ÜNİTE I
FONKSİYONLAR

Fonksiyonlarla İlgili Temel Kavramlar

Eşit Fonksiyonlar

Fonksiyon Türleri

Birim Fonksiyon

Sabit Fonksiyon

Fonksiyonların Bileşkesi

Bir Fonksiyonun Tersi

Fonksiyonlarda İşlemler

Fonksiyonların Tanım ve Değer Kümelerini Bulmak

Tek ve Çift Fonksiyonlar

Fonksiyon Grafikleri

Ters Fonksiyonların Grafikleri

Parçalı Fonksiyonların Grafikleri

Mutlak Değer Fonksiyonu ve Mutlak Değer Fonksiyon Grafikleri

İşaret Fonksiyonu ve İşaret Fonksiyonu Grafikleri

Tam kısım Fonksiyonu ve Tam kısım Fonksiyon Grafikleri

Örnekler

BU BÖLÜMÜN AMAÇLARI

Bu bölümü çalıştığınızda,

* Fonksiyonların tanımını kavrayacak, bir ifadenin fonksiyon olup olmadığını belirtecek,
* Eşit fonksiyonu kavrayacak,
* Fonksiyon türlerini kavrayıp, fonksiyonun hangi tür fonksiyon olduğunu söyleyecek,
* Birim fonksiyonu kavrayacak,
* Sabit ve sıfır fonksiyonu kavrayacak ve üzerinde işlem yapmayı öğrenecek,
* Fonksiyon bileşiklerini kavrayıp, bileşke fonksiyon sorularını çözmeyi öğrenecek,
* Fonksiyonlarda işlemleri kavrayacak, üzerinde işlem yapmayı öğrenecek,
* Fonksiyonun tanım ve değer kümelerini bulmayı öğrenecek,
* Tek ve çift fonksiyonları tanıyıp, bir fonksiyonun tek ya da çift fonksiyon olduğunu söyleyecek,
* Fonksiyon grafiklerini çizebilecek,
* Ters fonksiyon grafiklerini çizebilecek,
* Parçalı fonksiyon grafiklerini çizebilecek,
* Mutlak değer fonksiyonunu tanıyacak ve mutlak değer fonksiyon grafiklerini çizecek,
* İşaret fonksiyonunu tanıyacak ve işaret fonksiyonu grafiklerini çizmeyi öğrenecek,
* Tam kısım fonksiyonu tanıyacak ve tamkısım fonkosiyon grafiklerini çizmeyi öğreneceksiniz.

BU BÖLÜMÜ NASIL ÇALIŞMALIYIZ?

* Bu bölüme başlamadan önce lise 1 de gösterilen fonksiyon konusunu yeniden gözden geçiriniz.
* Tanımları iyice okuyunuz.
* Bölüm içindeki örnek ve çözümleri inceleyerek bölüm sonundaki değerlendirme sorularını çözmeniz yararınıza olacaktır.

FONKSİYONLAR

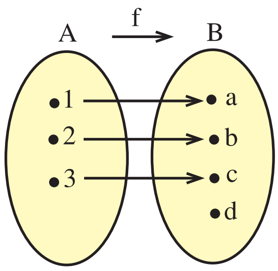
1.1. FONKSİYONLARLA İLGİLİ TEMEL KAVRAMLAR

1. $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ olacak.

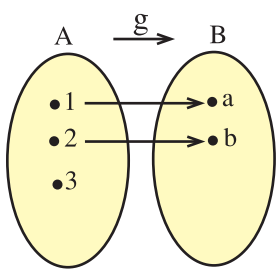
2. A kümesinin bir elemanı B kümesinde birden fazla eleman ile eşleşmeyecek.

3. A kümesinde (tanım kümesinde) açıkta eleman kalmayacak. (Değer kümesinde açıkta eleman kalabilir.)

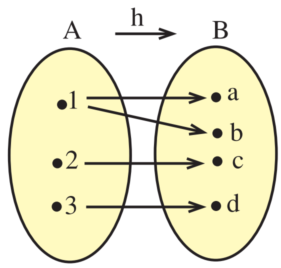
Eğer f: $A \to B$ şeklinde tanımlanan bir bağıntı (1), (2) ve (3) koşullarını sağlıyorsa bu bağıntıya A dan B ye tanımlanan fonksiyon denir. O hâlde aşağıdaki bağıntıların fonksiyon olup olmadıklarını görmek mümkün olacaktır.



f: fonksiyon



g: fonksiyon değil
Çünkü tanım kümesindeki
3 açıkta kaldı.



h: fonksiyon değil
Çünkü A'daki 1 elemanı
B de hem a ya
hem de b ye eşlenmiş

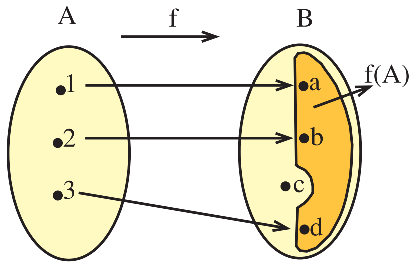
Yandaki şekilde,

A kümesine, f fonksiyonunun tanım kümesi

B kümesine, f fonksiyonunun değer kümesi

f(A) kümesine de, f fonksiyonu altında

A kümesinin görüntü kümesi denir.



f (A) = { a, b, d }

Bir f fonksiyonunun belli olması için, f fonksiyonunun tanım kümesinin, değer kümesinin ve değişken ile görüntü arasındaki bağıntısının (fonksiyon kuralının verilmesi gerekir.

Yani, fonksiyon ya

$f: A \rightarrow B \quad x \rightarrow y = f(x)$ ile

ya da $f: \{(x,y) = x \in A,\ y \in B$ ve $y = f(x)\}$

biçiminde, ikililer kümesi olarak belirtilir.

Örnek: A={-1,0,1} ve B={1,3,5,7} kümeleri verilsin. f:A→B olmak üzere, f(x)=2x+3 şeklinde tanımlansın.

a) f fonksiyonun tanım kümesi A={-1,0,1}dir.

b) f fonksiyonun değer kümesi B= {1,3,5,7}dir.

c) f fonksiyonun görüntü kümesi, verilen kuralda x yerine A kümesinin elemanları yazılarak bulunacaktır.

f(x)= 2x+3 kuralında

x = -1 için f(-1) = 2. (-1) + 3 = 1

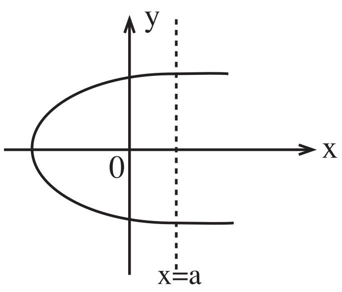
x = 0 için f(0) = 2. (0) + 3 = 3

x = 1 için f(1) = 2. (1) + 3 = 5 dir.

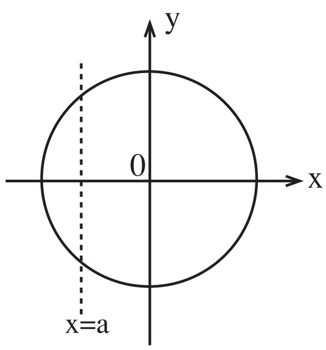
Buradan f(A)={1,3,5} olur.

Bir bağıntının grafiğinden fonksiyon olup olmadığını anlamak için y eksenine paralel doğrular çizdiğimizi düşünelim. .(x=a doğruları) Bu doğru grafiği en fazla bir noktada kesiyorsa, grafik bir fonksiyon grafiğidir.

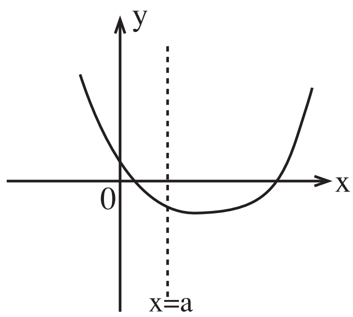
Örnek



x=a doğrusu grafiği farklı iki noktada kesiyor. Grafik fonksiyona ait değildir.



x=a doğrusu grafiği farklı iki noktada kesiyor. Fonksiyon değildir.



x= a doğrusu grafiği en fazla bir noktada kesiyor. Grafik bir fonksiyona aittir.

EŞİT FONKSİYONLAR

f= $A \to B$ ve g: $A \to B$ fonksiyonlarında, $\forall x \in A$ için $f(x) = g(x)$ ise, f, g fonksiyonlarına birbirine eşit fonksiyonlar denir. f fonksiyonu ile g fonksiyonunun birbirine eşitliği

$f = g$ yazılarak belirtilir.

Örnek: $A = \{-1,0,1\}$, $B = \{1,2\}$
f: $A \to B$, $x \to y = f(x) = x^2 + 1$
g: $A \to B$, $x \to y = g(x) = |-x| + 1$ fonksiyonları veriliyor.
f= g dir. Gerçekten,

$f(-1)=(1)^2+1=2$ $\quad$ $g(-1)=|-1|+1=2$

$f(-0)=(0)^2+1=1$ $\quad$ $g(0)=|0|+1=1$

$f(1)=(1)^2+1=2$ $\quad$ $g(1)=|1|+1=2$

Dikkat edilirse $f(-1) = g(-1)$

$f(0) = g(0)$

$f(1) = g(1)$ $\quad$ $(\forall\ x \in A$ için$)$ $\quad$ olduğu görülür.

O hâlde $f= g$

FONKSİYON TÜRLERİ

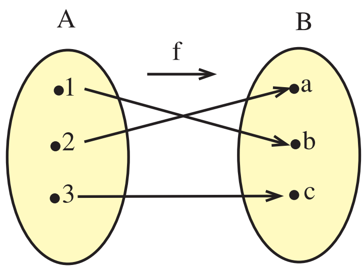
1. Bire bir Fonksiyon

$f : A \to B$, $x \to y= f(x)$ fonksiyonunda

$(\forall x_1, x_2 \in A$ ve $x_1 \neq x_2)$ iken $f(x_1) \neq f(x_2)$

ise f fonksiyonuna, bire bir fonksiyon denir.

Örnek



f bire bir dir.

Örnek: $f= A \to B$, $A=\{-1,0,1\}$ $\quad$ $B=\{0,1,2\}$

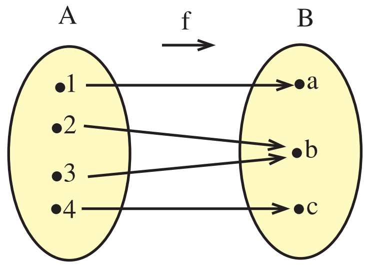
$f(x) = x^2$ fonksiyonu 1: 1 değildir. Çünkü

$$\left.\begin{array}{l} f(-1) = (-1)^2 = 1 \\ f(1) = (1)^2 = 1 \end{array}\right\}$$ yani, $-1 \neq 1$ iken $f(-1) = f(1)$ olduğundan bire bir değildir.

2. Örten fonksiyon

f:A→B, f(A) = B ise f fonksiyonuna örten fonksiyon denir. Yani, A nın elemanlarının f altındaki görüntüleri B kümesine eşit olacak.

Örnek



f fonksiyonu örtendir.

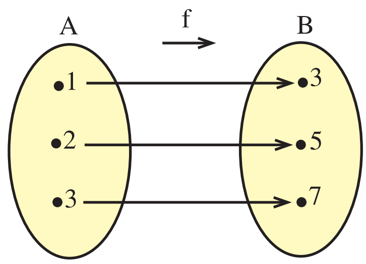
Örnek: A= {1,2,3} B= {3,5,7} f: A→B f (x) = 2x+1,

verilen f fonksiyonu örtendir. Çünkü,

f (1) = 2. 1+1 = 3

f (2) = 2. 2+1= 5

f (3) = 2.3+1 = 7



f (A) = B olduğundan, f örten, diğer bir ifade ile değer kümesinde açıkta eleman kalmadığından örten fonksiyondur.

3. İçine Fonksiyon:

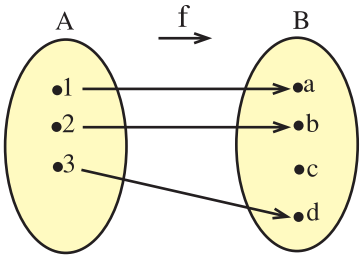
f: A→ B , x→ y= f (x) fonksiyonunda,

f (A) ≠ B ise, f fonksiyonuna,

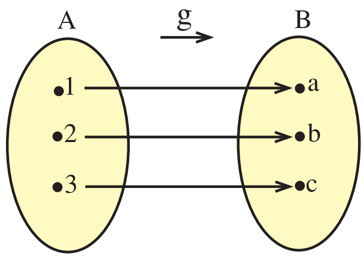
içine fonksiyon denir.

Diğer bir ifade ile örten olmayan bir fonksiyon içine fonksiyondur.

Örnek



f örten değil ancak f içine fonksiyon
(Çünkü f (A) ≠ B) dir.

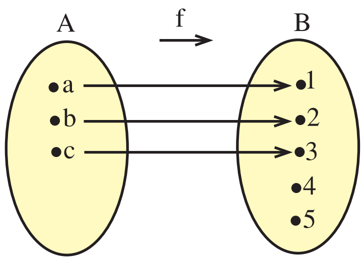


g örtendir. Ancak g içine fonksiyon değil
Çünkü (f (A) = B) dir.

4. Bire bir ve İçine fonksiyon

f:A→B, x → y = f (x) fonksiyonu hem bire bir hem de içine fonksiyon ise f fonksiyonuna, bire bir ve içine fonksiyon denir.

Örnek



f(A) ≠ B dir. Çünkü f (A) = { 1, 2, 3 }

B = {1, 2, 3, 4, 5}

O hâlde f içine,

f (a) = 1

f (b) = 2

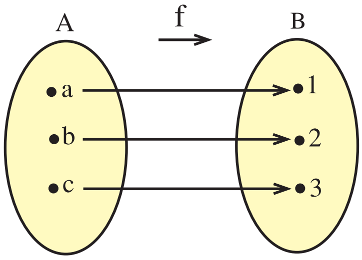
f (c) = 3

olduğundan f bire bir fonksiyondur.

