3. ÜNİTE

LOGARİTMA

3-1 ÜSTEL FONKSİYONLAR

Araştırmalar
Bölümün Özeti
Değerlendirme Soruları

3-2 LOGARİTMA FONKSİYONU

Araştırmalar
Bölümün Özeti
Değerlendirme Soruları

3-3 ÜSLÜ VE LOGARİTMALI DENKLEMLER

Araştırmalar
Bölümün Özeti
Değerlendirme Soruları

BU ÜNİTENİN HEDEFLERİ

Bu üniteyi çalıştığınızda,

- Üstel fonksiyonu kavrayabilecek,
- Logaritma fonksiyonu ve temel özeliklerini kavrayabilecek,
- Logaritma fonksiyonu ve temel özelikleri ile işlem yapabilecek,
- Üstel ve logaritma fonksiyonlarının grafiklerini çizebilecek,
- Doğal logaritmayı kavrayabilecek,
- Onluk logaritmayı kavrayabilecek,
- Onluk logaritma ile uygulama yapabilecek,
- Üslü ve logaritmalı denklemleri çözebileceksiniz.

NASIL ÇALIŞMALIYIZ?

- "Matematik 1" kitabından üslü ve köklü ifadeleri çalışınız.
- Konu içindeki problemleri ve alıştırmaları çözünüz.
- Konu sonunda verilen araştırma ve değerlendirme sorularını çözünüz.

GİRİŞ

Daha önce üssü tam sayı veya rasyonel sayı olan 2^x gibi üslü ifadeleri öğrendiniz.

Tam sayılı üslüler

$$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$
$$2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$$
$$2^0 = 1$$

Rasyonel üslüler

$$2^{1/2} = \sqrt{2}$$
$$2^{1,7} = 2^{\frac{17}{10}} = \sqrt[10]{2^{17}}$$

2^{-4} örneğinde 2^{-4} e üslü ifade, 2 ye taban, -4 e üs (kuvvet) ve $\frac{1}{16}$ ya üslü ifadenin değeri denir. Görüldüğü üzere üslü ifadeler çarpmanın kısaltılmış halidir. Yani, $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ demek 2^{-4} tür.

Taban ve üs belli iken değeri bulma işlemine üssünü (kuvvetini) alma; değer ve üs belli iken tabanı bulma işlemine de kök alma işlemi demiştik. Acaba taban ve değer belli iken üssü (kuvveti) nasıl bulabiliriz? Yani, $2^x = 16$ ise x ne olmalıdır? Bunu da daha sonra göreceğimiz logaritma alma işlemi ile yapacağız.

BÖLÜM 3-1 ÜSTEL FONKSİYONLAR

- ***ÜSTEL FONKSİYONUN TANIMI***
- ***BİR UYGULAMA: BİLEŞİK FAİZ***

◆ *ÜSTEL FONKSİYONUN TANIMI*

Bu bölüm önemli fonksiyonlardan biri olan üstel fonksiyonları açıklamaktadır. Bu fonksiyonlar paranın bileşik faizde artışı; nüfusun, hayvanların ve bakterilerin artışı; radyoaktif çürüme gibi günlük hayat problemlerinin çözümünde geniş şekilde kullanılır.

Denklemleri

$$f(x) = 2^x \text{ ve } g(x) = x^2$$

olarak verilen fonksiyonların aynı olmadığına ilk önce dikkati çekelim. Sabit bir taban ile üs olarak görünen bir değişken veya sabit bir üs ile taban olarak görünen değişken büyük bir fark yaratmaktadır. g fonksiyonu daha önce de tartıştığımız ikinci dereceden bir fonksiyondur. f fonksiyonu ise üslü fonksiyonlar diye tanımladığımız yeni bir fonksiyondur.

Üstel Fonksiyon

Denklemi

$$f(x) = a^x \qquad a > 0, \;\; a \neq 1$$

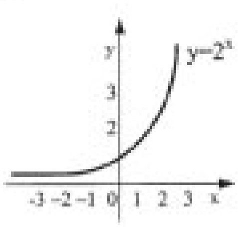
ile gösterilen bir f fonksiyonuna a tabanına göre üstel fonksiyon denir. f nin tanım kümesi bütün reel sayılar ve görüntü kümesi ise bütün pozitif reel sayılardır.

Üstel fonksiyonlarda sanal (imajiner) sayılardan kaçınabilmek için taban a nın pozitif olması gereklidir. Örneğin, $(-2)^{1/2} = \sqrt{-2} = i\sqrt{2}$. Taban olarak a=1 hariç tutuldu; çünkü $f(x) = 1^x = 1$ sabit bir fonksiyondur.

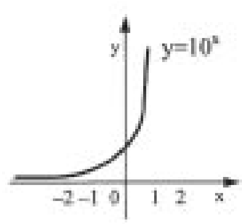
Üstel fonksiyonlara şu şekilde örnekler verebiliriz:

$$f(x) = 2^x, \qquad g(x) = 10^x, \qquad h(x) = 0{,}5^x$$

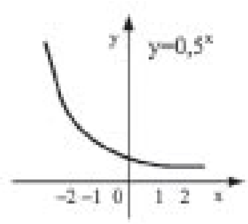
Yukarıdaki her gösterimde x değişkeni bir üstür. f, g ve h fonksiyonlarının tabanları sırasıyla 2, 10 ve 0,5 olup grafikleri aşağıda gösterilmektedir.



Şekil 3.1



Şekil 3.2



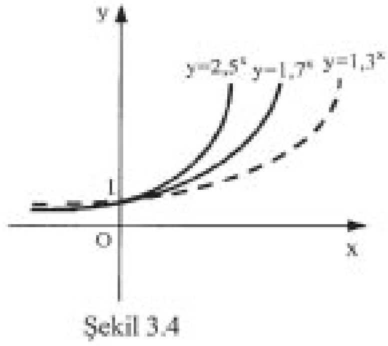
Şekil 3.3

Görüldüğü üzere üstel fonksiyonların tanım kümesi bütün reel sayılar ve görüntü kümesi pozitif reel sayılardır. Yani, üstel fonksiyonlarda tam ve rasyonel üstler yanında $a^{\sqrt{3}}, a^{\pi}$ gibi irrasyonel üstler de içerilmektedir. Üstel fonksiyonlar $(R \to R^+)$ üslü ifadelerin $(Q \to R^+)$ bütün özeliklerini R üzerinde sağlar; yani $a, b \in R^+$, $a \neq 1$, $b \neq 1$ ve $x, y \in R$ için aşağıdaki özelikler vardır:

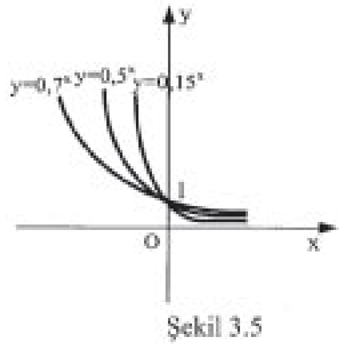
Üstel Fonksiyonların Özelikleri

Özelik	Örnek
1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$	$3^x \cdot 3^y = 3^{x+y}$
2. $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$	$4^{-x} = \dfrac{1}{4^x}$
3. $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$	$\dfrac{2^x}{2^y} = 2^{x-y}$
4. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$	$\left(\dfrac{2}{3}\right)^x = \dfrac{2^x}{3^x}$
5. $(a^x)^y = a^{xy}$	$(2^x)^2 = 2^{2x}$
6. $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$	$5^{2t+1} = 5^{3t-1} \Leftrightarrow 2t+1 = 3t-1 \Rightarrow 2 = t$
7. $a^x = b^x \Leftrightarrow a = b,\ x \neq 0$	$a^4 = 2^4 \Rightarrow a = 2$

Üstel fonksiyonların grafiklerini incelemek için, $y = 1{,}3^x$, $y = 1{,}7^x$ ve $y = 2{,}5^x$ fonksiyonlarının grafiklerini çizelim. Şekil 3.4 te aynı analitik düzlemde çizilen fonksiyonların grafiklerini inceleyecek olursak, $y = a^x$ fonksiyonunun grafiği a değeri arttıkça hızlı oranda artar. Şimdi de $y = 0{,}5^x$, $y = 0{,}7^x$, $y = 0{,}15^x$ fonksiyonlarının grafiklerini çizelim. Şekil 3.5 te görüldüğü gibi a değeri azaldıkça, $y = a^x$ fonksiyonunun grafiği hızlı bir oranda azalır. Sonuç olarak, $y = a^x$ fonksiyonunun grafiği $a > 1$ olduğu zaman artar ve $0 < a < 1$ olduğu zaman azalır.



