRMA 16 ⇨ Aşağıdaki alıştırmaları yapınız:

(A) Bir hilesiz madeni paranın 4 kez atılması sonucu *en az* bir atışta yazı gelme olasılığını hesaplayınız.

(B) Feza Gürsey Bilim merkezine bir gezi düzenlenmiştir. Bu gezi için 5 fizik ve 4 kimya öğretmeni arasından üç öğretmen rastgele seçilerek görevlendirilecektir. Seçilen öğretmenlerden *en az* birisinin fizik öğretmeni olma olasılığı nedir?

ARAŞTIRMALAR

1) Olasılığın çeşitli bilim dallarında kullanımı hakkında bilgi veriniz.
2) Olasılığın çeşitli meslek dallarında kullanımı hakkında bilgi veriniz.
3) Ayrık olaylarla ilgili özgün bir soru yazarak çözünüz.
4) Koşullu olasılıkla ilgili özgün bir soru yazarak çözünüz.
5) Bağımlı olaylarla ilgili özgün bir soru yazarak çözünüz.
6) A, B, C olayları ayrık olmayan olay ise A veya B veya C olaylarının olma olasılığı nasıl hesaplanabilir açıklayınız.
7) Ayrık olay ile ayrık olmayan olay arasındaki farkı açıklayınız.
8) Bağımlı olay ile bağımsız olay arasındaki farkı açıklayınız.

BÖLÜMÜN ÖZETİ

Araştırmacının gözlem yapmasına veya sonuçlar elde etmesine yarayan işleme **deney** denir. Bir deneyin veya olayın sonucuna **çıktı** denir.

Bir deneyde mümkün olan tüm çıktıların kümesine **örneklem *uzay*** denir. Örneklem uzayın her bir elemanına ***örneklem nokta*** denir.

Bir deneyin sonuçlarından veya çıktılarından oluşan herhangi bir topluluğuna ***olay*** denir. Başka bir deyişle, örneklem uzayın her bir alt kümesine olay denir.

Sonlu bir $\ddot{O} = \{\ddot{o}_1, \ddot{o}_2, ..., \ddot{o}_n\}$ örneklem uzay ve P olasılık fonksiyonu olmak üzere, $P(\ddot{o}_1) = P(\ddot{o}_2) = ... = P(\ddot{o}_n)$ ise, $\ddot{O}$ örneklem uzayına **eş olumlu (olasılı) örneklem uzay** denir.

$\ddot{O}$ bir eş olumlu örneklem uzay ve $A \subset \ddot{O}$ olmak üzere, A olayının olma olasılığı, $P(A) = \dfrac{s\,(A)}{s\,(\ddot{O})}$ dür.

Eğer bir olayın olma olasılığı 1 ise bu olay **kesin olay** olarak isimlendirilir. Eğer bir olayın olma olasılığı 0 ise, bu olay **imkansız olay** olarak isimlendirilir.

$\ddot{O}$ örneklem uzay, $A \subset \ddot{O}$, $B \subset \ddot{O}$ ve $A \cap B = \phi$ ise, A ve B olaylarına **ayrık olay** denir. Eğer $A \cap B \neq \phi$ ise, A ve B olaylarına **ayrık olmayan olay** denir.

Bir olayın olma olasılığı diğer olayın olma olasılığını etkilemiyorsa,bu olaylara **bağımsız olay** denir. Eğer tam tersi bir durum söz konusu ise, bu olaylara **bağımlı olay** denir.

$\ddot{O}$ örneklem uzay, $A \subset \ddot{O}$, $B \subset \ddot{O}$ ve $A \cap B = \phi$ ise, A veya B olaylarının olma olasılığı, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ dir. Eğer $A \cap B \neq \phi$ ise, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ dir.

A ve B eş olumlu $\ddot{O}$ örneklem uzayında iki olay olsun. A olayının gerçekleşmiş olması durumunda, B olayının olma olasılığına, B olayının A ya bağlı koşullu olasılığı denir ve $P(B \setminus A)$ ile gösterilir.

$$P(B \setminus \mathrm{A}) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \quad P(A) \neq 0$$

Eş olumlu $\ddot{O}$ örneklem uzayında A, B iki olay ve $s(A) \neq 0$ ise, B olayının, A ya bağlı koşullu olasılığı, $P(B \setminus A) = \dfrac{s(A \cap B)}{s(A)}$ dır.