5. Bire bir ve Örten Fonksiyon

f:A→B, x → y = f (x) fonksiyonu hem bire bir hem de örten fonksiyon ise f fonksiyonuna, bire bir ve örten fonksiyon denir.

Örnek:



f (a) = 1
f (b) = 2 } f bire bir fonksiyon
f (c) = 3

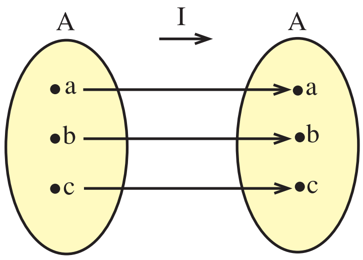
f (A) = {1, 2, 3}
B= {1, 2, 3 } } f (A) = B örten fonksiyon

O halde, f bire bir (1-1) ve örten fonksiyondur.

Birim Fonksiyon

I:A→A
$\forall$ x ∈A için I(x) = x
ise I birim fonksiyon

Örnek: A = {a, b, c} I: A →A



I (a) = a

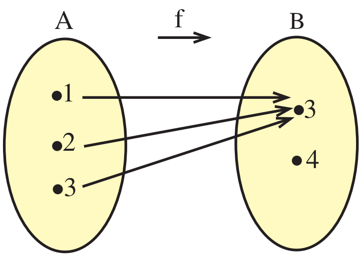
I (b) = b

I (c) = c ise

$\forall$ x ∈A I (x) = x ile gösterilir.
Buradan I birim fonksiyondur.

Sabit Fonksiyon: f : A→ B , f (x) = C, C ∈ R ise f sabit fonksiyondur.

Örnek:



Örnek : f: R→ R

$x \to y = f(x) = 2x - 3$

fonksiyonu bire bir ve örten midir?

Çözüm: Bire birlik:

$x_1 \neq x_2$ ($\forall x_1, x_2 \in R$) için $f(x_1) \neq f(x_2)$ oluyor mu? (1:1 lik şartı)

O halde,

$x_1 \neq x_2$ iken

$f(x_1) = 2x_1 - 3$ ise $f(x_1) \neq f(x_2)$ olduğu açıktır.

$f(x_2) = 2x_2 - 3$ o halde, f 1:1 dir.

Örtenlik:

$y_1 \in R$ ve $f(x_1) = y_1 \Rightarrow 2x_1 - 3 = y_1$

$$x_1 = \frac{y_1+3}{2} \in R$$

$x_1 \in R$ O halde f örtendir.

Örnek: 1) $f(x) = 2x - 1$ ise $f(2x)$ i $f(x)$ cinsinden yazalım.

Çözüm: $f(x) + 1 = 2x$ $\qquad f(2x) = 2(2x) - 1$

$$\frac{f(x)+1}{2} = x \qquad\qquad = 4x - 1$$

$f(2x) = 4x-1$ de x yerine $\dfrac{f(x)+1}{2}$ yazarsak

$$f(2x) = 4\left(\frac{f(x)+1}{2}\right) - 1$$

$$= 2f(x) + 2 - 1$$

$$f(2x) = 2f(x) + 1 \text{ olur.}$$

Örnek: f:R→R, olmak üzere,f(x)=x.f(x+1) ve f(2)=4 ise f(4) nedir?

Çözüm: x=2 yazalım. Şimdi

f(2)=2.f(3) x=3 yazalım.

4=2.f(3) f(3)=3.f(4)

2= f(3) $\frac{2}{3} = f(4)$ olarak bulunur.

Örnek: f:R→R, $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x < 3 \text{ ise} \\ 5, & x = 3 \text{ ise} \\ 4x^2 - 2x, & x > 3 \text{ ise} \end{cases}$

olduğuna göre
f(2) + f(3) + f(5) nedir?

Çözüm:

$f(2) = 2^2 + 2.2 = 8$ (2<3 olduğundan $x^2 + 2x$ de x yerine 2 yazdık
$f(3) = 5$
$f(5) = 4.5^2 - 2.5 = 100 - 10 = 90$ olur. (5> 3 olduğundan) $4x^2 - 2x$ de, x yerine 5 yazdık
8+5 + 90 = 103 olarak bulunur.

Örnek: $f(x)=(a-1)x^2 + (2b-1)x + 5$ fonksiyonu sabit fonksiyon ise a+b nedir?

Çözüm: f(x), sabit fonksiyon olduğundan
f(x) = 5 olmalıdır. Buradan,
a-1 =0 ve 2b-1=0
a=1 ve b=1/2 dir
a+b = 3/2 olur.

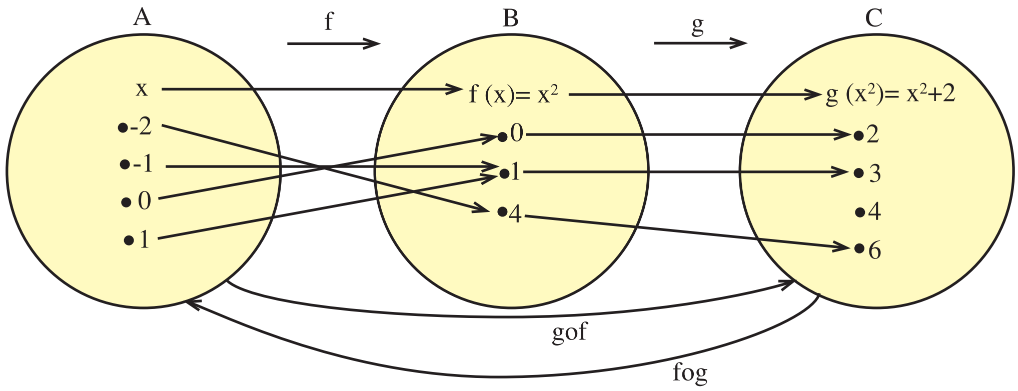
Örnek: $f(x) = (2k-4)x^2 + (n-1)x + m - 1$ fonksiyonu birim (özdeş) fonksiyon ise k+m+n nedir?
Çözüm: f(x) birim fonksiyon ise f(x) = x olmalı o hâlde,
2k-4 = 0 , n-1= 1 m-1 = 0 olmalı
k=2 , n =2 ve m =1 dir.
k+n+m = 5 olarak bulunur.

FONKSİYONLARIN BİLEŞKESİ

A = {-2, -1, 0, 1} , B = {0, 1, 4 } , C = {2, 3, 4, 6 }
f= A→ B ye f (x)= x^2 fonksiyonun görüntü kümesi
f (A) = {0, 1, 4,} (f (A) = B)
g = B→ C, g (x) = x+2
fonksiyonunun görüntü kümesi g (f (A)) = {2, 3, 6}

(gof) (-2) = g(4) = 6
(gof) (-1) = g(1) = 3
(gof) (0) = g(0) = 2
(gof) (1) = g (1) = 3

Aşağıdaki şemayı inceleyelim



Şemada görüldüğü gibi, A kümesinin elemanları f ve g fonksiyonları yardımıyla C kümesindeki elemanlara eşlenmiştir.

Burada f ve g fonksiyonlarından yararlanılarak, A dan C ye yeni bir fonksiyon elde edilmiştir. Bu fonksiyon, f ile g fonksiyonların bileşke fonksiyonudur ve gof biçiminde gösterilir.

gof fonksiyonunda, tanım kümesinden alınan bir elemanın önce f altındaki görüntüsü, sonra bunun g altındaki görüntüsü bulunur.

Yani, (gof): $A \rightarrow C$, (gof) (x) $= g[f(x)]$ dir.
Buna göre, (gof) (x) fonksiyonun kuralını bulalım.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x^2 \\ g(x) = x+2) \end{array}\right\} \Rightarrow (gof)\,(x) = g\,(f\,(x)) = g(x^2) = x^2+2 \text{ dir.}$$

(gof) (x)= $g[f(x)]$ anlamı:
Bir g fonksiyonunda x gördüğün yere f (x) fonksiyonunu yaz.
Şimdi bileşke fonksiyonun tanımını yapabiliriz.

Boş kümeden farklı A, B, C kümeleri için

f: $A \rightarrow B$, g: $B \rightarrow C$

fonksiyonları verilsin. f ve g fonksiyonları yardımıyla A dan C'ye tanımlanan yeni bir fonksiyona f ile g fonksiyonlarının bileşkesi denir ve gof ile gösterilir.

(gof : $A \rightarrow C$; $\forall x \in A$ için (gof) (x) = $g[f(x)]$ şeklinde de gösterilir.

Örnekler

1) $f: R \to R$, $g: R \to R$ ile tanımlansın

$f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = x + 3$ olsun

$(fog)(x) = (gof)(x)$ olup olmadığını gösterelim.

Çözüm

$(fog)(x) = f[g(x)] = f(x+3) = (x+3)^2 - 1$

$= x^2 + 6x + 9 - 1$

$= x^2 + 6x + 8$

$(gof)(x) = g[f(x)] = g(x^2-1)$

$= (x^2 - 1) + 3)$

$= x^2 + 2$

$fog(x) \neq (gof)(x)$

Sonuç = Fonksiyonlarda bileşke işleminin değişme özeliği yoktur. Yani,

$(gof)(x) \neq (fog)(x)$

2) $f = R \to R$, $g = R \to R$, $h = R \to R$

$f(x) = 2x$, $g(x) = x+1$ $h(x) = x^2 - 1$

a) $(fogoh)(x) = ?$

b) $(gofoh)(1) = ?$

Çözüm

a) $(fogoh)(x) = (fog)(h(x)) = (fog)(x^2 - 1)$

$= f[g(x^2 - 1)]$

$= f[(x^2-1) + 1] = f[x^2]$

$= 2x^2$

b) $(gof oh)(1) = (gof)[h(1)]$

$= (gof)(1^2 - 1) = (gof)(0) = g[f(0)]$

$= g(2 . 0) = g(0) = 0+1 = 1$

3) $f = R \to R$, $g = R \to R$,

$f(x) = 3 - 4x$ ve $g(x) = x$

fonksiyonları veriliyor.

$(fog)(x) = (gof)(x)$

olup olmadığını araştıralım.

$$\begin{aligned} (fog)(x) &= f[g(x)] \\ &= f[g(x)] \\ &= f(x) \\ &= 3 - 4x \end{aligned} \qquad , \quad \begin{aligned} (gof)(x) &= g[f(x)] = g(3-4x) \\ &= 3 - 4x \end{aligned}$$

O hâlde, $(fog)(x) = (gof)(x)$ dir.

Ayrıca, $(fog)(x) = (gof)(x) = f(x)$

Çünkü, $g(x) = x$ fonksiyonu birim (etkisiz) fonksiyon yani, kendisini kendisine dönüştüren fonksiyon

A dan B ye bir f fonksiyonu ve A dan A ya bir $I(x) = x$ veya $I: x \to x$ fonksiyonu verilsin.

A kümesindeki her f fonksiyonu için

$foI = Iof = f$

Koşulunu sağlayan I fonksiyonuna bileşke işlemine göre birim (etkisiz) fonksiyon denir.

Örnek

$g, f: R \to R$,

$f(x) = 2x + 5$ olsun

$(fog)(x) = I(x)$ olduğuna göre

$g(x)$ fonksiyonunu bulunuz.

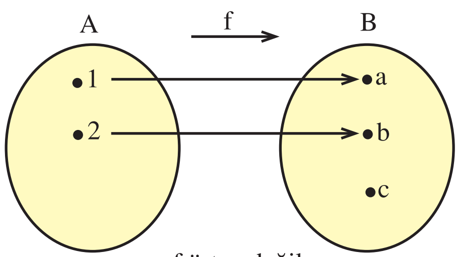
Çözüm

$$(fog)\,(x) = f\,[g\,(x)] = I\,(x)$$
$$= 2.g\,(x) + 5 = x$$
$$= 2g\,(x) = x-5$$
$$= g(x) = \frac{x-5}{2}$$

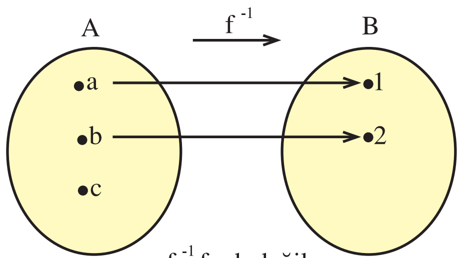
dikkat edilirse g(x), f (x) fonksiyonunun bileşke işlemine göre tersidir. (İşlem bilgisini hatırlayınız.)

BİR FONKSİYONUN TERSİ

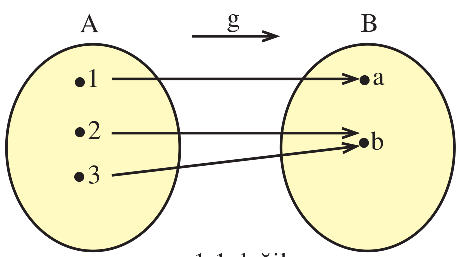
Her fonksiyonun tersi vardır. Ancak her fonksiyonun tersi fonksiyon değildir. Bir fonksiyonun tersininde fonksiyon olması için o fonksiyonun bire bir ve örten olması gerekir. Aksi hâlde o fonksiyonun ters fonksiyonundan söz edemeyiz.



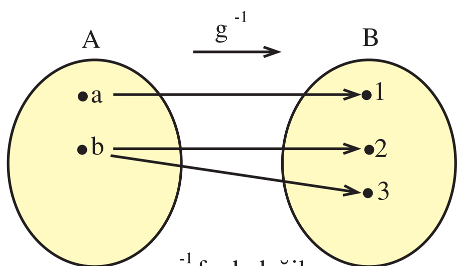
f örten değil



f^{-1} fonk değil



g 1:1 değil



g^{-1} fonk değil

f fonksiyonu, A'dan B'ye tanımlanmış bire bir ve örten fonksiyon ise, fog = gof = I koşulunu sağlayan g fonksiyonuna f fonksiyonunun tersi denir ve f^{-1} ile gösterilir.

f= A→B bire bir ve örten fonksiyon I: A →A birim fonksiyon olsun

$fof^{-1} = f^{-1} of = I$

Örnek: $A=\{-1, 0, 1, 2\}$, $B=\{-1, 1, 3, 5\}$

kümeleri ile $f: A \rightarrow B$

$f: x \rightarrow 2x+1$ fonksiyonu veriliyor.

a) f, 1-1 ve örten midir?

b) f^{-1} var mıdır?

c) $f^{-1}(x)$ nedir?

d) f^{-1} liste biçiminde yazınız.