Şekil 3.4



Şekil 3.5

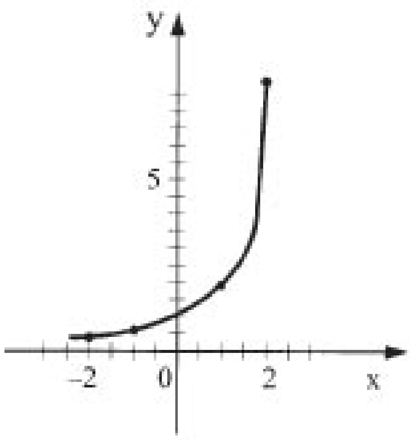
Şekil 3.4 ve 3.5 teki grafikler üstel fonksiyonların şu önemli genel özeliklerini ortaya koyar.

$f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ Fonksiyonlarının Genel Özelikleri

1. Bütün grafikler (0,1) noktasından geçer.
2. Eğer $a > 1$ ise x arttıkça a^x artar.
3. Eğer $0 < a < 1$ ise x arttıkça a^x azalır.

ÖRNEK 1 ⇨ $y = \left(\frac{1}{2}\right)4^x$ fonksiyonunun grafiğini $-2 \leq x \leq 2$ aralığında çiziniz.

ÇÖZÜM ⇨ Hesap makinesi kullanılarak aşağıda verilen değerler bulunabilir.



x	y
- 2	0,031
-1	0,125
0	0,50
1	2,00
2	8,00

ALIŞTIRMA 1 ⇨ $y = \left(\frac{1}{2}\right)4^{-x}$ fonksiyonunun grafiğini $-2 \leq x \leq 2$ aralığında çiziniz.

◆ *BİR UYGULAMA: BİLEŞİK FAİZ*

Varsayalım ki yıllık %10 faizle bankaya 10 000 000 TL yatırdınız. Bir yıl sonra hesap bakiyesi 10 000 000 TL artı 10 000 000 TL nin %10 faizini veya 1 000 000 TL yi içerecek. A_0 yatırdığınız anaparayı göstersin. O zaman, bir yıl sonraki hesap bakiyesindeki parayı (A_1) şu şekilde hesap edebiliriz.

$$
\begin{aligned}
A_1 &= A_0 + (0,10)\,A_0 && \leftarrow \text{(Ana para artı faiz)} \\
&= A_0\,(1 + 0{,}10) && \leftarrow \text{(Çarpan)} \\
&= 10\,000\,000\,(1{,}10) \\
&= 11\,000\,000
\end{aligned}
$$

İkinci yıl anapara ve faizin toplamı 11 000 000 dur. İkinci yıl, hesap 11000000 üzerinden faiz kazanır. İkinci yıl sonunda hesap bakiyesi, A_1 artı A_1 in %10 faizine eşit olacaktır.

$$\begin{aligned} A_2 &= A_1 + (0,10)\,A_1 \\ &= A_1\,(1+0,10) \\ &= A_0\,(1+0,10)(1+0,10) && \leftarrow (A_1 = A_0 + (0,10)\,A_0) \\ &= A_0\,(1+0,10)^2 \\ &= 10\,000\,000\,(1,10)^2 \\ &= 12\,100\,000 \end{aligned}$$

Şimdi, n yıl sonraki hesap bakiyesindeki miktarı, A_n, bulmaya çalışabiliriz. Bunun için A_3 ü bulalım ve aralarındaki ilişkiyi gözlemleyelim.

$$\begin{aligned} A_3 &= A_2 + (0,10)\,A_2 \\ &= A_2\,(1+0,10) \\ &= A_0\,(1+0,10)^2\,(1+0,10) && \leftarrow (A_2 = A_0(1+0,10)^2) \\ &= A_0\,(1+0,10)^3 \\ &= 10\,000\,000\,(1,10)^3 \\ &= 13\,310\,000 \end{aligned}$$

Görebiliyoruz ki genel formül $A_n = A_0(1+0,10)^n$ dir. Bu tür faiz yıllık faizdir; çünkü faiz yılda bir kere ödenir.

ÖRNEK 2 ⇒ Bir kişi 20 000 000 TL sini yıllık %15 faizle bankaya yatırıyor. Bu kişinin 2 yıl sonra hesabındaki para ne kadar olur bulunuz.

ÇÖZÜM ⇒ İlk miktar = $A_0 = 20\,000\,000$ TL
Faiz oranı = 0,15
Yıl = $n = 2$ yıl

$$\begin{aligned} A_2 &= A_0(1+0,15)^2 \\ &= 20\,000\,000\,(1,15)^2 \\ &= 26\,450\,000 \text{ TL} \end{aligned}$$

ALIŞTIRMA 2 ⇒ Bir kişi 20 000 000 TL sini yıllık %5 faizle bankaya yatırıyor. Bu kişinin 3 yıl sonra hesabındaki para ne kadar olur bulunuz.

Bir çok vadeli hesapta faiz yılda bir kereden fazla ödenir. Bu durumda küçük miktarda faiz daha sıklıkla ödenir. Örneğin, varsayalım ki 10000000 TL nizi %10 faizle 3 aylık olarak yatırıyorsunuz. Üç ay sonraki faiz 10 000 000 un %10 unun dörtte biri veya %2,5 i olur. Hesap bakiyesi 10 000 000 (1+0,025) olur. Aynı şekilde hesap bakiyesi altı ay sonra

$$10\,000\,000\,(1+0{,}025)^2 \approx 10\,506\,250,$$

dokuz ay sonra

$$10\,000\,000\,(1+0{,}025)^3 \approx 10\,768\,906$$

ve bir yıl sonra

$$10\,000\,000\,(1+0{,}025)^4 \approx 11\,038\,129 \text{ olur.}$$

Daha önce bulduğumuz gibi 10 000 000 TL yıllık %10 faizle bir yıl sonunda 11 000 000 TL olur. 38 129 TL lik fark üç aylık faizden kaynaklanmaktadır. Bir yıl sonra bu miktar küçük olmasına rağmen, uzun süreli ve daha sıklıkla verilen faizde büyük bir fark yaratabilir.

Bileşik Faiz

Eğer A_0 miktar para bir hesaba yıllık r faizle yılda m kere ödenmek üzere n yıl süre ile yatırılırsa n yıl sonraki hesap bakiyesi şu şekilde bulunur.

$$A_n = A_0\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn}$$

ÖRNEK 3 ⇨ 20 000 000 TL yılda %5 faizle 3 yıl süre ile borç olarak alınıyor. Alınan miktar yılda %5 faizle, yıllık veya üç aylık sürelerle ödenirse 3 yıl sonunda ödenecek miktar ne olur bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ Yıllık faiz ödemesi: $A_0 = 20\,000\,000$, $r = 0{,}05$, $m = 1$, $n = 3$

$$A_3 = 20\,000\,000(1+0{,}05)^3$$

3 aylık faiz ödemesi: $A_0 = 20\,000\,000$, $r = 0{,}05$, $m = 4$ ve $n = 3$

$$A_3 = 20\,000\,000\left(1+\frac{0{,}05}{4}\right)^{4\cdot 3}$$

ALIŞTIRMA 3 ⇨ 15 000 000 TL yılda %15 faizle 2 yıl süre ile borç olarak alınıyor. Alınan miktar yılda %15 faizle, yıllık veya üç aylık sürelerle ödenirse 2 yıl sonunda ödenecek miktar ne olur bulunuz.