A ve B bağımsız olaylar ise, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ dir. Eğer A ve B bağımlı olaylar ise, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \setminus A)$ veya $P(B \cap A) = P(B) \cdot P(A \setminus B)$ dir.

DEĞERLENDİRME SORULARI

1) "ANSİKLOPEDİ" kelimesinden bir harf rastgele seçilmiştir. Bu deneyin mümkün olan toplam çıktı sayısı nedir?

A) 10 B) $\frac{10}{11}$ C) 11 D) $\frac{2}{10}$ E) 1

2) "BİLGİSAYAR" kelimesinden bir harf rastgele seçilmiştir. Bu deneyin mümkün olan bütün çıktıları aşagıdakilerden hangisidir?

A) {B,İ,L,G,İ,S,A,Y,A,R} B) {B,İ,L,G, S,Y,A, R}
C) {İ,A,R} D) {B,L,G,S,Y,R} E) {B,L,İ,A,R}

3) Bir komite 7 erkek ve 2 kadından oluşmaktadır. Komite üyeleri arasından bir başkan rastgele seçilecektir. Kadın bir başkan seçilmesi olayının çıktı sayısı kaçtır?

A) $\frac{7}{9}$ B) 7 C) $\frac{2}{7}$ D) 2 E) $\frac{2}{9}$

4) Suat'ın kitaplığında 5 tane roman, 3 tane matematik, 2 tane kimya ve 1 tane biyoloji kitabı vardır. Suat, kitaplığından rastgele bir kitap seçmek istiyor. Seçeceği kitabın roman veya matematik kitabı olma olasılığı nedir?

A) $\frac{8}{11}$ B) $\frac{15}{121}$ C) $\frac{15}{110}$ D) 8 E) $\frac{5}{11}$

5) Olasılık değerleri (p) , hangi değerler arasında değişmektedir?

A) $0 \leq p \leq 1000$ B) $0 \leq p \leq 1$ C) $-1 \leq p \leq 1$

D) $-1 \leq p \leq 0$ E) $-100 \leq p \leq 100$

6) Ankara'da, sarışın birini rastgele seçme olasılığı 0,3, sarışın ve yeşil gözlü birini seçme olasılığı 0,1, yeşil gözlü birini seçme olasılığı 0,2 dir. Sarışın veya yeşil gözlü birinin rastgele seçilme olasılığı nedir?

A) 0,1 B) 0,2 C) 0,3 D) 0,4 E) 0,6

7) "Çevre Topluluğu" üyelerinin her birinin ismi farklı kağıt parçalarına yazılarak bir torbanın içine konulmuştur. Bu isimler şunlardır: Özlem, Kerem, Ebru, Bahar, Oya ve Yusuf. Bir kağıt çekildikten sonra tekrar torbaya atılarak ikinci kağıt çekilmiştir. Sırasıyla Yusuf ve Oya isimlerinin çekilme olasılığı nedir?

A) $\frac{1}{36}$ B) $\frac{1}{12}$ C) $\frac{2}{12}$ D) $\frac{2}{6}$ E) 6

8) Salih, Türkan ve Hatice arasında bir fizik yarışması düzenleniyor. Bu yarışmayı Salih'in kazanma olasılığı Türkan'ın kazanma olasılığının 2 katı, Hatice'nin kazanma olasılığı Türkan'ın kazanma olasılığının 3 katıdır. Bu yarışmayı Türkan'ın kazanma olasılığı nedir? (Not: Yarışmayı yalnız bir kişi kazanacaktır.)

A) $\frac{5}{6}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

9) Beş tane hilesiz bozuk para atıldığında en az birinin tura gelme olasılığı nedir?

A) $\frac{1}{32}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{31}{32}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{10}$

10) Aşağıdaki çizelge öğrencilerin matematik dersinde aldıkları notlara göre dağılımını göstermektedir.

Not	1	2	3	4	5
Öğrenci Sayısı	2	7	9	7	4

3 ten düşük veya 2 den yüksek not alan bir öğrenciyi seçme olasılığı nedir?