Çözüm: a) $f(x) = 2x+1$

$f(-1) = 2(-1)+1 = -1$

$f(0) = 2.0+1 = 1$

$f(1) = 2.1+1 = 3$

$f(2) = 2.2+1 = 5$ olduğundan, bire bir dir.

Ayrıca B kümesinde açıkta eleman kalmadığından örtendir.

b) f, 1- 1 ve örten olduğundan f^{-1} mevcuttur.

c) Hatırlatma: bir fonksiyonun tersi bulunurken, x yerine y, y yerine x yazılır. Buradan y çekilir. Bulunan $y= f^{-1}(x)$ dir.

O hâlde, $f(x) = 2x+1$

$y= 2x+1$ (x yerine y, y yerine x yazalım)

$x = 2y+1$ (y'yi çekelim)

$x- 1 = 2y$

$y=\frac{x-1}{2}$ o hâlde, $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$ dir.

d) $f^{-1}=\{(-1, -1), (1,0), (3, 1), (5,2)\}$

Bir fonksiyonun tersini almada pratik kural

$a, b, c, d \in IR$ $a\neq 0$, $c\neq 0$ olmak üzere,

$f(x) = ax+b$ fonksiyonunun tersi $f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$ dır.

$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ fonksiyonunun tersi $f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$

Örnek: Aşağıdaki fonksiyonlar 1- 1 ve örten olduğuna göre, terslerini bulalım.

a) $f(x) = 2x-1$

b) $f(x) = \frac{2x+1}{3x-1}$

c) $f(x) = \frac{1-2x}{x-3}$

d) $f(x) = 2-3x$

Çözüm

a) $f(x) = 2x-1$ ise $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$

b) $f(x) = \frac{2x+1}{3x-1}$ ise $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{3x-2}$

c) $f(x) = \frac{1-2x}{x-3} = \frac{-2x+1}{x-3}$ ise $f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{x+2}$

d) $f(x) = 2-3x = -3x+2$ ise $f^{-1}(x) = \frac{x-2}{-3}$

Not: fonksiyonun tersinin tersi, kendisidir. $(f^{-1})^{-1} = f$

Örnek: $f(x) = x-1$ bire bir örten fonksiyon olsun.

$f^{-1}(x) = x+1$

$(f^{-1})^{-1} = (x+1)^{-1} = x-1$ o hâlde,

$f(x) = (f^{-1}(x))^{-1}$ olduğu açıktır.

Örnek: $x < -3$ ve $f(x) = x^2+6x+10$ bire bir örten olduğu bilindiğine göre,

$f^{1}(x)$ nedir?

Çözüm: $f(x) = y$ olduğundan

$y = x^2+6x+10$ (x yerine y, y yerine x yazıp,

y'yi çekelim. O zaman, $x < -3$ şartı

$y < -3$ olur.

$y+3 < 0$

$$x = y^2+6y+10$$

$$x = (y+3)^2+1$$

$$x-1 = (y+3)^2$$

$$\sqrt{x-1} = |y+3|$$

$$\sqrt{x-1} = -y-3$$

$$y = -3-\sqrt{x-1}$$

Örnek: $f: R \to R$, $f(x) = x+3$, $(fog)(x) = 2x-1$

ise $g^{-1}(x)$ nedir?

Çözüm

I. YOL

$(fog)(x) = f\big(g(x)\big) = 2x-1$

$= g(x) + 3 = 2x - 1$

$= g(x) = 2x-1-3$

$= g(x) = 2x-4$

$= g^{-1}(x) = \dfrac{x+4}{2}$

II. YOL

$\underbrace{f^{-1}o\,(fog)}_{I(x)}(x) = f^{-1}o\,(2x-1)$

$(Iog)(x) = (x-3)\ o\ (2x-1)$

$g(x) = 2x - 1 - 3 = 2x - 4$

$g^{-1}(x) = \dfrac{x+4}{2}$

Örnek: $f:R\to R$, $g: R\to R$

$(fog)(x) = 2x+1$, $g(x) = x-5$ ise $f(x) = ?$

Çözüm

Not : $fog(x) = A(x)$

$f^{-1}(x)o(fog)(x) = f^{-1}(x)\ oA(x)$

$\underbrace{I\ og\ (x)}_{g(x)} = f^{-1}(x)\ oA(x)$

Not : $(fog)(x) = A(x)$

$(f\underbrace{og)(x)\ og^{-1}}_{I(x)}(x) = A(x)\ og^{-1}(x)$

$(foI)(x) = A(x)\ og^{-1}(x)$

$f(x) = A(x)\ og^{-1}(x)$

O halde örneğin çözümü,

$(fog)\,og^{-1} = (2x+1)\,og^{-1}(x)$

$fo\big(gog^{-1}\big) = (2x+1)\ o(x+5)$

$foI = 2(x+5) + 1$

$f(x) = 2x+11$

olarak bulunur.

Örnek: f, g: R $\to$ R

$f^{-1}(x) = 3x+1$ ve $(gof^{-1})(x) = 4+x$ fonksiyonları veriliyor.

Buna göre, g (x)'i bulalım.

Çözüm : $(gof^{-1})(x) = 4+x$

$$\underbrace{(gof^{-1})\,of}_{goI} = (4+x)\,of$$

$g = (4+x)\,of$

$g = (4+x)\,o\left(\frac{x-1}{3}\right)$

$g(x) = 4 + \frac{x-1}{3} = \frac{12+x-1}{3} = \frac{x+11}{3}$

$\left(f^{-1}(x) = 3x+1\text{ ise tersinin tersi kendisine eşit olduğundan } f(x) = \frac{x-1}{3}\right)$

Örnek: f: R$\to$R, f(x) = 2x-1 (fof) (a) = 9 ise a= ?

Çözüm: (fof) (x) = f [f (x)]

= 2.(2x -1) - 1

(fof) (x) = 4x -3

(fof) (a) = 4a - 3 = 9

4a = 12

a= 3 olarak bulunur.

Örnek: f(x) doğrusal bir fonksiyon olsun

f (1) = 2 ve f (2) = 3 ise $f^{-1}(4)$'ün değerini bulalım

Çözüm: f(x) doğrusul bir fonksiyon ise,

f(x) = ax+b dir.

f(1) = a+b = 2

f(2) = 2a+b= 3

$-2 /\ a + b = 2 \qquad -2a - 2b = -4 \qquad b = 1$ ise

$2a + b = 3 \qquad \underline{+\ 2a + b = 3} \qquad a+b = 2$ yerine

$-b = -1$ yazalım.

$b = 1 \qquad a + 1 = 2$

$a = 1$

O hâlde, $f(x) = 1.x + 1 = x + 1$ dir.

$f^{-1}(x) = x - 1$

$f^{-1}(4) = 4 - 1 = 3$ olarak bulunur.

Örnek: $R \to R$ ye tanımlı bire bir ve örten f ve g fonksiyonları için

$f^{-1}(2) = 3$ ve $g(4) = 2$ ise $(f^{-1} o g)^{-1}(3)$

Çözüm

Not: $(fog)^{-1} = g^{-1} o f^{-1}$ dir. O hâlde,

$f^{-1}(2) = 3 \Rightarrow f(3) = 2$ dir.

$(f^{-1} o g)^{-1}(3) = (g^{-1} o f)(3) = g^{-1}\{f(3)\}$

$= g^{-1}(2) = 4$

$(fog)^{-1} = g^{-1} o f^{-1}$

$(gof)^{-1} = f^{-1} o g^{-1}$

FONKSİYONLARDA İŞLEMLER

f: $R \to R$, g: $R \to R$ iki fonksiyon ve $\lambda \in R$ olmak üzere

1. f ile g nin toplamı $\forall x \in R$ için $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

2. f nin λ ile çarpımı, $\forall x \in R$ için $(\lambda f)(x) = \lambda . f(x)$

3. f ile g nin çarpımı, $\forall x \in R$ için $(f.g)(x) = f(x) . g(x)$

4. f nin, g ye bölümü $\forall x \in R$ için

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \left(\forall x \in R \text{ için } g(x) \neq 0\right)$$

olarak tanımlanır.

Örnek: $f: R \rightarrow R$, $g : R \rightarrow R$ $f(x) = 2x$, $g(x) = x^2 - 1$ iki fonksiyon ise,

a) $(f+g)(x)$ b) $5.f(x)$ c) $2f(x)+3g(x)$

d) $(f.g)(x)$ e) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ fonksiyonlarını bulunuz?

Çözüm

a) $(f+g)(x) = x^2+2x-1$

b) $5f(x) = 5.(2x) = 10x$

c) $\left.\begin{array}{l} 2f(x) = 4x \\ 3g(x) = 3x^2 - 3 \end{array}\right\} \; 2f(x) + 3g(x) = 3x^2 + 4x - 3$

d) $(f.g)(x) = 2x(x^2-1) = 2x^3 - 2x$

e) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x}{x^2-1}, \left(x^2 - 1 \neq 0\right)$

FONKSİYONLARIN TANIM VE DEĞER KÜMELERİNİ BULMAK

A. Polinom şeklineki fonksiyonların tanım ve değer kümeleri R dır.

Yani, $f(x) = a_o + a_1 x + \dots\dots\dots\dots + a_n x$

şeklinde ise $f : R \rightarrow R$ dir.

B. Rasyonel fonksiyonlarda tanım kümesini bulmak için R'den varsa paydayı sıfır yapan değerler çıkartılır. Değer kümesini bulmak için de fonksyionun tersi alınır, paydayı sıfır yapan değerler R den çıkartılır. Yani,

$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ şeklinde ise

$\left(\begin{array}{r} cx + d = 0 \\ cx = -d \\ x = -\frac{d}{c} \end{array} \right)$

tanım kümesi $R - \left\{\frac{-d}{c}\right\}$

Değer kümesini bulmak için;

$f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$

$\left(\begin{array}{r} cx - a = 0 \\ cx = a \\ x = \frac{a}{c} \end{array} \right)$

Değer kümesi $R - \left\{\frac{a}{c}\right\}$

O hâlde, fonksiyonu

$f: R - \left\{\frac{-d}{c}\right\} \rightarrow R - \left\{\frac{a}{c}\right\}$

ile göstermeliyiz.

Örnek: $f(x) = \dfrac{2x-1}{3x-4}$ fonksiyonun tanım ve değer kümelerini bulunuz?

Çözüm: $3x - 4 = 0$ Tanım kümesi $R - \left\{\dfrac{4}{3}\right\}$

$3x = 4$

$x = 4/3$

$f^{-1}(x) = \dfrac{4x - 1}{3x - 2}$

$3x + 2 = 0$ $x = 2/3$ Değer kümesi $IR - \left\{\dfrac{2}{3}\right\}$

$\sqrt[n]{f(x)}$ fonksiyonunun tanım kümesi

n, tek ise tanım kümesi f(x) ile aynı,

n, çift ise tanım kümesi $\{ f(x) \geq 0,\ x \in R \}$

log f(x) fonksiyonun tanım kümesi $f(x) > 0$

tan f(x) fonksiyonu $x \neq k\pi$ için tanımlıdır.

cot f(x) fonksiyonu $x \neq k\pi$ için tanımlıdır.

Örnek: Aşağıdaki fonksiyonların tanım kümelerini bulunuz.

a) $f(x) = \sqrt[3]{x + 1}$

b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

Çözüm: **a)** n = 3 tek olduğundan tanım kümesi x+1 ile aynı, R dir.

b) $x^2 - 1 \geq 0$

$(x - 1)(x + 1) = 0$

$x = -1, \quad x = 1$

Tanım kümesi $= (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f(x)		+	0	-	0	+	
		Tanım Kümesi				Tanım Kümesi	

Örnek: log (2x - 1) tanım kümesini bulunuz.

$2x - 1 > 0$ dan $2x > 1$

$x > \dfrac{1}{2}$ dir.

Örnek: $f(x) = x^x$ fonksiyonun en geniş tanım kümesini bulunuz.

Çözüm: 0^0 belirsiz ve $x \neq 0$ için x^x tanımlı olduğundan, fonksiyonun tanım kümesi R-{0} dır.

Örnek: $f(x) = \sqrt{\log_{1/10}(2x-1)}$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz.

Çözüm: $2x - 1 > 0$ ve $\log_{1/10}.(2x-1) \geq 0$ için tanımlı

$2x > 1$ ve $\log_{1/10}(2x-1) \geq 0$

$x > 1/2$ ve $-\log(2x-1) \geq 0$

(Eşitsizliği - ile çarpmak ya da bölmek eşitsizliğin yönünü değiştirir.

$\log(2x-1) \leq 0$

$2x - 1 \leq 1$

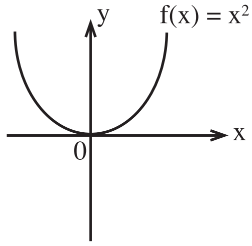
$x \leq 1$

O hâlde tanım kümesi $(1/2\,,\,1]$ olur.

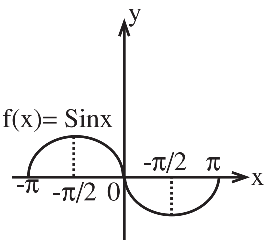
$\log(2x-1) \leq 0$
$\log(2x-1) \leq \log {}^{1}_{10}$
$2x - 1 \leq 1$

TEK VE ÇİFT FONKSİYONLAR

f: R→R bir fonksiyon olsun.



Çift fonksiyon



f:[-π, π]→R
f(x) = Sin x
tek fonksiyon

1. $f(-x) = f(x)$ ise f ye çift fonksiyon

2. $f(-x) = -f(x)$ ise f ye tek fonksiyon

Çift fonksiyonun grafiği y eksenine göre simetrik
Tek fonksiyonun grafiği orijine göre simetriktir.