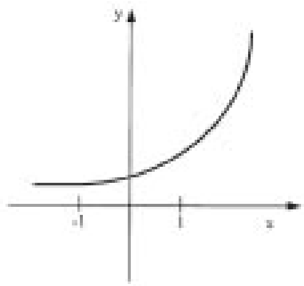
ARAŞTIRMALAR

1. Sembolik şekilde verilen f fonksiyonlarının grafiklerini aşağıdan seçiniz.

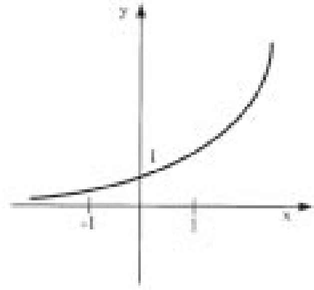
i. $f(x) = 2{,}71^x$ ii. $f(x) = 3^{-x}$

iii. $f(x) = 1{,}5^x$ iv. $f(x) = 0{,}99^x$

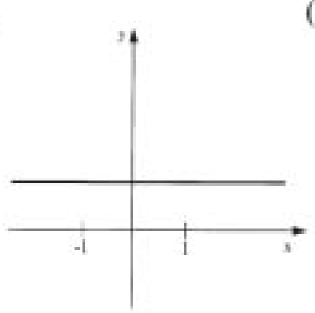
(A)



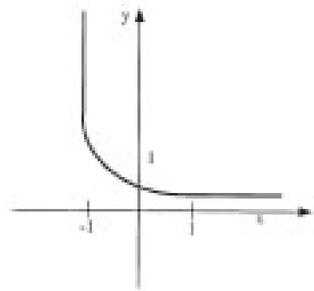
(B)



(C)



(D)



BÖLÜMÜN ÖZETİ

Aşağıdaki tablo üstel fonksiyonlarla ilgili önemli kavramları özetlemektedir.

Kavram	Örnekler	Yorumlar
Üstel fonksiyon $f(x) = a^x$ $a > 0, \quad a \neq 1$	$f(x) = 2^x$ $f(x) = 1{,}2^x$ $f(x) = 0{,}4^x$	Eğer $a > 1$ ise üstel fonksiyon artar, fakat eğer $0 < a < 1$ ise üstel fonksiyon azalır.

DEĞERLENDİRME SORULARI

1. $\left(2^{(3+\sqrt{5})}\right)^{3-\sqrt{5}}$ ifadesinin sadeleştirilmiş biçimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2^6 B) 2^4 C) 2^2 D)2 E) Hiçbiri

2. $8^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{4-x}$ ise, x aşağıdakilerden hangisidir?

A) -2 B) -1 C) 1 D) 2 E) 4

3. $\sqrt[x+5]{13^{5x-17}} = \frac{1}{169}$ ise, x aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{29}{11}$ B) -1 C) 1 D) $\frac{39}{9}$ E) Hiçbi

4. $100 \cdot 10^x = \sqrt{(1000)^7}$ ise, x aşağıdakilerden hangisidir?

A) 3 B) $\frac{5}{2}$ C) $\frac{23}{2}$ D) $\frac{17}{2}$ E) 7

5. $f(x) = 4^{x-\frac{1}{2}}$ olduğuna göre, $f(0)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) 4 B) 2 C) 1 D) $\frac{1}{2}$ E) $-\frac{1}{2}$

BÖLÜM 3-2

LOGARİTMA FONKSİYONU

- ***LOGARİTMA FONKSİYONUNUN TANIMI***
- ***LOGARİTMA FONKSİYONUNUN GRAFİĞİ***
- ***LOGARİTMA FONKSİYONUNUN ÖZELİKLERİ***
- ***DOĞAL LOGARİTMA FONKSİYONU***
- ***ONLUK LOGARİTMA FONKSİYONU***

GİRİŞ

Logaritma fonksiyonu daha önceki bölümde gördüğümüz üstel fonksiyonlarla oldukça ilişkilidir. Aslında, üstel fonksiyon ve logaritma fonksiyonu birbirinin tersidir. Bu bölümde ters fonksiyon kavramını geliştireceğiz ve bir logaritma fonksiyonunun bir üstel fonksiyonun tersi olduğunu tanımlamak için kullanacağız.

Logaritma fonksiyonu modellemede ve birçok problemlerin çözümünde kullanılmaktadır. Örneğin, belli bir oranda yılda belli sürelerde veya sürekli olarak faiz almak üzere bileşik faize yatırılan parayı iki katına çıkarmak için gerekli olan süreyi bulmak için kullanılır. Bu üslü denklem çözümünü gerektirir ve logaritma bu işlemde önemli bir rol oynar.

◆ *LOGARİTMA FONKSİYONUNUN TANIMI*

$f(x)=y=a^x$ ile tanımlı üstel bir fonksiyonun tersini bulmaya çalışalım. Bunun için gerek şart $y=a^x$ fonksiyonun bire bir ve örten olmasıdır. Yani, görüntü kümesinin her elemanına tanım kümesinden yalnızca bir elemanın karşılık gelmesi gerekir. Kısaca, bire bir olması için

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \text{ veya } f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

olmalıdır. Şimdi $y=a^x$ fonksiyonunun bire bir ve örten olup olmadığını inceleyelim:

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow a^{x_1} \neq a^{x_2}$; çünkü eğer $a^{x_1}=a^{x_2} \Rightarrow x_1=x_2$ dir. O zaman $y=a^x$ fonksiyonu bire birdir. $f(x)=a^x$ fonksiyonu $R \to R^+$ olduğundan görüntü kümesindeki her elemana tanım kümesinden bir eleman karşılık gelir. O halde, $f(x)=a^x$ örten bir fonksiyondur.

$f(x)=y=a^x$ fonksiyonunun tersini bulmak için x ve y değişkenlerinin yerlerini değiştirelim. Yani,

$$y = a^x$$

fonksiyonunda x ve y değişkenlerinin yerlerini değiştirirsek fonksiyon

$$x = a^y$$

olur. $x = a^y$ fonksiyonundan

$$y = \log_a x$$

bulunur. $y = \log_a x$ fonksiyonu $y = a^x$ üstel fonksiyonunun ters fonksiyonudur. Bu tanıma göre,

$$\log_a x = y \Leftrightarrow x = a^y = a^{\log_a x} \text{ tir.}$$

Logaritma Fonksiyonu

Üstel fonksiyonun ters fonksiyonuna logaritma fonksiyonu denir.
$a > 0$ ve $a \neq 1$ olmak üzere, $y = \log_a x$ fonksiyonunda $y \in R$ sayısına $x \in R^+$ sayısının a tabanına göre logaritması denir ve " y eşit a tabanına göre logaritma x" diye okunur.

logaritma fonksiyonu		üstel fonksiyon
$y = \log_a x$	denktir	$x = a^y$

Logaritma fonksiyonunun tanım kümesi üstel fonksiyonların görüntü kümesi olan pozitif reel sayılar iken, görüntü kümesi üstel fonksiyonların tanım kümesi olan bütün reel sayılardır.

Bundan sonra $\log_a x$ yazdığımızda, a nın 1 den farklı pozitif bir gerçek sayı olduğu varsayılacaktır.

ÖRNEK 1 ⇨ Aşağıdaki logaritmik ifadeleri üstel ifadeye çeviriniz.

(A) $\log_5 25 = 2$ (B) $\log_3 9 = 2$ (C) $\log_2\left(\frac{1}{4}\right) = -2$

ÇÖZÜM ⇨ (A) $\log_5 25 = 2 \Leftrightarrow 25 = 5^2$

(B) $\log_3 9 = 2 \Leftrightarrow 9 = 3^2$

(C) $\log_2\left(\frac{1}{4}\right) = -2 \Leftrightarrow \frac{1}{4} = 2^{-2}$

ALIŞTIRMA 1 ⇨ Aşağıdaki logaritmik ifadeleri üstel ifadeye çeviriniz.

(A) $\log_9 3 = \frac{1}{2}$ (B) $\log_3\left(\frac{1}{9}\right) = -2$ (C) $\log_{25} 5 = \frac{1}{2}$

ÖRNEK 2 ⇨ Aşağıdaki üstel ifadeleri logaritmik ifadeye çeviriniz.