A) $\frac{5}{29}$ B) $\frac{3}{29}$ C) $\frac{2}{29}$ D) 1 E) $\frac{20}{29}$

➤ *Aşağıdaki sorularda verilen olayların çeşidini belirleyiniz:*

11) Bir araştırmada 10 yaşında bir ilköğretim öğrencisi ya da bir üniversite öğrencisi seçilmek isteniyor.

12) Bir bilgisayar programı 0 ve 9 arasındaki rakamları kullanarak 5 basamaklı sayılar üretmektedir (Not: Kullanılan rakamlar tekrar kullanabilmektedir.)

13) Nesrin hastalandığı için bilgi yarışmasına katılamayacaktır. Nesrin'in, bu yarışmayı kazanma olasılığı nedir?

14) Mehmet'te, bir kenar uzunluğu 1 cm olan 30 küp vardır. Bu küpleri kullanarak kenar uzunluğu 3 cm olan bir küp yapmak istemektedir. Mehmet'in bu küpleri kullanarak hacmi 27 cm^3 olan bir küp elde etme olasılığı nedir?

15) Bir fabrikada farklı renklerde "bisiklet üretilmektedir. Kalite konrol amaçlı bisikletler rastgele seçilerek test edilemektedir. Toplam 900 bisikletten 100 tanesi mavi renklidir. Bir teknisyenin rastgele seçtiği bisikletin sağlam veya mavi renkli olma olasılığı nedir?

16) Çiğdem'in 10 kişiden oluşan bir arkadaş grubu vardır. Yeni yıl nedeniyle bu gruptan en az iki kişiye hediye almak istemektedir. Fakat hangi arkadaşına hediye alacağına karar veremediği için kura ile karar verecektir. Bu nedenle arkadaşlarının isimlerini aynı özelliklere sahip kağıt parçalarına yazarak torbaya atmıştır. Bu torbadan iki kağıt parçasını birer birer rastgele çekerek karar verecektir.

17) Aynı özelliklere sahip kartlara Türkçe harfler birer birer yazılarak bir torbaya atılmıştır. Torbadan çekilecek olan kartın üzerinde "X" harfinin olma olasılığı nedir?

➤ Araçların ön koltuğuna oturan kişilerin emniyet kemeri bağlayıp bağlamadıkları durumları göz önüne alınarak araçta bir kaza sonucu yaralanıp yaralanmadıkları konusu ile ilgili bir araştırma yapılmıştır. Bunun sonucunda elde edilen veriler Tablo 3 te verilmiştir.

Tablo 3

YARALANMA DURUMU	Emniyet Kemeri		TOPLAM
	Bağlayan	Bağlamayan	
Yaralanan	8	98	106
Yaralanmayan	126	12	138
TOPLAM	134	110	244

18.-21. soruları Tablo 3 ten yararlanarak yanıtlayınız ve anketlerden birinin rastgele seçildiğini göz önüne alınız:

18) Emniyet kemeri bağlayan bir kişinin seçilme olasılığı nedir?

A) $\frac{67}{122}$ B) $\frac{1}{244}$ C) $\frac{124}{244}$ D) $\frac{126}{134}$ E) $\frac{8}{134}$

19) Kaza sonucu yaralanan kişinin seçilme olasılığı nedir?

A) $\frac{1}{244}$ B) $\frac{53}{122}$ C) $\frac{8}{106}$ D) $\frac{98}{106}$ E) $\frac{8}{134}$

20) Emniyet kemeri bağlayan veya kaza sonucu yaralanmayan bir kişinin seçilme olasılığı nedir?

A) $\frac{1}{244}$ B) $\frac{272}{244}$ C) $\frac{73}{122}$ D) $\frac{126}{244}$ E) $\frac{12}{138}$

21) Emniyet kemeri bağlayıp yaralanmayan veya emniyet kemeri bağlamayıp yaralanmayan bir kişinin seçilme olasılığı nedir?

A) $\frac{12}{110}$ B) $\frac{126}{134}$ C) $\frac{126}{244}$ D) $\frac{12}{244}$ E) $\frac{69}{122}$