Örnek: f:R→R olduğuna göre, aşağıdaki fonksiyonların tek mi çift mi, olduğunu söyleyiniz.

a) $f(x) = x^3$ **b)** $f(x) = x^2$ **c)** $f(x) = \sin x$

d) $f(x) = \cos(x)$ **e)** $f(x) = x^2 + x^3$

Çözüm

a) $f(x) = x^3$

$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -\ f(x)$

$f(-x) = -f\ (x)$ olduğundan $f\ (x) = x^3$ tek fonksiyondur.

b) $f(x) = x^2$

$f(\ -x) = (-x)^2 = x^2 = f\ (x)$

$f\ (-x) = f\ (x)$ olduğundan $f(x) = x^2$ çift fonksiyondur.

c) $f(x) = \sin x$

$f(-x) = \sin\ (-x) = -\sin x = -f(x)$

$f(-x) = -f\ (x)$ olduğundan $f(x) = \sin x$ tek fonksiyondur.

d) $f(x) = \cos\ (x)$ fonksiyonunda,

$f(-x) = \cos\ (-x) = \cos x = f(x)$

$f(-x) = f(x)$ olduğundan $f(x) = \cos x$ fonksiyonu çift fonksiyondur.

e) $f(x) = x^3 + x^2$ fonksiyonunda

$f(-x) = (-x)^3 + (-x)^2$

$= -x^3 + x^2$ dikkat edilirse

$f(-x) = f(x)$ ya da $f\ (-x) = -f(x)$ olmuyor.

O hâlde, $f(x)$ ne tek ne de çift fonksiyondur.

FONKSİYON GRAFİKLERİ

f: A→ B, f(x) = y fonksiyonu verilsin.

f= {(x ,y) : y = f(x), x∈A, y∈B} kümesine düzlemde karşılık gelen noktaların oluşturduğu şekle f fonksiyonun grafiği denir.

Fonksiyonların grafiklerini çizmek için aşağıdaki hatırlatmaları dikkatle inceleyiniz.

A. Eğer fonksiyon doğrusal ise

yani $f(x)=ax+b$ şeklinde fonksiyonların

grafikleri için $f(x) = y = ax+b$ olduğundan

$x=0$ için $y= b$ de y eksenini

$y=0$ için $x = -b/a$ x eksenini kestiği nokta bulunur.

Bu noktalardan geçen doğru çizilir.

Örnek: $f(x) = 2x - 4$ fonksiyon grafiği

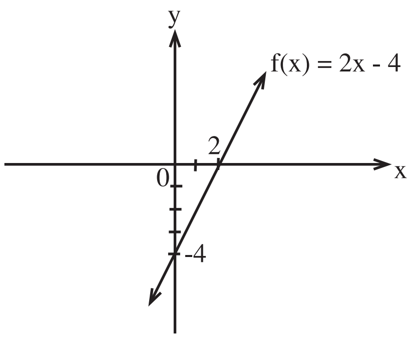
$f(x) = 2x - 4$

$y = 2x - 4$

$x = 0$ için $y = -4$ $(0, -4)$ y eksenini

$y = 0$ için $x = 2$ $(2, 0)$ x eksenini keser.

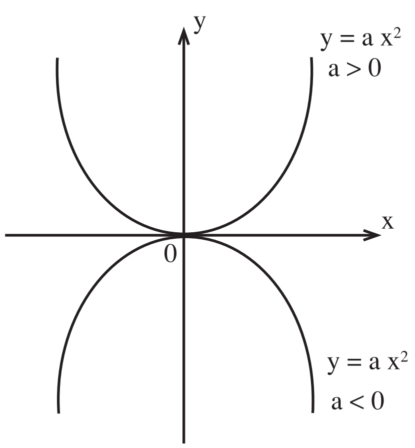
Bu noktaları XOY koordinat sisteminde belirler ve doğru grafiğini çizeriz.

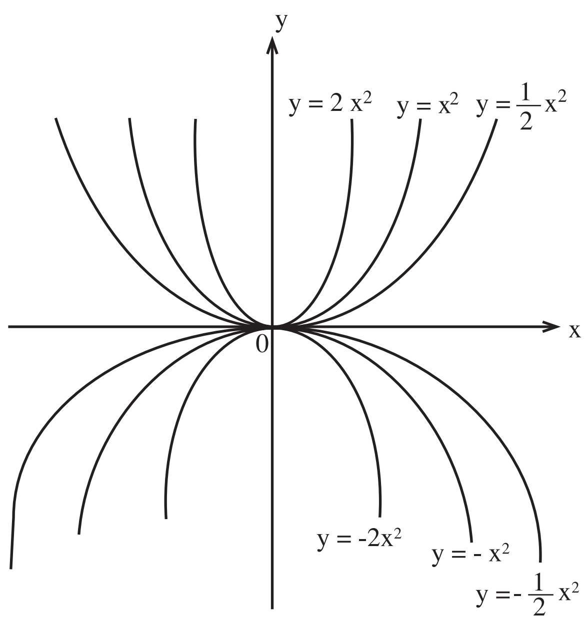


B. İkinci dereceden polinom şeklindeki fonksiyonların grafikleri **parabol** şeklindedir.

B.1) $y = f(x) = ax^2$ $a > 0$ ise kollar yukarı doğru,

$a < 0$ ise kollar aşağı doğru olacak şekilde orjinden başlayan parabol eğrileridir.

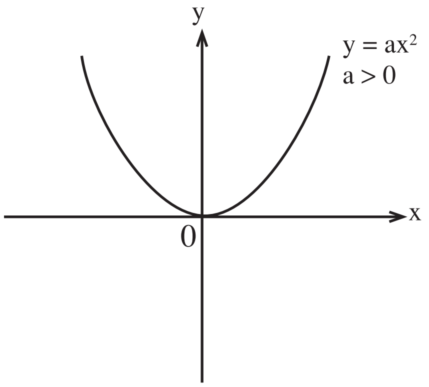


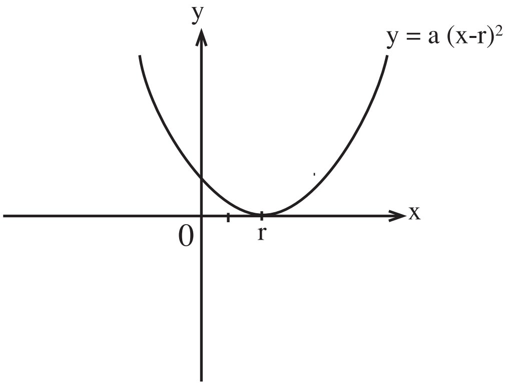


B.2) $f(x) = y = a\,(x \pm r)^2$

grafiğini çizmek için önce $y = ax^2$ fonksiyonun grafiği çizilir. Sonra grafik x ekseni üzerinde r bilim sola veya sağa kaydırılarak çizilir.

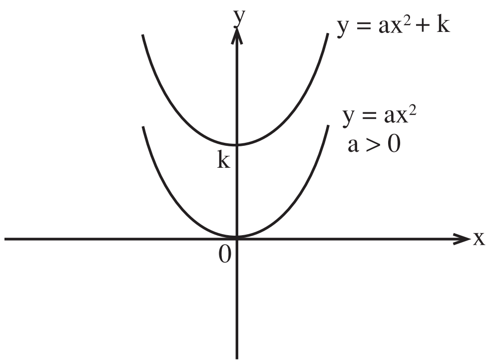
Örnek



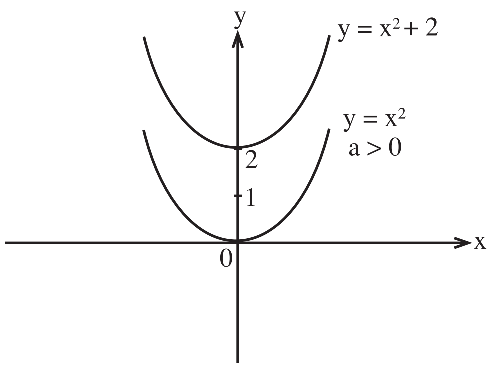


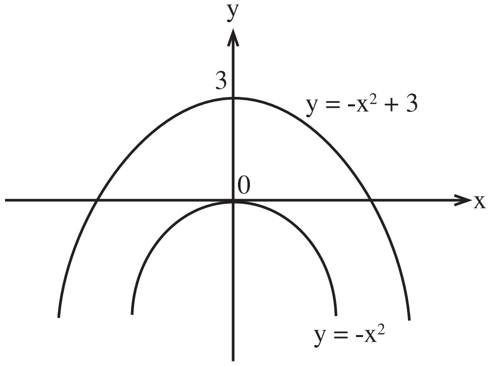
B.3) $y = f(x) = ax^2 + k$ öncelikle $y = ax^2$ grafiği çizilir. Sonra k birim y ekseni üzerinde kaydırılır.

Şekil



Örnek





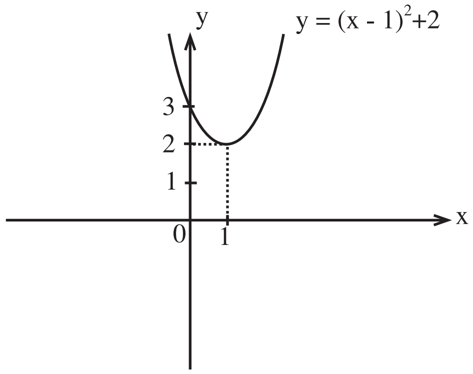
B.4) $f(x) = y = a\,(x-r)^2 + k$

Bu fonksiyon grafiğinde tepe noktası belirlenir. Tepe noktası T(r,k) belirlenecek. Sonra a'nın durumuna göre fonksiyon çizilir.

$y = f(x) = (x-1)^2+2$ $\quad a = 1 > 0$ kollar yukarı doğru

Tepe noktası (1, 2)

$x = 0$ için $y = (-1)^2 + 2 = 3$



B.5) $f(x) = y = ax^2 + bx + c$

Bu tür fonksiyonların grafikleri çizilirken

$x = 0$ için y eksenini kestiği nokta

$y = 0$ için x eksenini kestiği nokta bulunur.

Tepe noktasını bulmak için

$r = -\dfrac{b}{2a}$, $k = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$ formüllerinden yararlanılır.

Örnek: $y = f(x) = x^2 - 2x - 3$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Çözüm: $x = 0$ için $\quad y = -3$

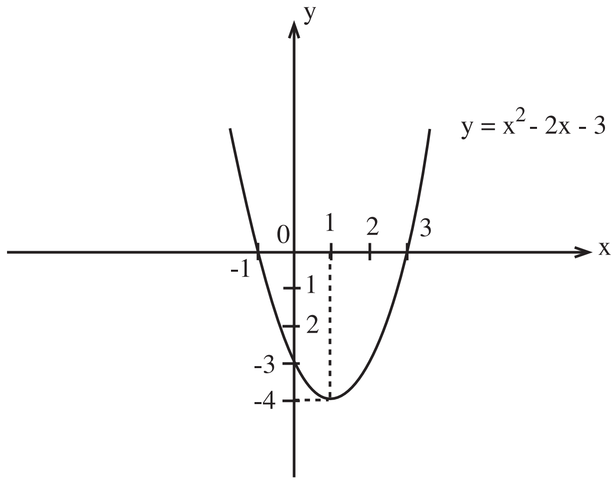
$y = 0$ için $\quad x = 3$ veya $x = -1$ $\longrightarrow$

$r = -\dfrac{b}{2a}$ dan $\quad r = 1$

$k = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$ dan $\quad k = -4 \qquad$ T (1,-4)

$x^2 - 2x - 3 = 0$
$(x - 3)(x + 1) = 0$
$x - 3 = 0$ veya $x + 1 = 0$
$x = 3$ veya $x = -1$ bulunur.

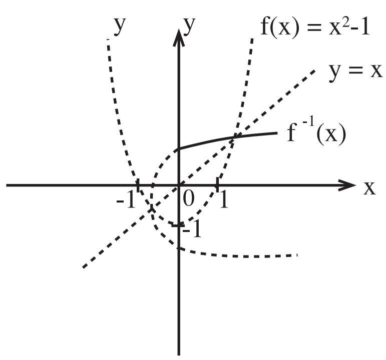
Şekil



TERS FONKSİYONLARIN GRAFİKLERİ

Örnek: $f = R^{+} \rightarrow R$, $f(x) = x^2 - 1$ ise f^{-1} in grafiğini çiziniz.

Çizim: Dikkat edilirse tanım kümesi R^{+}

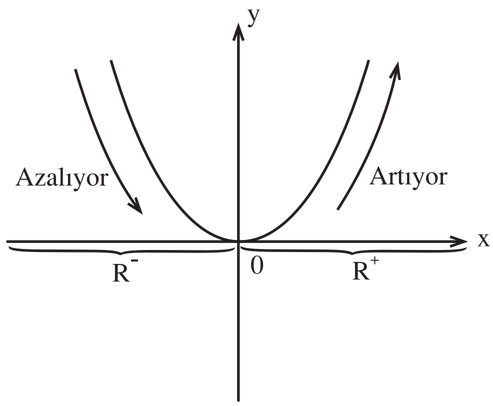


ARTAN VE AZALAN FONKSİYONLAR

$A \subset R$, ve $f:A \rightarrow B$ bir fonksiyon olsun.

1. $x_2 > x_1$ için $f(x_2) > f(x_1)$ ise fonksiyona artan
2. $x_2 > x_1$ için $f(x_2) < f(x_1)$ ise fonksiyona azalan
3. $x_2 > x_1$ için $f(x_2) = f(x_1)$ ise fonksiyona sabit sabit fonksiyon denir.

Örnek: $f(x) = x^2$ fonksiyonu ele alalım. Grafik aşağıda olduğu gibidir.



Grafiğe dikkat edilirse $f(x) = x^2$ R^- de azalmış R^+ da artmışdır. Aynı örneği x'e değerler vererek inceleyelim.