(A) $16 = 2^4$ (B) $5 = \sqrt{25}$ (C) $\frac{1}{16} = 2^{-4}$

ÇÖZÜM ⇨ (A) $16 = 2^4 \Leftrightarrow \log_2 16 = 4$

(B) $5 = \sqrt{25} \Leftrightarrow \log_{25} 5 = \frac{1}{2}$

(C) $\frac{1}{16} = 2^{-4} \Leftrightarrow \log_2\left(\frac{1}{16}\right) = -4$

ALIŞTIRMA 2 ⇨ Aşağıdaki üstel ifadeleri logaritmik ifadeye çeviriniz

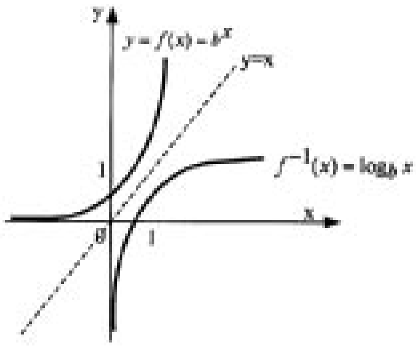
(A) $64 = 8^2$ (B) $2 = \sqrt{4}$ (C) $\frac{1}{3} = 3^{-1}$

◆ *LOGARİTMA FONKSİYONUNUN GRAFİĞİ*

Daha önce logaritma fonksiyonunun üstel fonksiyonun tersi olduğunu belirtmiştik. Öyleyse, logaritma fonksiyonu da bire bir ve örten bir fonksiyondur; çünkü logaritma fonksiyonunun tersi de üstel bir fonksiyondur. O halde, logaritma fonksiyonu, üstel fonksiyon gibi tanım kümesindeki bütün elemanlar için ya artan ya da azalan bir eğilim gösterir. Eğer bir fonksiyon bire bir ise tanım kümesindeki bütün elemanlar için ya artan ya da azalandır. Eğer bir fonksiyon tanım kümesindeki bazı elemanlar için azalan ve bazı elemanlar için artan ise, bu fonksiyon bire bir değildir.

Bir fonksiyon ile ters fonksiyonunun grafiklerinin $y = x$ doğrusuna göre simetrik olduğunu biliyoruz. O halde, $y = \log_a x$ fonksiyonunun grafiğini $y = a^x$ üstel fonksiyonunun grafiğinden yararlanarak kolayca elde edebiliriz.

$f(x) = b^x$ fonksiyonunun grafiğinin $b > 1$ olduğu zaman artan olduğunu daha önce göstermiştik. Öyleyse, $f^{-1}(x) = \log_b x$ fonksiyonu da $b > 1$ olduğu zaman artandır.



b tabanına göre üstel fonksiyon:
$f(x)=b^x$, $\quad b>1$

Tanım kümesi: Bütün reel sayılar
Görüntü kümesi: Pozitif reel sayılar.

b tabanına göre logaritma fonksiyonu:
$f^{-1}(x)=\log_b x$

Tanım kümesi: Pozitif reel sayılar.
Görüntü kümesi: Bütün reel sayılar.

Şekil 3.6

Şekil 3.6 ya dikkat edersek 1 den büyük sayıların logaritmaları pozitiftir.

$$b>1 \text{ ve } x>1 \text{ için } \log_b x>0$$

1 in her tabana göre logaritması sıfırdır.

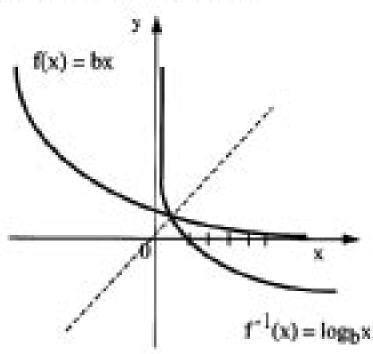
$$b>1 \text{ ve } x=1 \text{ için } \log_b 1=0$$

0 ile 1 arasındaki sayıların logaritması negatiftir.

$$b>1 \text{ ve } 0<x<1 \Rightarrow \log_b x<0$$

x sıfıra doğru küçülürken $\log_a x$ sınırsız olarak küçülür. **Yani, y ekseni $\log_a x$ fonksiyonunun grafiğinin asimptotudur.**

$f(x)=b^x$ fonksiyonunun grafiğinin $0<b<1$ olduğu zaman azalan olduğunu daha önce göstermiştik. O halde, $f^{-1}(x)=\log_b x$ fonksiyonu da $0<b<1$ olduğu zaman azalandır.



Şekil 3.7 deki grafiği dikkatlice inceleyecek olursak, 0 ile 1 arasındaki sayıların logaritmaları pozitiftir.

1 den büyük sayıların logaritmaları negatiftir.

$$0 < b < 1 \text{ ve } x > 1 \Rightarrow \log_b x < 0$$

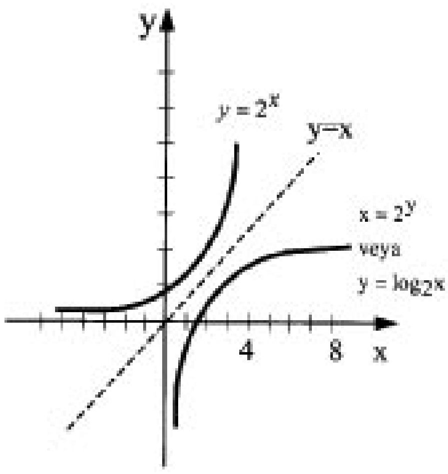
b tabanına göre, b nin logaritması 1 dir.

$0 < b < 1$ için $\log_b b = 1$ dir; çünkü $\log_b b = c \Rightarrow b^c = b \Rightarrow c = 1$ olmalıdır.

x sıfıra doğru küçülürken $\log_b x$ sınırsız olarak büyür. **Yani,** y **ekseni** $\log_b x$ **fonksiyonunun grafiğinin asimptotudur.**

ÖRNEK 3 ⇨ $y = 2^x$ ve $y = \log_2 x$ fonksiyonlarının grafiklerini çiziniz.

ÇÖZÜM ⇨ Daha önceden biliyoruz ki $y = \log_2 x$ ile $x = 2^y$ birbirine denktir. Öyleyse, $y = \log_2 x$ in grafiğini $x = 2^y$ nin grafiğinden yararlanarak çizebiliriz. Üstel fonksiyonu sağlayan herhangi (a, b) sıralı ikilisi koordinatlar yer değiştirdiğinde logaritma fonksiyonunu sağlar. Örneğin, (3, 8) sıralı ikilisi $y = 2^x$ denklemini sağlarken (8, 3) sıralı ikilisi de $y = \log_2 x$ denklemini sağlar.



Üstel Fonksiyon		Logaritma Fonksiyonu	
x	$y = 2^x$	$x = 2^y$	y
-3	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	-3
-2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	-2
-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1
0	1	1	0
1	2	2	1
2	4	4	2
3	8	8	3

Sıralı ikililer ters çevrildi

ALIŞTIRMA 3 ⇨ $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ ve $y = \log_{\frac{2}{3}} x$ fonksiyonlarının grafiklerini aynı analitik düzlemde çiziniz.

◆ *LOGARİTMA FONKSİYONUNUN ÖZELİKLERİ*

Logaritma fonksiyonları birçok önemli özeliklere sahiptir. Logaritma fonksiyonu üstel fonksiyonun tersi olduğu için logaritma fonksiyonunun özelikleri üstel fonksiyonunun özelikleri ile oldukça ilişkilidir. Burada yedi temel özeliği içeren yedi teorem vereceğiz.

Teorem 1: 1 den farklı $\forall a \in R^+$ sayısının a tabanına göre logaritması 1 dir; yani

$$\forall a \in R^+ - \{1\} \quad \text{için} \quad \log_a a = 1 \text{ dir.}$$

İspat: $\forall a \in R^+ - \{1\}$ için $a^1 = a$ olduğunu biliyoruz. O halde, logaritma fonksiyonu tanımından,

$$a^1 = a \Rightarrow \log_a a = 1$$

olur.

Teorem 2: 1 in her tabana göre logaritması sıfırdır: yani

$$\forall a \in R^+ - \{1\} \text{ için } \log_a 1 = 0 \qquad \text{dır.}$$

İspat: Tabanı sıfırdan farklı ve üssü sıfır olan sayıların 1 e eşit olduğunu biliyoruz. Öyleyse, logaritma fonksiyonu tanımından,

$$a^0 = 1 \Rightarrow \log_a 1 = 0$$

bulunur.

Teorem 3: $\forall p \in R$ ve $\forall x \in R^+$ için

$$\log_a x^p = p \log_a x$$

eşitliği sağlanır.