R^+ da iki sayı düşünelim.

$$\left.\begin{array}{l} x_2 = 2 \\ x_1 = 1 \end{array}\right\} \; x_2 > x_1 \text{ iken}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x_2) = (2)^2 = 4 \\ f(x_1) = (1)^2 = 1 \end{array}\right\} \; f(x_2) < f(x_1) \text{ dir.}$$

O hâlde R^+ da artan

R^- de iki sayı düşünelim.

$$\left.\begin{array}{l} x_2 = -1 \\ x_1 = -2 \end{array}\right\} \; x_2 > x_1 \text{ iken}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x_2) = (-1)^2 = 1 \\ f(x_1) = (-2)^2 = 4 \end{array}\right\} \; f(x_2) < f(x_1) \text{ dir.}$$

O hâlde R^- de fonksiyon azalandır.

Ancak bu yol her zaman sağlıklı değildir. Çünkü sayısal ifadelerde yapılan ispat ve sonuçlar ifadeyi her zaman doğrulamaz.

Örnek: $f(x) = 2^x$ fonksiyonun artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz.

Çözüm: Fonksiyonun grafiğini çizerek görmek daha basit olduğundan,

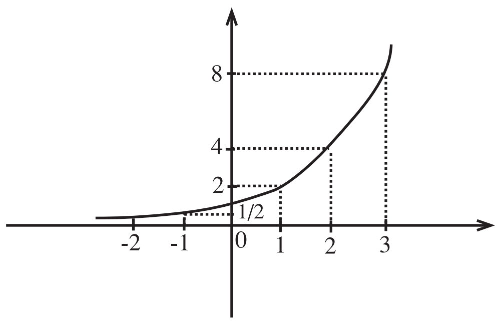
$x = 1$ için $f(1) = 2$ $\qquad$ $x = -1$ için $f(-1) = 1/2$

$x = 2$ için $f(2) = 4$ $\qquad$ $x = -2$ için $f(-2) = 1/4$

$x = 3$ için $f(2) = 8$

$\forall x_1, x_2 \in R$ için $x_2 > x_1 \Rightarrow 2^{x_2} > 2^{x_1}$

O hâlde fonksiyon R de artandır.



Örnek: $f(x)=\ln x$ fonksiyonun artan ve azalan olduğu aralıkları belirleyiniz.

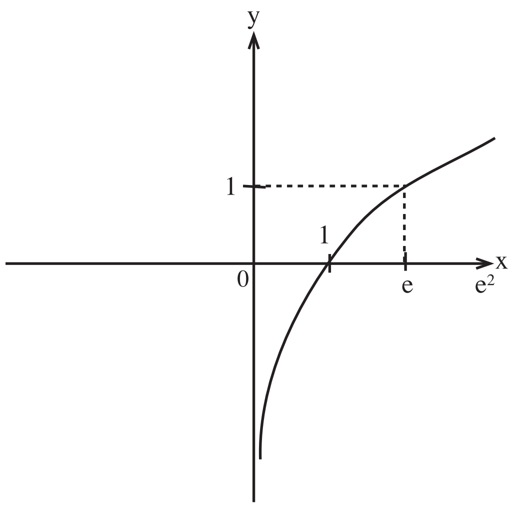
Çözüm: Fonksiyonun grafiğini çizelim.

$f(x) = \ln x = \log_e x$

$f(1) = \ln 1 = 0$

$f(e) = \ln e = 1$

$f(e^2) = \ln e^2 = 2$



$x_1 < x_2$ iken $f(x_1) < f(x_2)$ olduğundan $f(x) = \ln x$ fonksiyonu aratandır.

Bundan sonraki konularımızda, parçalı fonksiyonunun, mutlak değer fonksiyonunun, tam kısım fonksiyonunun ve işaret fonksiyonunun özeliklerini araştıracağız, grafiklerinin nasıl çizildiğini öğreneceğiz.

PARÇALI FONKSİYONLARIN GRAFİKLERİ

$$f(x) = \begin{cases} f(x), & x < a \text{ ise,} \\ h(x), & a \leq x < b \text{ ise,} \\ k(x), & x \geq b \text{ ise} \end{cases}$$

a,b, sayılarına fonksiyonun kritik noktası denir. Fonksiyon bu noktalarda değişikliklere uğrar. (Sıçrama, kıvrılma,... gibi) Parçalı fonksiyonların grafiklerini çizmeden önce lise 1 konusu olan doğru ve parabol grafiklerinin nasıl çizildiğini tekrar etmede fayda olacağına inanıyoruz.

Örnek:

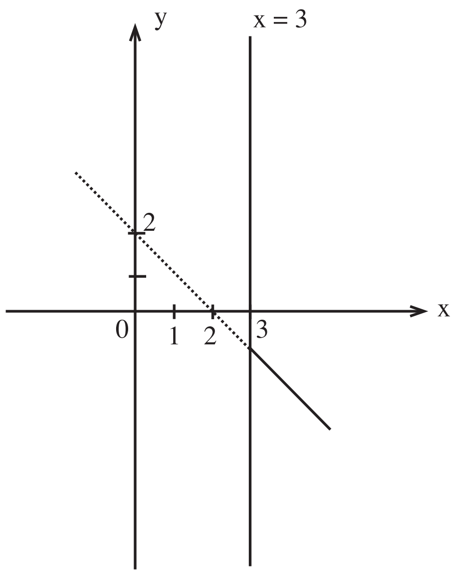
$$f(x) = \begin{cases} 2 - x & , x \geq 3 \text{ ise} \\ x + 1 & , x < 3 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonun grafiğini çizelim.

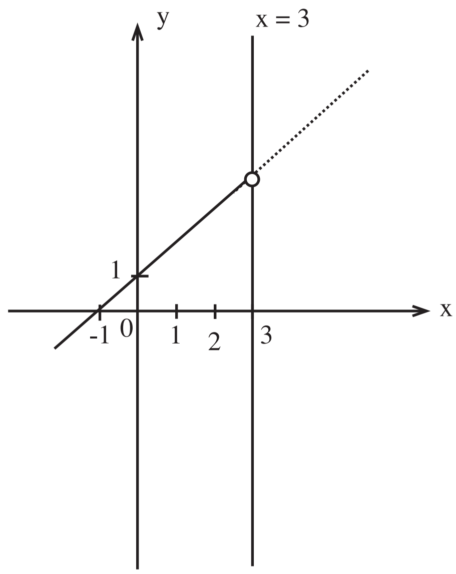
Parçalı fonksiyonu analiz ederken $x \geq 3$ noktalarında fonksiyonun $f(x)=2-x$ olduğunu, $x < 3$ iken ise fonksiyonun $f(x) = x+1$ olduğunu görmüştük.

O hâlde $x \geq 3$ noktalarında $f(x) = 2 - x$ in grafiğini çizelim.

Önce, $f(x) = 2 - x$ grafiğini çizip sonra $x \geq 3$ durumunu inceleyelim.

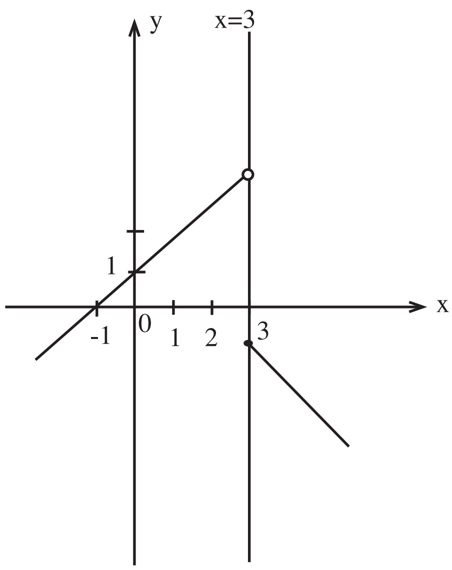


$f(x) = 2 - x$
$x = 0$ için $y = 2$
$y = 0$ için $x = 2$



$f(x) = x + 1$
$x = 0$ için $y = 1$
$y = 0$ için $x = -1$

Yukarıdaki iki şekli tek şekil ile gösterirsek,



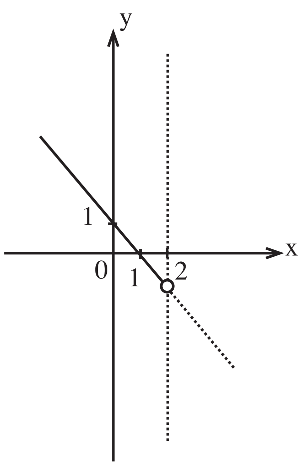
şekli elde edilir.

Örnek:

$$f(x)\begin{cases} 1-x & , \quad x<2 \text{ ise} \\ 5 & , \quad x=2 \text{ ise} \\ x^2 & , \quad x>2 \text{ ise} \end{cases}$$

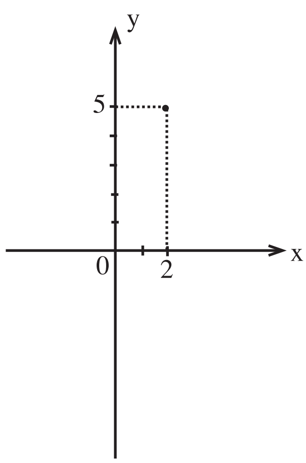
fonksiyonun grafiğini çizelim.

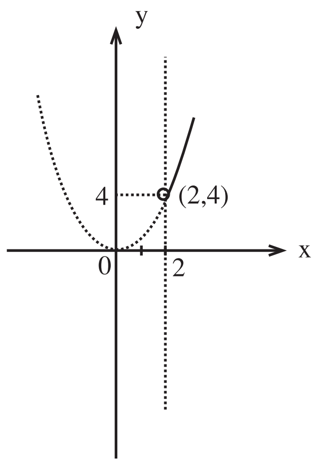
Çözüm:



$f(x)=1-x \ , \ x<2$

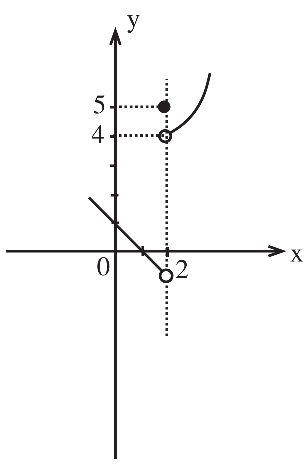
x	0	1
y	1	0



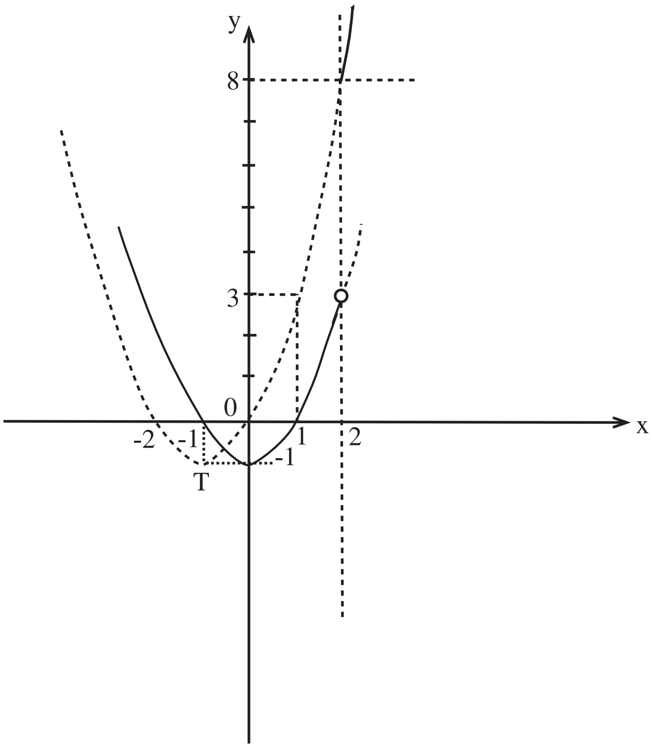


$x=2$ için $f(2)=4$

Bu üç şekli birleştirelim.



Örnek: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 2 \text{ ise} \\ (x+1)^2 - 1, & x \geq 2 \text{ ise} \end{cases}$



MUTLAK DEĞER FONKSİYONU VE MUTLAK DEĞER FONKSİYON GRAFİKLERİ

n çift ise

$$\sqrt[n]{[(f(x)]^n} = |f\ (x)| = \begin{cases} f(x) & , \ f(x) \geq 0 \text{ ise} \\ -f(x) & , \ f(x) < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

Şekinde tanımlanan fonksiyona mutlak değer fonksiyonu denir.
Mutlak değer fonksiyonu incelenirken önce kritik noktalar bulunur. Sonra parçalı fonksiyon halinde yazılıp, grafiği çizilir.

Örnek: $f(x) = |x+2|$ fonksiyonu parçalı fonksiyon olarak yazınız.

Çözüm

$x \geq -2$ için $|x+2| = x+2$

$x < -2$ için $|x+2| = -x-2$ olduğundan $|x+2| = \begin{cases} x+2, & x \geq -2 \text{ ise} \\ -x-2, & < -2 \text{ ise} \end{cases}$

Örnek: $f(x) = |x - 2| - x$ fonksiyonun grafiğini çizelim.

Önce f(x) fonksiyonunu parçalı fonksiyon olarak yazalım. Mutlak değer tanımı gereğince;

$|x-2|$ de $x - 2 = 0$ dan, $x = 2$ kritik noktadır.

$x \geq 2$ için, $f(x) = x - 2 - x = -2$

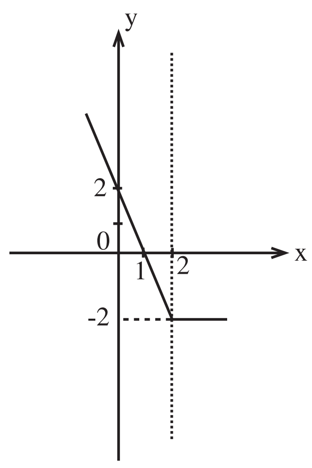
$x < 2$ için, $f(x) = -x + 2 - x = 2 - 2x$

parçalı fonksiyon olarak yazarsak;

$$f(x) = \begin{cases} -2, & x \geq 2 \text{ ise} \\ 2-2x & x < 2 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde parçalı fonksiyon olarak yazılır.

Şimdi grafiği çizelim. Önce $x \geq 2$ için $f(x) = -2$ nin grafiğini sonra da $x < 2$ nin $f(x) = 2 - 2x$' in grafiğini çizilerek grafik son şeklini alır.



Örnek: $f(x) = |x-1| + |x|$ fonksiyonun grafiğini çiziniz.

Çözüm: $x - 1 = 0$

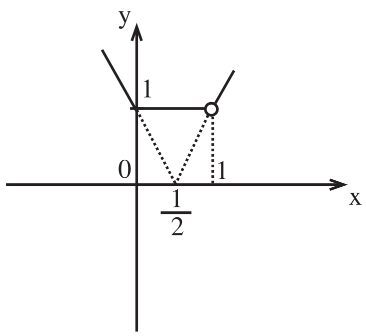
$x = 1$ ve $x = 0$ kritik noktalar

$x < 0$ için $f(x) = -x + 1 - x = -2x + 1$

$0 \leq x < 1$ için $f(x) = -x + 1 + x = 1$

$x \geq 1$ için $f(x) = x - 1 + x = 2x - 1$

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 1, & x < 0 \text{ ise} \\ 1 & 0 \leq x < 1 \text{ ise} \\ 2x - 1 & 1 \leq x \text{ ise.} \end{cases}$$



Örnek: $f(x) = |2 - x| - |x + 2|$ fonksiyonun grafiğini çiziniz.

Çözüm: $2 - x = 0$ dan $x = 2$

$x + 2 = 0$ dan $x = -2$ kritik noktalardır.

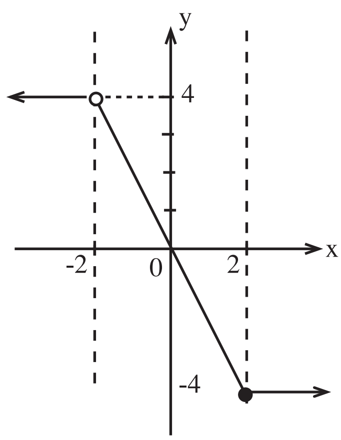
$x < -2$ nin $f(x) = 2 - x + x + 2 = 4$

$-2 \leq x < 2$ için $f(x) = 2 - x - x - 2 = -2x$

$x \geq 2$ için $f(x) = -2 + x - x - 2 = -4$

parçalı fonksiyon olarak yazarsak

$$f(x) = \begin{cases} 4 & x < -2 \text{ ise} \\ -2x & -2 \leq x < 2 \text{ ise} \\ -4 & x \geq 2 \text{ ise} \end{cases}$$



Şeklinde parçalı fonksiyon olarak yazılır.

Bu parçalı fonksiyonun grafiği yandaki şekilde gösterilmiştir.

Örnek: f(x) = |x-2| + |1-x| fonksiyonunu parçalı fonksiyon olarak yazınız.

Çözüm : x =2 ve x = 1 kritik noktalar

$x < 1$ için $f(x) = -x + 2 + 1 - x = 3 - 2x$

$1 \leq x < 2$ için $f(x) = -x + 2 - 1 + x = 1$

$x \geq 2$ için $f(x) = x - 2 - 1 + x = -3 + 2x$

$$f(x) = \begin{cases} 3 - 2x, & x < 1 \text{ ise} \\ 1, & 1 \leq x < 2 \text{ ise} \\ -3 + 2x, & x \geq 2 \text{ ise} \end{cases}$$

İŞARET FONKSİYONU VE İŞARET FONKSİYONU GRAFİKLERİ

İşaret fonksiyonu sgnf (x) ile gösterilir.

$A \subset R$ ve $f : A \rightarrow R$ bir fonksiyon olsun

$$y = \mathrm{Sgnf}(x) = \begin{cases} 1, & f(x) > 0 \text{ ise} \\ 0, & f(x) = 0 \text{ ise} \\ -1, & f(x) < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

Şeklinde tanımlanan fonksiyona signum fonksiyonu veya işaret fonksiyonu denir. Signum fonksiyonun kritik noktası signum fonksiyonunun içini sıfır yapan x değerlerdir. Signum fonksiyonunun grafiği çizilirken, önce fonksiyon parçalı fonksiyon olarak yazılır. Sonra parçalı fonksiyonların grafiği yardımıyla çizim yapılır.

Örnek: $f = R \rightarrow R$

$f(x) = \mathrm{Sgn}(x^2 - 2x - 15)$ fonksiyonunu parçalı fonksiyon olarak yazınız.

Çözüm

$x^2 - 2x - 15 = (x-5)(x+3) = 0$

$x - 5 = 0$ ise $\quad x = 5$

$x + 3 = 0$ ise $\quad x = -3$

Şimdi tablosunu yazalım.

x	$-\infty$		-3		5		$+\infty$
$x^2 - 2x - 15$		$+$	o	$-$	o	$+$	
$Sgn(x^2 - 2x - 15)$		$+1$	o	-1	o	$+1$	

O hâlde

$$f(x) = Sgn(x^2 - 2x - 15) = \begin{cases} +1 & x < -3 \ \vee \ x > 5 \\ 0 & x = -3 \ \vee \ x = 5 \\ -1 & -3 < x < 5 \quad \text{ise} \end{cases}$$

şeklinde parçalanır.

Örnek: $f : R \to R$

$f(x) = Sgn(4 - x^2)$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm: Verilen fonksiyonu önce parçalı fonksiyon olarak yazalım.

$4 - x^2 = 0$

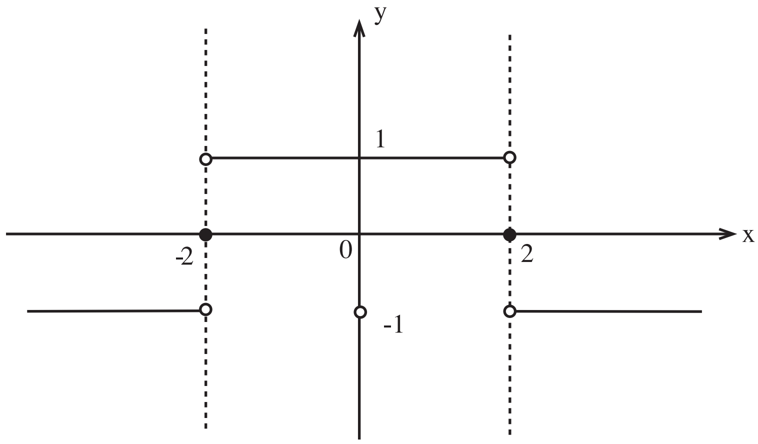
$(2 - x)(2 + x) = 0$

O hâlde, $x = 2$ ve $x = -2$ kritik noktalardır.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$4 - x^2$		$-$	o	$+$	o	$-$	
$Sgn(4 - x^2)$		-1	o	$+1$	o	-1	

$$Sgn(4 - x^2) = \begin{cases} -1 & x < -2 \ \vee \ x > 2 \\ 0 & x = -2 \ \vee \ x = 2 \\ +1 & -2 < x < 2 \quad \text{ise} \end{cases}$$

şeklinde parçalanır.



Örnek: $f : R \rightarrow R$

$f(x) = sgn(x^2 - 5x - 14)$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

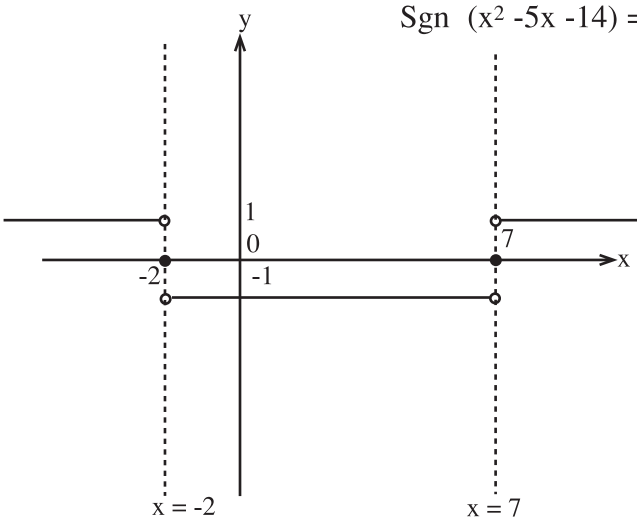
Çözüm: Verilen fonksiyonu önce parçalı fonksiyon olarak yazalım.

$x^2 - 5x - 14 = (x - 7)(x + 2) = 0$

$x = 7$ ve $x = -2$ kritik noktalar

x	$-\infty$	-2		7	$+\infty$
$x^2 - 2x - 15$	+	0	-	0	+
$Sgn(x^2 - 2x - 15)$	+1	0	-1	0	+1

$$Sgn(x^2 - 5x - 14) = \begin{cases} +1, & x < -2 \ \vee \ x > 7 \\ 0, & x = -2 \ \vee \ x = 7 \\ -1, & -2 < x < 7 \text{ ise} \end{cases}$$



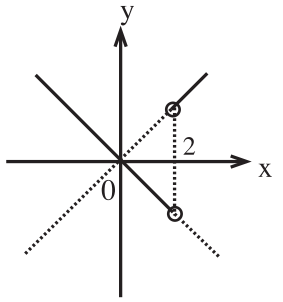
Örnek: f : R→R

$f(x) = x.\ sgn\ (x - 2)$ fonksiyonun grafiğini çiziniz.

Çözüm:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
x - 2	-	0	+
Sgn (x - 2)	-1	0	+1
x Sgn (x -2)	-x	0	x

Tabloya göre parçalı fonksiyon $x.sgn\ (x - 2) = \begin{cases} -x & , \quad x < 2 \text{ ise} \\ 0 & , \quad x = 2 \text{ ise} \\ x & , \quad x > 2 \text{ ise} \end{cases}$



Örnek: f : R→R $f(3x - 2) = 6x - 4$ ise $Sgn\left(f(3)\right) + \left|f\left(-\frac{5}{2}\right)\right|$ nedir?

Çözüm: $f(3x - 2) = 6x - 4$ ise f(x) i bulmak için

$g(x) = 3x - 2$ olarak alalım $g^{-1}(x) = \frac{x + 2}{3}$ tür.

$$f\left(3.\left(\frac{x+2}{3}\right) - 2\right) = 6\left(\frac{x+2}{3}\right) - 4$$

$$f(x + 2 - 2) = 2.(x + 2) - 4$$

$$f(x) = 2x$$

$$Sgn\ (f(3)) = sgn\ (2 . 3) = sgn\ (6) = 1$$

$$\left|f\left(\frac{-5}{2}\right)\right| = \left|2 . \frac{-5}{2}\right| = |-5| = 5$$

O halde yukarıdaki işlemin sonucu 1+5 = 6 olur.

Örnek:

$f(x) = 8x - 1$ ise, $\quad Sgn\left(f(1)\right) = sgn\ (8.1 - 1) = sgn\ (7) = 1$

$$Sgn\left(f(-11)\right) = sgn\left(8.(-11) - 1\right) = sgn\ (-89) = -1$$

$$Sgn\left(f\left(\frac{1}{8}\right)\right) = sgn\left(8.\frac{1}{8} - 1\right) = sgn\ (0) = 0$$

Tanım ve örneklerde görüldüğü gibi, işaret fonksiyonunda bütün reel değerlere gelebilecek sayılar -1, 0, 1 den başkası olamaz.

Örnek: $3x.\ \mathrm{sgn}\ (x^2 + 4) = |x^2 - 4|$ denklemini çözünüz.

Çözüm: $x^2 + 4 = 0$

$x^2 = -4, \qquad x \notin R$

Bu durumda $\mathrm{sgn}\ (x^2 + 4) = +1$

$x^2 - 4 = 0$

$(x - 2)(x + 2) = 0$

$x = 2 \qquad x = -2$

O hâlde $|x^2 - 4| = \begin{cases} x^2 - 4 & x < -2 \text{ ise} & \text{I. durum} \\ 0 & x = -2 \text{ ve } x = 2 \text{ ise} & \text{II. durum} \\ -x^2 + 4 & -2 < x < 2 & \text{III. durum} \\ x^2 - 4 & x > 2 \text{ ise} & \text{IV. durum} \end{cases}$

O hâlde 4 durum söz konusudur.

I. durum: $3x\ (+1) = x^2 - 4$

$3x = x^2 - 4$ den $\quad x^2 - 3x - 4 = 0$

$(x - 4)(x + 1) = 0$

$x = +4$ ve $x = -1$ kök yoktur. ($x<-2$ olacağından)

II. durum: $3x\ .\ (+1) = 0$ dan $\quad 3x = 0$ ise $x = 0$ kök yoktur.

III. durum: $3x\ (+1) = -x^2 - 4$ den $\quad x^2 + 3x - 4 = 0$

$(x + 4)(x - 1) = 0$

$x = -4$ ve $x = 1 \quad x = 1$ köktür.

IV. durum: $3x\ (+1)\ ) = x^2 - 4$ den $\quad x = 4$ ve $x = -1 \quad x = 4$ köktür.

O hâlde denklemin çözüm kümesi **{1, 4}** olur.

TAM KISIM FONKSİYONU VE TAM KISIM FONKSİYONU GRAFİKLERİ

$x \in R$ olmak üzere, x in tam kısımı; $[|\, x \,|]$ gösterilir.

$$[|x|] = \begin{cases} x & x \in Z \text{ ise} \\ x \text{ den küçük ilk tamsayı}, & x \notin Z \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

Örnek: Aşağıdaki ifadelerin tam değerlerini bulalım

a) $[|\log 34|]$ nedir? **b)** $x \in (0,\pi)$ için $[|\sin x|]$ nedir?

c) $[|2,34|]$ nedir? **d)** $[|-1,26|]$ nedir?

Çözüm:a) log 34 ün karekteristiği 1 dir.

(Çünkü basamak sayısı 2, karekteristik 1 olur.