İspat: $u = \log_a x^p$ ve $v = p\log_a x$ diyelim. Birinci eşitlik $x^p = a^u$ eşitliğine denktir. İkinci eşitlik ise $x = a^{\frac{v}{p}}$ veya $x^p = a^v$ eşitliğine denktir. Öyleyse,

$$a^u = a^v$$

olmalıdır. Bunun olabilmesi için de

$$u = v$$

yani

$$\log_a x^p = p \log_a x$$

Teorem 4: Pozitif iki gerçek sayının bölümünün a tabanına göre logaritması; aynı tabana göre bölünenin logaritması ile bölenin logaritmasının farkına eşittir; yani,

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

eşitliği sağlanır

İspat: c ve d gibi reel sayılar için $x = a^c$ ve $y = a^d$ yazabiliriz. Öyleyse,

$$\log_a x - \log_a y = \log_a a^c - \log_a a^d = c - d$$
$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a\left(\frac{a^c}{a^d}\right) = \log_a\left(a^{c-d}\right) = c - d$$

olur. Sonuç olarak,

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y \text{ dir.}$$

Teorem 5: Pozitif iki gerçek sayının çarpımının herhangi bir a tabanına göre logaritması, bu sayıların a tabanına göre logaritmaları toplamına eşittir; yani,

$$\forall x, y \in R^+ \text{ için } \log_a (xy) = \log_a x + \log_a y \qquad \text{dir.}$$

İspat: Eğer $x, y \in R^+$ ise c ve d reel sayıları için $x = a^c$ ve $y = a^d$ dir.

$$\log_a x + \log_a y = \log_a a^c + \log_a a^d = c + d$$
$$\log_a (xy) = \log_a (a^c \cdot a^d) = \log_a (a^{c+d}) = c + d$$

Sonuç olarak,

$$\log_a x + \log_a y = \log_a (x \cdot y)$$

ÖRNEK 4 ⇨ $\log_b xy^2$ yi $\log_b x$ ve $\log_b y$ cinsinden gösteriniz.

ÇÖZÜM ⇨ $\log_b xy^2 = \log_b x + \log_b y^2$ ← (Teorem 5)

$= \log_b x + 2\log_b y$ ← (Teorem 3)

ÖRNEK 5 ⇨ $\log_b \sqrt{\frac{x^4}{y^3}}$ ü $\log_b x$ ve $\log_b y$ cinsinden gösteriniz.

ÇÖZÜM ⇨ $\log_b \sqrt{\frac{x^4}{y^3}} = \log_b\left(\frac{x^4}{y^3}\right)^{1/2} = \frac{1}{2}\log_b\left(\frac{x^4}{y^3}\right)$ ← (Teorem 3)

$= \frac{1}{2}(\log_b x^4 - \log_b y^3)$ ← (Teorem 4)

$= \frac{1}{2}(4\log_b x - 3\log_b y)$ ← (Teorem 3)

$= 2\log_b x - \frac{3}{2}\log_b y$

ALIŞTIRMA 4 ⇨ $\frac{\log_a(b^4c^2) - \log_a(bc^2)}{\log_a b^2}$ ifadesini sadeleştiriniz.

ÖRNEK 6 ⇨ $\log_2 27 + \log_2 x^3 + \log_2 8$ ifadesini sadeleştiriniz.

ÇÖZÜM ⇨ $\log_2 27 + \log_2 x^3 + \log_2 8 = \log_2(27 \cdot x^3 \cdot 8)$ ← (Teorem 5)

$= \log_2(3 \cdot x \cdot 2)^3$ ←($a^3 \cdot b^3 = (ab)^3$)

$= \log_2(6x)^3$

$= 3\log_2(6x)$ ← (Teorem 3)

ALIŞTIRMA 5 ⇨ $\log_a 3 + \log_a 9 + \log_a 27 = 24$ ifadesinde a nın değerini bulunuz.

ÖRNEK 7 ⇨ $\log_2 \sqrt{2}$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ $\log_2 \sqrt{2} = \log_2 2^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2}\log_2 2$ ← (Teorem 3)

$= \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$ ← (Teorem 1)

ALIŞTIRMA 6 ⇨ $\log_{\frac{1}{4}} 64$ ifadesinin değerini bulunuz.

Teorem 6: (Taban Değiştirme Kuralı)

$a, b \in R^+ \setminus \{1\}$ ve $c \in R^+$ için

$\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$ dir.

İspat: $\log_a b = x$ ve $\log_b c = y$ olsun.

$$\left.\begin{array}{l} a^x = b \Rightarrow (a^x)^y = b^y \\ b^y = c \end{array}\right\} \Rightarrow a^{xy} = c \Rightarrow xy = \log_a c$$

olur. x ve y yerine eşitliklerini yazarsak,

$$\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$$

bulunur. Bu eşitlikten

$$\boxed{\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}}$$

elde edilir. Bu eşitliğe taban değiştirme kuralı denir.

ÖRNEK 8 ⇨ $\log_3 4 \cdot \log_4 7 \cdot \log_7 9$ çarpımının sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ $\log_3 4 \cdot \log_4 7 \cdot \log_7 9 = \dfrac{\log_{10} 4}{\log_{10} 3} \cdot \dfrac{\log_{10} 7}{\log_{10} 4} \cdot \dfrac{\log_{10} 9}{\log_{10} 7}$ ←(Teorem 6)

$$= \frac{\log_{10} 9}{\log_{10} 3} = \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2 \cdot \log_3 3$$

$= 2 \cdot 1 = 2$ bulunur.

ALIŞTIRMA 7 ⇨ $\log_x 5x \cdot \log_{5x} 3y \cdot \log_4 x$ çarpımının sonucunu bulunuz.

ÖRNEK 9 ⇨ Aşağıdaki ifadelerin değerlerini bulunuz.

(A) $10^{3\log_{10} 2 + \log_{10} 5}$ (B) $36^{\log_6 5}$

ÇÖZÜM ⇨(A) $10^{3\log_{10} 2 + \log_{10} 5} = 10^{\log_{10} 2^3 + \log_{10} 5}$

$= 10^{\log_{10}(2^3 \cdot 5)}$

$= 2^3 \cdot 5 = 40$

(B) $36^{\log_6 5} = \left(6^2\right)^{\log_6 5}$

$= 6^{2\log_6 5} = 6^{\log_6 5^2}$

$= 5^2 = 25$

ALIŞTIRMA 8 ⇨ Aşağıdaki ifadelerin değerlerini bulunuz.

(A) $2^{2\log_2 6 - \log_2 12}$ (B) $8^{-\log_2 3}$

Teorem 7:

$a \in R^+ \setminus \{1\}$, $b \in R^+$ ve $m, n \in R$, $m \neq 0$ olmak üzere

$$\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \log_a b \text{ dir.}$$

İspat: $\log_{a^m} b^n = x$ olsun. Logaritma fonksiyonu tanımından yararlanarak,

$$b^n = (a^m)^x \Rightarrow b^n = (a^x)^m$$
$$\Rightarrow b = a^{x\frac{m}{n}}$$
$$\Rightarrow x\frac{m}{n} = \log_a b$$
$$\Rightarrow x = \frac{n}{m}\log_a b$$
$$\Rightarrow \log_{a^m} b^n = \frac{n}{m}\log_a b$$

eşitliğini buluruz.

ÖRNEK 10 ⇨ Aşağıdaki ifadelerin sonucunu bulunuz.

(A) $\log_2(\log_2(\log_2 16))$ (B) $\log_{36} 6 \cdot \log_6 36$

ÇÖZÜM ⇨(A) $\log_2(\log_2(\log_2 16)) = \log_2(\log_2(\log_2 2^4))$ $\leftarrow (16 = 2^4)$

$= \log_2(\log_2 4)$ $\leftarrow (\log_a a^c = c\log_a a)$

$= \log_2(\log_2 2^2) = \log_2 2 = 1$

(B) $\log_{36} 6 \cdot \log_6 36 = \log_{6^2} 6 \cdot \log_6 6^2$

$= \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$ ← (Teorem 7)

ALIŞTIRMA 9 ⇨ Aşağıdaki ifadelerin sonucunu bulunuz.

(A) $\log_2(\log_2(\log_2 4))$ (B) $\log_5 625 \cdot \log_{625} 5$

◆ *DOĞAL LOGARİTMA FONKSİYONU*

Doğal Logaritma Fonksiyonu

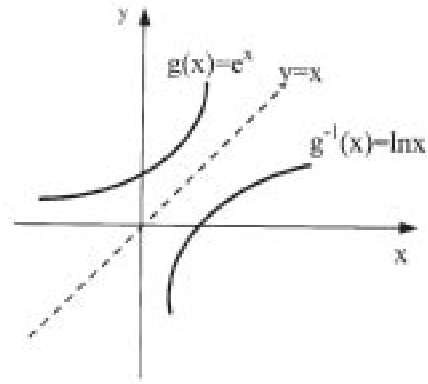
Tabanı e olan logaritma fonksiyonuna doğal logaritma fonksiyonu denir ve ln biçiminde gösterilir. Buna göre,

$$\log_e : R^+ \to R, f(x) = y = \log_e x = \ln x$$

olur.