O hâlde

$[|\log 34|] = 1$ olur.

b) $f(x)=\text{Sin}x$ fonksiyonu $0 < x < \pi$ değerleri için (0,1) aralığında değerler alır. O hâlde $x \in (0, \pi)$ için $[|\sin x|] = 0$ olur.

c) $[|2, 34|] = 2$

d) $[|-1, 26|] = -2$

Tam kısım Fonksiyonun Özelikleri

$xy \in R$ ve $n \in Z$ olmak üzere

1) $[|x|] \in Z$

2) $[|x|] = n$ ise $n \leq x < n + 1$ dir.

3) $[|x+n|] = [|x|] + n$

4) $[|x|] < x < [|x|] + 1$

5) $[|x+y|] \geq [|x|] + [|y|]$

Örnek: $[|2x - 1|] = 3$ denkleminin çözüm kümesi nedir?

Örnek: $[|2x - 1|] = 3$

Çözüm: 2. özelliğe göre

$3 \leq 2x - 1 < 4$

$4 \leq 2x < 5$

$2 \leq x < \frac{5}{2}$

O hâlde $Ç = \left[2, \frac{5}{2}\right)$

Örnek: $[| x + [| x - 2 |] |] = 6$ denkleminin çözüm kümesi nedir?

Çözüm: $[|x - 2|] = [|x|] - 2$ dir. (3. özelliğe göre)

O hâlde

$[|x|] + [|x|] - 2 = 6$

$2 [|x|] = 8$

$[|x|] = 4$

$4 \leq x < 5$ olur. $Ç = [4, 5)$ dir.

Örnek: $f(x) = \begin{cases} [|2x - 1|] & , \quad 1 < x < 3 \text{ ise} \\ (x + 4) & , \quad x \leq 1 \text{ ise} \end{cases}$ şeklinde f(x) fonksiyonu tanımlanıyor.

$f\left(\frac{3}{2}\right) + f(-6)$ nedir?

Çözüm: $\frac{3}{2} \in (1,3)$ o hâlde, $[|2 . \frac{3}{2} - 1|] = [|3 - 1|] = 2$

$-6 \in (x \leq 1, x \in R)$ o hâlde, $f(-6) = -6 + 4 = -2$

$f\left(\frac{3}{2}\right) + f(-6) = 2 - 2 = 0$

Örnek: $f(x) = sgn(x+1) + [| -x |]$ ise

$f\left(\frac{7}{2}\right)$ nedir?

Çözüm: $Sgn\left(\frac{7}{2} + 1\right) = Sgn\left(\frac{9}{2}\right) = 1$

$[| -\frac{7}{2} |] = [|-3, 5|] = -4$

Buradan, $f\left(\frac{7}{2}\right) = 1 - 4 = -3$ olur.

TAM KISIM FONKSİYONLARININ GRAFİKLERİ

Tam kısım fonksiyonunun kritik noktaları, tam kısım fonksiyonunun içini tam sayı yapan x değerleridir. Tam kısım fonksiyonlarının grafikleri çizilirken,

$y = [\![ax + b]\!]$ aralık boyu , $\frac{1}{|a|}$ olan aralıklarda inceleme yapılır.

Kritik noktalardan biri bulunduktan sonra x ekseni üzerinde işaretlenir.

Sağa ve sola $\frac{1}{|a|}$ kadar gidilir.

Ancak,
$a > 0$ ise aralığın sol uçları dahil
$a < 0$ ise aralığın sağ uçları dahil edilir.

Örnek: $f = [-4, 4] \rightarrow R$, $f(x) = [\![\frac{x}{2}]\!]$ nin grafiğini çiziniz.

Çözüm: Burada $a = \frac{1}{2} > 0$ O hâlde aralığın sol uçları dahil

$\frac{1}{|a|}$ dan $\frac{1}{\left|\frac{1}{2}\right|} = 2$ olarak artma olacak. O hâlde, tanım kümesi

$[-4, 4]$ aralığında olduğuna göre, 2 artmaya göre bu aralığı parçalayalım.

$-4 \leq x < -2$ ise $f(x) = [\![\frac{x}{2}]\!] = -2 = y$

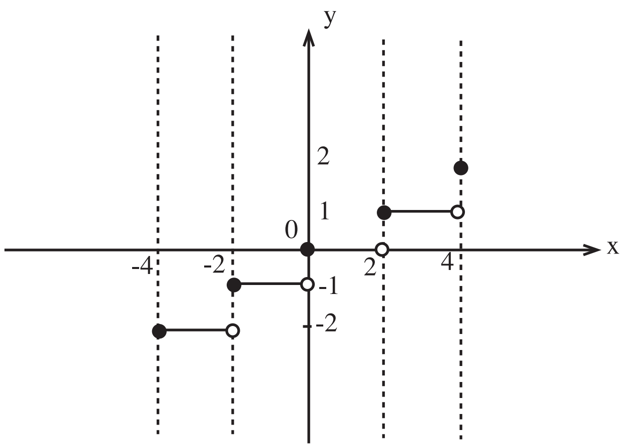
$-2 \leq x < 0$ ise $f(x) = [\![\frac{x}{2}]\!] = -1 = y$

$0 \leq x < 2$ ise $f(x) = [\![\frac{x}{2}]\!] = 0 = y$

$2 \leq x < 4$ ise $f(x) = [\![\frac{x}{2}]\!] = 1 = y$

$x = 4$ ise $f(x) = [\![\frac{x}{2}]\!] = 2 = y$

O hâlde bu şartlara uygun grafiği çizelim.



Örnek: f: [0, 2] → R

f (x) = [| 2x|] fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm: 2= a > 0 O hâlde aralığın sol uçları dahil

a = 2 , $\frac{1}{|a|}$ dan $\frac{1}{|2|} = \frac{1}{2}$ kadar [0,2] aralığını parçalamalıyız, O hâlde

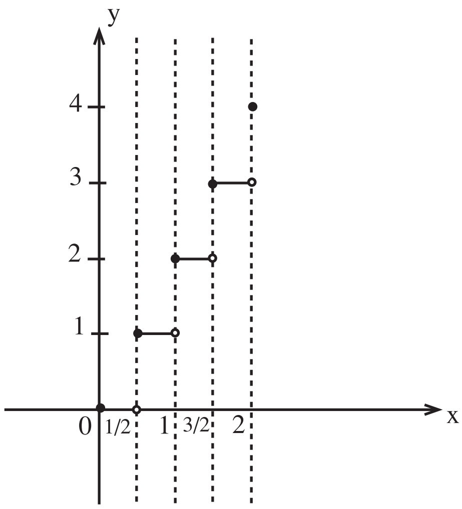
$0 \leq x < \frac{1}{2}$ ise $0 \leq 2x < 1$ ise f (x) = [|2x|] = 0

$\frac{1}{2} \leq x < 1$ ise $1 \leq 2x < 2$ ise f (x) [|2x|] = 1

$1 \leq x < \frac{3}{2}$ ise $2 \leq 2x < 3$ ise f (x) = [|2x|] = 2

$\frac{3}{2} \leq x < 2$ ise $3 \leq 2x < 4$ ise f (x) =[|2x|] = 3

x = 2 ise 2x = 4 ise f (x) = [|2x|] = 4



Örnek: f (x): [-1, 1]→R , f (x) = [| -2x|] fonksiyonun grafiğini çiziniz.

Çözüm: a = - 2 < 0 sağ uçlar dahil

a = - 2 ise $\frac{1}{|a|}$ dan $\frac{1}{|-2|} = \frac{1}{2}$ kadar [-1, 1] aralığını parçalamalıyız. O hâlde

x = -1 ise -2x = 2 ise f(x) = [|-2x|] = 2

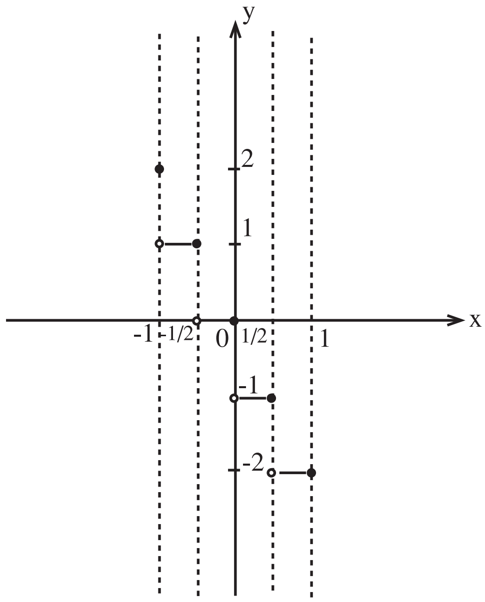
$-1 < x \leq \frac{-1}{2}$ ise $2 > -2x \geq 1$ ise f (x) = [|-2x|] = 1

$\frac{-1}{2} < x \leq 0$ ise $-1 > -2x \geq 0$ ise f(x) = [|-2x|] = 0

$0 < x \leq \frac{1}{2}$ ise $0 > -2x \geq -1$ ise f(x) = [|-2x|] = -1

$\frac{1}{2} < x \leq 1$ ise $-1 > -2x \geq -2$ ise f(x) = [|-2x|] = -2

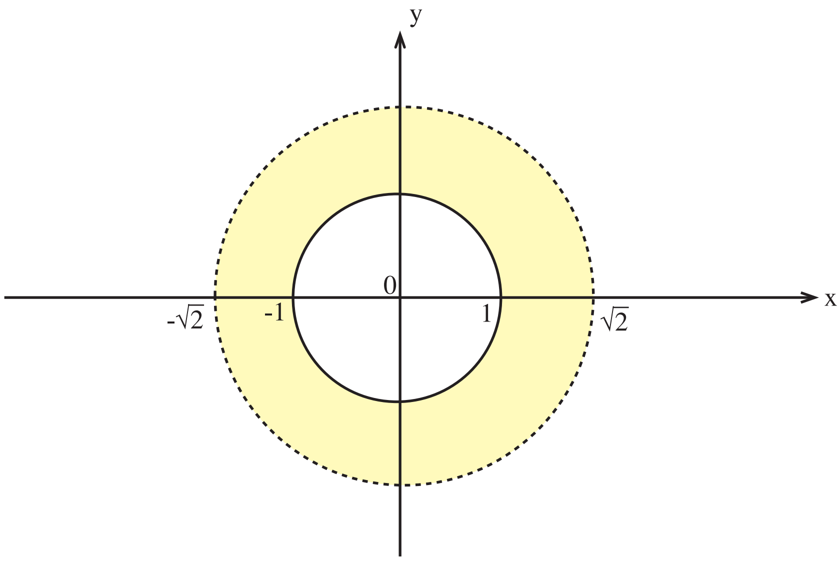
Yukarıdaki şartlara göre grafiği çizersek



Örnek: $A = \left\{ (x, y) : [|x^2 + y^2|] = 1,\ (x, y) \in R^2 \right\}$ grafiğini çiziniz.

$[|x^2+y^2|] = 1$ den $\quad 1 \leq x^2 + y^2 < 2$

yukarıdaki yazılışın anlamı şudur: Merkezi (0, 0) yarıçapı 1'e eşit, çember ve çemberin dışı ile merkezi (0, 0) olan yarıçapı $\sqrt{2}$ ye eşit olmayan çemberlerin iç bölgesi arasındaki kalan kısımdır.



ÇÖZÜMLÜ ÖRNEKLER

1) $f : R \to R$, $f(x) = 3x+2$, $g(x) = 1 - 2x$ ise

a) $(fog)(x)$ nedir? b) $(gof)(3)$ nedir?

2) $f(x) = x.f(x+1)$, $f(4) = \frac{4}{3}$ ise $f(2)$ nedir?

3) $f = R \to R$, $f(x) = \begin{cases} 4, & x < 3 \text{ ise} \\ 2x+4, & x \geq 3 \text{ ise} \end{cases}$

$f(2) + f(3) + f(4) = ?$

4) $f : R \to R$, $f(x) = x + |x-2|$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

5) $f : R \to R$, $f(x) = |x+1| + |x-2|$ fonkisoyunu parçalı fonksiyon olarak yazınız.

6) R de $Sgn\,(x^2 - 4x+3) < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

7) $f(x) = Sgn\,(|x| - 1)$ fonksiyonunu parçalı fonksiyon olarak yazınız.

8) $[|\log 1998|]$ değeri nedir?

9) $[|Sgn\,(2x-6)|] = 1$ denkleminin çözüm kümesi nedir?

ÇÖZÜMLER

1) a. $(fog)(x) = f(g(x)) = 3.(1-2x)+2$

$= 3 - 6x + 2$

$= -6x + 5$

b. $(gof)(3) = g[f(3)] = g[f(3)] = g[3.3+2]$

$= g(11)$

$= 1 - 2.11$

$= 1 - 22 = -21$

2) $f(x) = x.f(x+1)$

$x = 3$ olsun

$f(3) = 3.f(4)$

$= 3.\frac{4}{3} = 4$

$f(3) = 4$

$x = 2$ olsun

$f(2) = 2.f(3)$

$f(2) = 2.4$

$= 8$

3) $f(2) = 4$

$f(3) = 2.3 + 4 = 10$

$f(4) = 2.4 + 4 = 12$

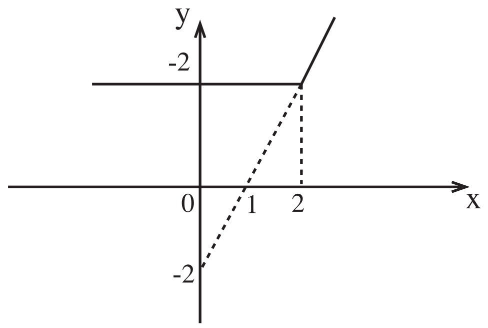
$f(2) + f(3) + f(4) = 4 + 10 + 12 = 26$

4) $x - 2 = 0$ $\quad x = 2$ kritik nokta O hâlde

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x - 2$	-	0	+
$\lvert x-2\rvert$	$-x+2$	0	$x-2$
$x+\lvert x-2\rvert$	$\underbrace{x - x + 2}_{2}$	2	$\underbrace{x + x - 2}_{2x-2}$

Parçalı fonksiyon olarak yazılırsa,

$$x + \lvert x - 2\rvert = \begin{cases} 2, & x < 2 \text{ ise} \\ 2, & x = 2 \text{ ise} \\ 2x - 2 & x > 2 \text{ ise} \end{cases}$$



x	0	1	2
$y = 2x - 2$	-2	0	2

5) $x+1 = 0 \rightarrow x = -1$ kritik nokta

$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$ kritik nokta.

x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
$\lvert x+1\rvert$	$-x-1$	0	$x+1$		$x+1$
$\lvert x-2\rvert$	$-x+2$		$-x+2$	0	$x-2$
$\lvert x+1\rvert+\lvert x-2\rvert$	$-2x+1$		3		$2x-1$

O hâlde,

$$f(x) = \begin{cases} -2x+1, & x < -1 \quad \text{ise} \\ 3 \quad , & -1 \leq x < 2 \\ 2x - 1 \,, & x \geq 2 \quad \text{ise} \end{cases}$$

6) $x^2 - 4x + 3 = 0$

$(x-3)(x-1) = 0$

$x = 3$, $\quad x = 1$ kritik nokta.

x	$-\infty$	1		3	$+\infty$
x^2-4x+3	+	0	-	0	+

çözüm kümesi= (1,3)

7) $f(x) = Sgn(|x| - 1) = ?$

$|x| - 1 = 0$

$|x| = 1$

$x = \pm 1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Sgn (|x|-1)		1	0	-1	0	1	

parçalı fonksiyon olarak yazarsak,

$$f(x) = Sgn(|x|-1) = \begin{cases} -1 & -1 < x < 1, \text{ için} \\ 0 & x = \pm 1 \quad \text{için} \\ 1 & x < -1 \,,\, x > 1 \text{ için} \end{cases}$$

8) log1998 in karekteristiği 3 tür.