$y = \ln x$ doğal logaritma fonksiyonu $x = e^y$ üstel fonksiyonuna denktir.

$g(x) = e^x$ ve $g^{-1}(x) = \ln x$ fonksiyonlarının grafikleri şekil 3.8 de gösterilmektedir. $(e \approx 2,7183 > 2)$.



◆ ONLUK LOGARİTMA FONKSİYONU

10 tabanına göre logaritma fonksiyonunu tanımlamak için $y = 10^x$ ile tanımlı üstel fonksiyon kullanılır.

Onluk Logaritma Fonksiyonu

Tabanı 10 olan logaritma fonksiyonuna onluk logaritma fonksiyonu veya bayağı logaritma fonksiyonu denir ve kısaca, log biçiminde gösterilir; yani,

$$\log_{10} : R^+ \to R,\ f(x) = y = \log_{10} x = \log x \text{ tir.}$$

Tabanı 10 olan logaritma fonksiyonlarında tabanı yazmamak bir gelenek olduğu için $\log_{10}$ yerine log kullanacağız.

$\log 10^x = \log_{10} 10^x = x$ olduğundan 10 un tam sayı kuvvetlerinin 10 tabanına göre logaritmalarını yazmak kolay. Örneğin,

$$\log 0,01 = \log 10^{-2} = -2 \qquad \log 1000 = \log 10^3 = 3$$
$$\log 0,1 = \log 10^{-1} = -1 \qquad \log 100 = \log 10^2 = 2$$
$$\log 1 = \log 10^0 = 0 \qquad \log 10 = \log 10^1 = 1$$

Görüldüğü gibi 10 un tam sayı kuvvetlerinin logaritması tam sayıdır. Yukarıdaki örnekleri çoğaltarak aşağıdaki tabloyu oluşturabiliriz.

x	…	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4	…
logx	…	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	…

10 un kuvvetlerini tam sayı değil de rasyonel ve irrasyonel sayı alırsak 10 un rasyonel bir kuvvetinin logaritması rasyonel, irrasyonel bir kuvvetinin logaritması irrasyonel bir sayı olur. Örneğin,

$$\log\sqrt[3]{100} = \log\sqrt[3]{10^2} = \log 10^{2/3} = \frac{2}{3}$$

$$\log 10^{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

olur.

10 un kuvvetleri dışındaki sayıların logaritmalarını nasıl bulabiliriz? Örneğin, 18 sayısı $10 < 18 < 100$ olduğundan bu sayının logaritması $\log_{10} 10 < \log_{10} 18 < \log_{10} 10^2$ $(1 < \log 18 < 2)$ dir. 18 sayısını $10 \cdot (1,8)$ olarak yazabiliriz. $18 = 10 \cdot (1,8)$ eşitliğini kullanarak

$$\begin{aligned}\log 18 &= \log 10 + \log 1,8 \\ &= 1 + \log 1,8\end{aligned}$$

yazılabilir.

Öyleyse her a sayısı

$$a = 10^k (s), \quad 1 \le s < 10, \; k \in Z$$

biçiminde yazılabilir. Buna a sayısının üstel yazılışı denir. Bu yazılışı kullanarak

$$\begin{aligned}\log a &= \log 10^k + \log s \\ &= k + \log s\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu son eşitlikte k sayısına $\log a$ nın **karakteristiği** (giz değeri) ve $\log s$ sayısına da **mantisi** (onlu parçası) denilir. O halde, 18 sayısının karakteristiği 1 dir.

ÖRNEK 11 ⇒ Aşağıdaki onluk logaritmaların karakteristiğini bulunuz.

(A) log 2 (B) log 25 (C) log 280 (D) log 1643

ÇÖZÜM ⇒ (A) İlk önce 2 sayısını $a = 10^k \cdot (s)$ $(1 \le s < 10, \; k \in Z)$ formülünü kullanarak üstel şekilde yazalım. 2 sayısının üstel biçimi

$2 = 10^0 \cdot (2)$ dir.

Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}\log 2 &= \log 10^0 + \log 2 \\ &= 0 + \log 2\end{aligned}$$

olup log 2 nin karakteristiği 0 dır.

(B) İlk önce 25 sayısını $a = 10^k \cdot (s) \quad (1 \le s < 10,\ k \in Z)$ formülünü kullanarak üstel şekilde yazalım. O halde

$$25 = 10^1 \cdot (2,5) \text{ tir.}$$

Bu eşitlikte her iki tarafın 10 tabanına göre logaritmasını alırsak

$$\log 25 = \log 10 + \log 2,5$$

$$\log 25 = 1 + \log 2,5$$

olur ve log 25 in karakteristiği 1 dir.

(C) $280 = 100 \cdot (2,8) = 10^2 \cdot (2,8)$ dir.

$$\begin{aligned} \log 280 &= \log 10^2 + \log 2,8 \\ &= 2 + \log 2,8 \end{aligned}$$

olup log 280 in karakteristiği 2 dir.

(D) $1643 = 1000 \cdot (1,643)$ tür. Bu sayının logaritması

$$\begin{aligned} \log 1643 &= \log 10^3 + \log 1,643 \\ &= 3 + \log 1,643 \end{aligned}$$

olup log 1643 ün karakteristiği 3 tür.

ALIŞTIRMA 10 ⇨ Aşağıdaki onluk logaritmaların karakteristiğini bulunuz.

(A) log 153 (B) log 2623 (C) log 5679 (D) log 789765

ÖRNEK 12 ⇨ Aşağıdaki onluk logaritmaların karakteristiğini bulunuz.

(A) log 0,2 (B) log 0,25 (C) log 0,02

ÇÖZÜM ⇨ (A) İlk önce 0,2 ondalık açılımını $a = 10^k \cdot (s) \quad (1 \le s < 10,\ k \in Z)$ formülünü kullanarak üstel şekilde yazalım. 0,2 ondalık açılımının üstel biçimi

$$0,2 = 10^{-1} \cdot (2) \text{ dir.}$$

Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} \log 0,2 &= \log 10^{-1} + \log 2 \\ &= -1 + \log 2 \end{aligned}$$

olup log 0,2 nin karakteristiği –1 dir.

(B) $\quad 0,25 = 10^{-1} \cdot (2,5)$ tir.

Dolayısıyla,

$$\log 0,25 = \log 10^{-1} + \log 2,5$$
$$= -1 + \log 2,5$$

olup log 0,25 in karakteristiği −1 dir.

(C) $\quad 0,02 = 10^{-2} \cdot (2)$ dir.

Dolayısıyla,

$$\log 0,02 = \log 10^{-2} + \log 2$$
$$= -2 + \log 2$$

olup log 0,02 nin karakteristiği −2 dir.

ALIŞTIRMA 11⇒ Aşağıdaki onluk logaritmaların karakteristiğini bulunuz.

(A) log 0,002 (B) log 0,025 (C) log 0,0002

Görüldüğü üzere karakteristik herhangi bir tam sayı olabilir.10 un kuvveti olmayan sayıların logaritması ise logaritma tablosu kullanılarak bulunur. Bir sayı verildiğinde logaritmasının tam kısmını; yani karakteristiğini kolayca bulabiliriz. Ancak kesir kısmını yani mantisini kolayca hesaplayamayız. Bunun için düzenlenmiş logaritma cetvellerinden yararlanırız.

Tablo 1 de 1 ile 10 sayıları arasındaki sayıların logaritmalarının ilk dört ondalık basamağı verilmektedir. $1 < x < 10$ arasındaki sayıların logaritmasını bulmak için, x in ilk iki basamağını N olarak verilen sütundan bul ve N nin sağındaki satırdan üçüncü basamağı bul. Örneğin, log 2,36 yı bulmak için, N nin altında 23 sayısını bul ve 23 sayısının bulunduğu satırdan 6 ile belirlenen sütuna kadar ilerlediğinde 3729 sayısı bulunur. Sonuç olarak, log 2,36=0,3729 dur.