Çünkü 1998 dört basamaklı sayıdır : Bu durumda, karakteristik $4 - 1 = 3$ dür.

O hâlde $[|\log 1998|] = 3$

9) $1 \leq sgn(2x - 6) < 2$

$Sgn(2x - 6) \geq 1$ ve $sgn(2x - 6) < 2$

$2x - 6 = 0$

$x = 3$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
2x - 6		-	0	+	
Sgn (2x -6)		- 1	0	+1 çözüm	

O hâlde Ç. K $x > 3$ yani $(3, +\infty)$

ÖZET

Bu bölümde, aşağıdaki durumlar öğrencilere verilmeye çalışılmıştır:

1. Fonksiyonların tanımı verilerek, bir ifadenin niçin fonksiyon olduğu tanıtılmıştır.

2. fonksiyon türleri (içine fonksiyon, örten fonksiyon, bire bir fonksiyon, birim fonksiyon, sabit ve sıfır fonksiyon) tanımları verilerek, öğrencilere fonksiyon türleri hakkında bilgi verilmiştir.

3. Fonksiyon bileşkesi tanımı verilerek, bileşke fonksiyona ait örneklerle problem çözme bilgisi artırılma hedeflenmiştir.

4. Bir fonksiyonun tersinin tanımı yapılarak, hangi durumlarda ters fonksiyonun olabileceği açıklanmış, gerekli örnekler verilerek fonksiyonların tersinin nasıl alınacağı öğrencilere gösterilmiştir.

5. Fonksiyonlarda işlemlerin tanımı verilerek örneklerle konu pekiştirilmiştir.

6. Fonksiyonların tanım ve değer kümelerini bulmak için gerekli tanımlar kullanılmış örnekler üzerinde durulmuştur.

7. Tek ve çift fonksiyonun tanımı verilerek, herhangi bir fonksiyonun tek ya da çift olduğu örneklerle gösterilmiştir.

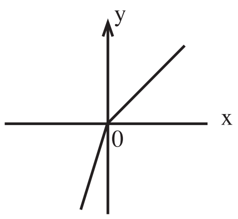
8. Fonksiyon grafiklerini çizerken, önceki bilgilerimizin hatırlatmaları yapılıp sırasıyla ters fonksiyonların grafikleri parçalı fonksiyonların grafikleri, mutlak değer fonksiyonu grafikleri, işaret fonksiyonu grafikleri tam değer fonksiyonu grafikleri çizimleri öğrencilerin anlayabileceği şekilde çizilmiştir.

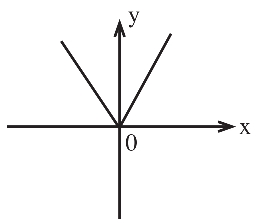
DEĞERLENDİRME TESTİ (1)

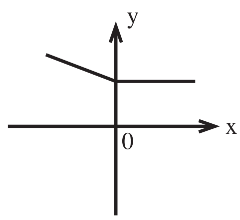
1) $f(x) = 3x^2$, $g(x) = e^{-x}$, $h(x) = \frac{x}{2}$ ise
(fogoh) (x) aşağıdakilerden hangisidir?

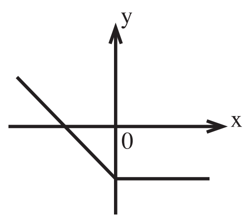
A) e^x B) e^{-x} C) $\frac{1}{2e^x}$ D) $\frac{3}{e^x}$

2) $f(x) = 2x - |x|$ fonksiyonunun grafiği aşıdakilerden hangisidir?

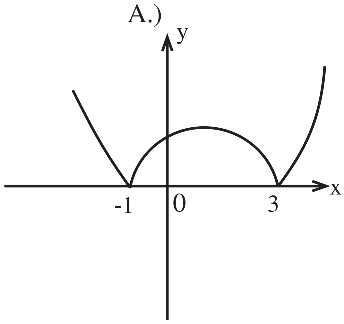
A)


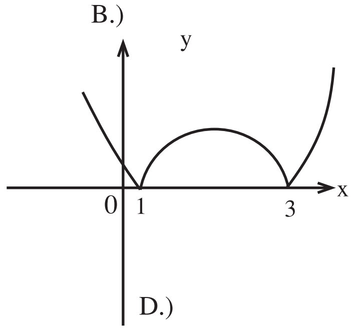
B)


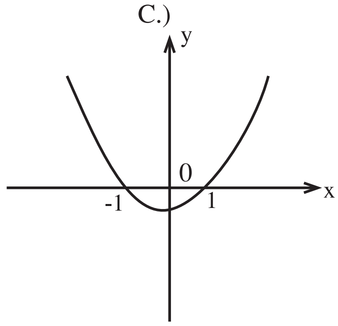
C)


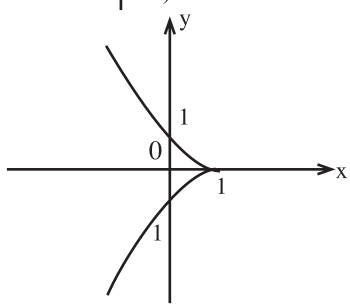
D)


3) $f(x) = y = |x^2 - 4x + 3|$ fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

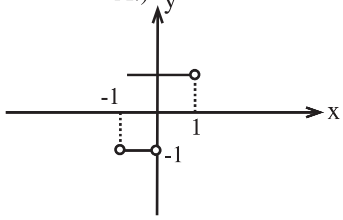
A.)


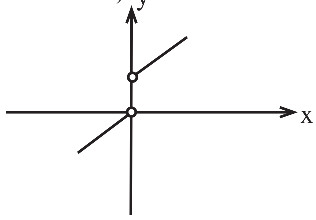
B.)


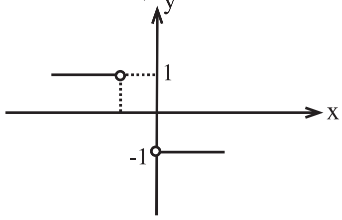
C.)


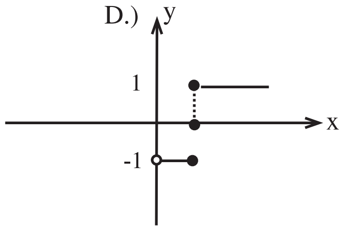
D.)


4) f(x) = Sgn (lnx) fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

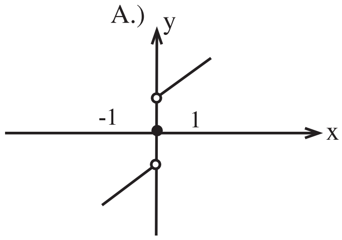
A.)


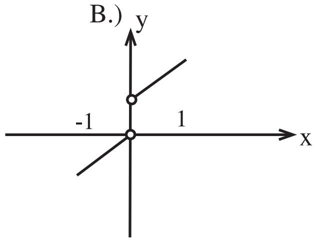
B.)


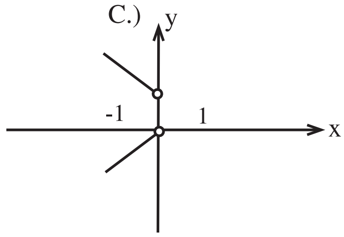
C.)


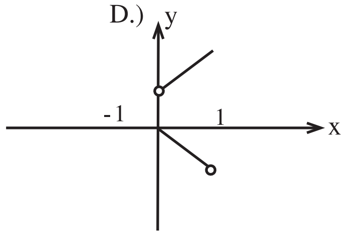
D.)


5) f(x) = x+ Sgnx fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

A.)


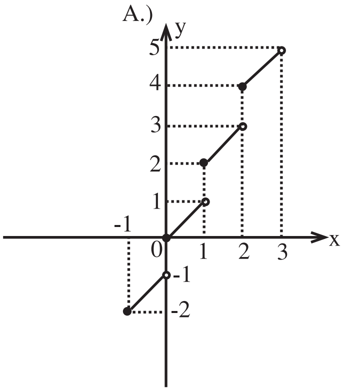
B.)


C.)


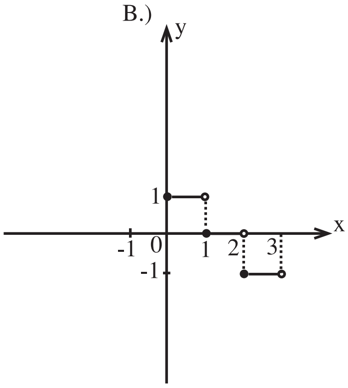
D.)


6) $f(x) = x + [| x |]$ fonksiyonunun $\left(x \in [-1, 3)\right)$ için grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

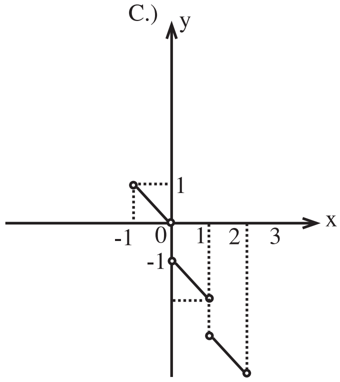
A.)



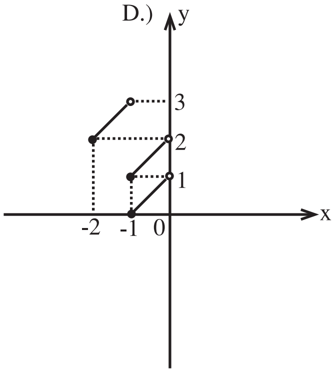
B.)



C.)



D.)

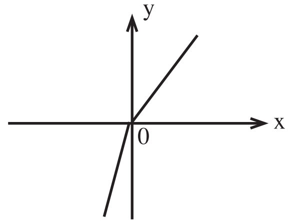


DEĞERLENDİRME TESTİNİN ÇÖZÜMLERİ

1) $(fogoh)\ (x) = (fog)\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(e^{-\frac{x}{2}}\right)$

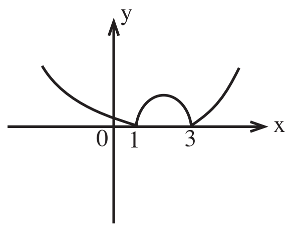
$= f\left(e^{-\frac{x}{2}}\right) = 3.\left(e^{-\frac{x}{2}}\right)^2 = 3.e^{-x}$

Doğru cevap D



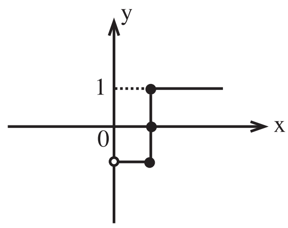
2) $y = 2x - |x| = \begin{cases} 2x - x = x & , x \geq 0 \\ 2x - (-x) = 3x, & x < 0 \end{cases}$

Doğru cevap A



3) $f\ (x) = |x^2 - 4x + 3| = \begin{cases} x^2 - 4x + 3\ , & x \leq 1, x \geq 3 \\ -x^2 + 4x - 3\ , & 1 < x < 3 \end{cases}$

Doğru cevap B



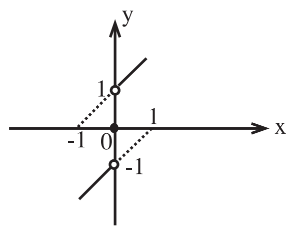
4) $f\ (x\ ) = sgn\ (\ell nx)$ fonksiyonun grafiği,

$0 < x < 1 \Rightarrow \ell nx < 0 \Rightarrow sgn\ (\ell nx\ ) = -1$

$x = 1 \Rightarrow \ell nx = 0 \Rightarrow sgn\ (\ell nx) = 0$

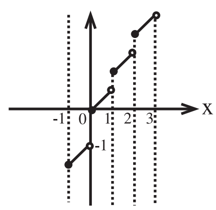
$x > 1 \Rightarrow \ell nx > 0 \Rightarrow sgn\ (\ell nx) = +1$

Doğru cevap D



5) $f\ (x) = x + sgn\ x = \begin{cases} x - 1 & , x < 0 \text{ ise} \\ x & , x = 0 \text{ ise} \\ x + 1 & , x > 0 \text{ ise} \end{cases}$

Doğru cevap A



6) $f\ (x) = x + [|x|] = \begin{cases} x - 1 & , -1 \leq x < 0 \text{ ise} \\ x & , 0 \leq x < 1 \text{ ise} \\ x + 1 & , 1 \leq x < 2 \text{ ise} \\ x + 2 & , 2 \leq x < 3 \text{ ise} \end{cases}$

Doğru cevap A