1 ile 10 arasında olmayan sayıların logaritmalarını bulmak için 10 un kuvveti olmayan her a sayısının logaritmalarını bulmak için verdiğimiz $a = 10^k(s)$ gösterimini ve $\log(a \cdot b) = \log a + \log b$ kuralını kullanacağız.

$$2360 = 2,36 \cdot 10^3 \qquad\qquad 0,0236 = 2,36 \cdot 10^{-2}$$
$$\log 2360 = \log 2,36 + \log 10^3 \qquad\qquad \log 0,0236 = \log 2,36 + \log 10^{-2}$$
$$=0,3729+3 \qquad\qquad = 0,3729+(-2)$$
$$=3,3729 \qquad\qquad = -2 + 0,3729$$

Sonuç olarak, bir sayının onluk logaritması bir tam sayı(**karakteristik**) ile logaritma cetvelinden bulunan 1 den küçük negatif olmayan sayının(**mantisa**) toplamına eşittir.

Tablo 1 Logaritma Cetveli

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396

Tablo 1 Logaritma Cetveli

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8224	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

ÖRNEK 13 ⇨ Aşağıda verilen onluk logaritmaların değerlerini bulunuz.

(A) log 18 (B) log 153 (C) log 2360

ÇÖZÜM ⇨ (A) $\log 18 = \log 10^1 (1,8)$ ← $(\log(a \cdot b) = \log a + \log b)$

$= \log 10^1 + \log 1,8$ ← $(\log 10^n = n)$

$= 1 + \log 1,8$

$= 1 + 0,2553$

(B) $\log 153 = \log 10^2 (1,53)$

$= 2 + \log 1,53$

$= 2 + 0,1847$

(C) $\log 2360 = \log 10^3 (2,36)$

$= \log 10^3 + \log 2,36$

$= 3 + \log 2,36$

$= 3 + 0,3729$

$= 3,3729$

ALIŞTIRMA 12 ⇨ Aşağıda verilen onluk logaritmaların değerlerini bulunuz.

(A) log 38 (B) log 433 (C) log 1360

ÖRNEK 14 ⇨ Aşağıda verilen onluk logaritmaların değerlerini bulunuz.

(A) log 0,0236 (B) log 48,5 (C) log 0,73

ÇÖZÜM ⇨ (A) $0,0236 = 2,36 \cdot 10^{-2}$

$\log 0,0236 = \log 2,36 + \log 10^{-2}$

$= 0,3729 + (-2)$

$= -2 + 0,3729$

(B) $48,5 = 4,85 \cdot (10^1)$

$\log 48,5 = \log 4,85 + \log 10$

$= 0,6857 + 1$

$= 1,6857$

(C) $0,73 = 7,3 \cdot (10^{-1})$

$\log 0,73 = \log 7,3 + \log 10^{-1}$

$= 0,8633 + (-1)$

ALIŞTIRMA 13 ⇨ Aşağıda verilen onluk logaritmaların değerlerini bulunuz.

(A) log 0,0007 (B) log 35,6 (C) log 2,9

ÖRNEK 15 ⇨ Aşağıdaki onluk logaritmaların değerlerini bulunuz.

(A) log 48,5 (B) log 8250 (C) log 0,051

ÇÖZÜM ⇨ (A) $a = 48,5$ sayısının üstel yazılışı

$$48,5 = 10^1 \cdot 4,85$$

biçimindedir. Dolayısıyla, logaritma cetvelinden

$$\begin{aligned} \log(48,5) &= \log 10^1 + \log 4,85 \\ &= 1+0,6857 \\ &= 1,6857 \end{aligned}$$

yazılabilir. Demek ki, log(48,5) sayısının karakteristiği 1, mantisi 0,6857 dir.

(B) $a = 8250$ sayısının üstel yazılışı

$$8250 = 10^3 \cdot 8,250$$

biçimindedir. Dolayısıyla, logaritma cetvelinden

$$\begin{aligned} \log(8250) &= \log 10^3 + \log 8,250 \\ &= 3+0,9165 \end{aligned}$$

yazılabilir. Demek ki, log (8250) sayısının karakteristiği 3, mantisi 0,9165 tir.

(C) $a = 0,0051$ sayısının üstel yazılışı

$$0,0051 = 10^{-3} \cdot 5,1$$

biçimindedir. Dolayısıyla, logaritma cetvelinden

$$\begin{aligned} \log(0,0051) &= \log 10^{-3} + \log 5,1 \\ &= -3 + 0,7076 \end{aligned}$$

yazılabilir. Demek ki, log (0,0051) sayısının karakteristiği –3 , mantisi 0,7076 dır.

ALIŞTIRMA 14 ⇨ Aşağıdaki onluk logaritmaların değerlerini bulunuz.

(A) log 3,27 (B) log 28,6 (C) log 0,608

ARAŞTIRMALAR

Aşağıda verilen ifadelerdeki boşlukları doldurunuz.

1. $\log_e x - \log_e 100 = -0,08t$ eşitliğinin üstel biçimi ………… dir.

2. $f(x) = 5^{3x-1} + 4$ fonksiyonunun tersi……………………….dir.

3. $g(x) = 3\log_e(5x-2)$ fonksiyonunun tersi…………………….dir.

4. Aşağıda verilen soruyu çözünüz.

(A) $f = \left\{ (x,y) \middle| y = \left(\frac{1}{3}\right)^x = 3^{-x} \right\}$ için f, f^{-1} ve $y = x$ fonksiyonlarının grafiklerini aynı koordinat sisteminde çiziniz.

(B) f ve f^{-1} in tanım ve değer kümesini bulunuz.

BÖLÜMÜN ÖZETİ

Aşağıdaki tablo a tabanına göre logaritma fonksiyonunun önemli kavramlarını özetlemektedir. Doğal ve onluk logaritma fonksiyonu aynı özelikleri sağlamaktadır.

a Tabanına Göre Pozitif x Sayısının Logaritması	
Sembol:	$\log_a x \quad (a > 0 \text{ ve } a \neq 1)$
Anlam:	$\log_a x = k \Leftrightarrow a^k = x$
Örnek:	$\log_2 16 = 4$; çünkü $2^4 = 16$
Ters:	$f(x) = \log_a x$ ve $g(x) = a^x$ ters fonksiyonlar
Ters özelik:	$\log_a a^x = x$ ve $a^{\log_a x} = x$

Taban Değiştirme Formülü
$x, a, b \in R^+$ ve $a \neq, b \neq 1$ olsun. O zaman,
$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$
Örnek: $\log_3 6 = \dfrac{\log 6}{\log 3}$ veya $\log_3 6 = \dfrac{\ln 6}{\ln 3}$

Logaritma Fonksiyonunun Özelikleri
1. $\log_a 1 = 0$
2. $\log_a x + \log_a y = \log_a (xy)$
3. $\log_a x - \log_a y = \log_a \left(\dfrac{x}{y}\right)$
4. $\log_a x^r = r \log_a x$

DEĞERLENDİRME SORULARI

1. $f(x) = 5^x + 3$ ise $f^{-1}(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\dfrac{x}{5} - 3$ B) $\log_5 (x-3)$ C) $\log_5 \dfrac{x}{3}$ D) $5^x - 3$ E) Bulunamaz

2. $3^{-\log_3 x} = 5$ ise, x aşağıdakilerden hangisidir?

A) -5 B) 5 C) $-\frac{1}{5}$ D) $\frac{1}{5}$ E) Hiçbiri

3. $\log_2 3^m = 4$ ise, m aşağıdaki aralıklardan hangisinin elemanıdır?

A) (3, 4) B) (4, 3) C) (3, 2) D) (2, 4) E) (2, 3)

4. $f(x) = \log_7(x-3)$ fonksiyonu veriliyor. $f(x)$ fonksiyonunun ters fonksiyonu $f^{-1}(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $7^x - 3$ B) 7^{x-3} C) $7^x + 3$ D) 7^x E) 7^{x+3}

5. $4^{\log_4 15 - \log_4 3}$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) Hiçbiri

6. $\log_2 5 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 9$ ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $2\log_5 2$ B) $2\log_2 5$ C) $9\log_3 5$ D) $9\log_5 3$ E) $\log_2 15$

7. $\log_{10}(\log_2(\log_3 9))$ ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 10 B) 9 C) 3 D) 2 E) 0

8. $\log_x \frac{8}{27} = 3$ eşitliğinde x in değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 3 E) Hiçbiri

9. $\log_3\left(\tan\frac{\pi}{3}\right) : \log_2\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)$ ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $-\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $-\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{2}$ E) -1

10. $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a}}\right)^{\log_a 5}$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ C) $\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$ D) 5 E) 1

BÖLÜM 3-3 ÜSLÜ VE LOGARİTMALI DENKLEMLER

- ***ÜSLÜ DENKLEMLER***
- ***LOGARİTMALI DENKLEMLER***

GİRİŞ

Üstel fonksiyonlar ve denklemler matematiksel modelleme yapmak için kullanılır. Üslü denklemleri çözmek için logaritma çok sıklıkla kullanılmaktadır.

ÜSLÜ DENKLEMLER

Denklem, iki niteliğin eşit olduğu bir ifadedir. Örneğin, $2x+1=0$, $x+2y=7$, $x^2+2x+1=0$ gibi eşitliklere denklem denildiğini daha önce öğrenmiştik. Daha önceki bölümlerde öğrendiğimiz gibi $a^x=k$ gibi üslü denklemlerin üssü olan x i bulmak için her iki tarafın logaritmasını alıyoruz. Bu yöntem üslü denklemleri çözmenin temelini

Üslü Denklemler

İçinde bilinmeyenin üs olarak bulunduğu denklemlere **üslü denklemler** denir. Denklemleri doğrulayan (sağlayan) gerçek sayıların kümesine de **denklemin çözüm kümesi** denir.

$10^{x+2}=10^{3x}$, $4e^{2x}-2=1$ gibi denklemler üslü denklemlerdir. Görüldüğü gibi x değişkeni bu denklemlerde üs olarak bulunmaktadır.

ÖRNEK 1 ⇒ Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümesini bulunuz.

(A) $e^{2x}=e^{5x-3}$ (B) $3^{x+1}=1$

ÇÖZÜM ⇒ (A) $e^{2x}=e^{5x-3} \Rightarrow 2x=5x-3$ ← ($e^a=e^b \Rightarrow a=b$)

$$-3x=-3$$
$$x=1$$

$Ç=\{1\}$

(B) $3^{x+1}=1 \Rightarrow 3^{x+1}=3^0$ ← ($a^b=a^c \Rightarrow b=c$)

$$\Rightarrow x+1=0$$
$$\Rightarrow x=-1$$

$Ç=\{-1\}$

ALIŞTIRMA 1 ⇒ Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümesini bulunuz.

(A) $e^{3x+2}=1$ (B) $2^{x^2-2x}=8$

ÖRNEK 2 ⇒ Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümesini bulunuz.

(A) $10^{x+2}=10^{6x}$ (B) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}=\frac{1}{10}$

ÇÖZÜM ⇒(A)

$$10^{x+2}=10^{6x}$$

$$\log 10^{x+2}=\log 10^{6x} \qquad \leftarrow \text{(Her iki tarafın onluk logaritması alındı)}$$

$$x+2=6x \qquad \leftarrow (\log 10^{k}=k)$$

$$2=5x$$

$$x=\frac{2}{5}$$

(B)

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}=\frac{1}{10}$$

$$\log\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}=\log\frac{1}{10} \qquad \leftarrow \text{(Her iki tarafın onluk logaritması alındı)}$$

$$(x-1)\log\left(\frac{1}{4}\right)=-1 \qquad \leftarrow (\log m^{r}=r\log m, \quad \log 10^{k}=k)$$

$$(x-1)=\frac{-1}{\log(1/4)}$$

$$x=1-\frac{1}{\log(1/4)}\approx 2{,}661$$

ALIŞTIRMA 2 ⇒ Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümesini bulunuz.

(A) $10^{(x^2)}=10^{3x-2}$ (B) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x}=-5$

ÖRNEK 3 ⇒ Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümesini bulunuz.

(A) $e^{2x}-2e^{x}+1=0$ (B) $e^{x}=72$

ÇÖZÜM ⇒(A) $e^{x}=t$ dersek denklemimiz

$$(e^{x})^{2}-2e^{x}+1=t^{2}-2t+1 \text{ olur.}$$

$$t^{2}-2t+1=0 \Rightarrow (t-1)(t-1)=0$$

$$t=1 \text{ dir.}$$

$$e^{x}=1 \Rightarrow x=\ln 1=0$$

$$Ç=\{0\} \text{ olur.}$$

(B) $e^x = 72$ denkleminde her iki tarafın doğal logaritmasını alalım.

$$\begin{aligned}
\ln(e^x) &= \ln(72) \\
x \cdot \ln(e) &= \ln(72) \\
x \cdot 1 &= \ln(72) \qquad \leftarrow (\ln(e) = 1) \\
x &= \ln(72) \\
x &= 4{,}2766
\end{aligned}$$

$Ç = \{4{,}2766\}$

ALIŞTIRMA 3 ⇨ Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümesini bulunuz.

(A) $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$ (B) $e^x + 5 = 60$

◆ ***LOGARİTMALI DENKLEMLER***

Logaritmalı Denklemler

Bir denklemin içinde bilinmeyenin logaritması varsa bu tür denklemlere **logaritmalı denklemler** denir. Denklemleri doğrulayan gerçek sayıların kümesine de **denklemin çözüm kümesi** denir.

$\log x = 3$, $\log(x-1) + \log(x-2) = \log 2$ gibi denklemler logaritmalı denklemlerdir. Bir logaritmalı denklemi çözmek için $a^{\log_a x} = x$ özeliğini kullanacağız.

ÖRNEK 4 ⇨ Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümesini bulunuz.

(A) $2\ln(3x) = 4$ (B) $\log_2 4x = 2 - \log_2 x$

ÇÖZÜM ⇨ (A) $2\ln(3x) = 4 \Rightarrow \ln(3x) = \dfrac{4}{2} = 2$

$$\begin{aligned}
3x &= e^2 \\
x &= \frac{e^2}{3} \\
x &\approx 2{,}463
\end{aligned}$$

$Ç = \{2{,}463\}$

(B)

$$\begin{aligned}
\log_2 4x &= 2 - \log_2 x \\
\log_2 4x + \log_2 x &= 2 \\
\log_2 (4x \cdot x) &= 2 \qquad \leftarrow (\log m + \log n = \log(m \cdot n)) \\
2^{\log_2 4x^2} &= 2^2 \qquad \leftarrow (\text{İki tabanına göre iki tarafı üslü hale getir})
\end{aligned}$$

$$4x^2 = 4 \qquad \leftarrow (2^{\log_2 k} = k)$$
$$x = \mp 1$$

$x = -1$ çözüm değildir; çünkü $\log_2 x$ negatif x değerleri için tanımsızdır. Sonuç olarak, $x = 1$ tek çözümdür.

$Ç = \{1\}$

ALIŞTIRMA 4 ⇨ Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümesini bulunuz.

(A) $\log(2x+1) = 2$ (B) $\ln(x-2) + \ln(2x-3) = 2\ln x$

ÖRNEK 5 ⇨ $\log_5(2x+1) + \log_{25} 16 = 2$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ $\log_5(2x+1) + \log_{25} 16 = 2$

$$\log_5(2x+1) + \log_{5^2} 4^2 = 2$$
$$\log_5(2x+1) + \log_5 4 = \log_5 5^2$$
$$(2x+1)\cdot 4 = 25 \qquad \leftarrow (\log(a\cdot b) = \log a + \log b)$$
$$8x + 4 = 25$$
$$x = \frac{25-4}{8} = \frac{21}{8}$$
$$x = \frac{21}{8}$$

$Ç = \left\{\frac{21}{8}\right\}$ olur.

ALIŞTIRMA 5 ⇨ $\log(x+1) - \log x = 1$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÖRNEK 6 ⇨ Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümesini bulunuz.

(A) $\log_3(x+1) + \log_3(x-1) = 2$ (B) $\log_3(x^2 + 2x) = 1$

ÇÖZÜM ⇨ (A) $\log_3(x+1) + \log_3(x-1) = 2$

$$\log_3[(x+1)(x-1)] = \log_3 3^2$$
$$\log_3(x^2-1) = \log_3 9$$
$$(x^2-1) = 9$$
$$x^2 = 10$$
$$x = \mp\sqrt{10}$$

$x = -\sqrt{10}$ olduğunda $\log_3(-\sqrt{10}+1)$ ve $\log_3(-\sqrt{10}-1)$ tanımsız olduğundan denklemin kökü sadece $\sqrt{10}$ dur.

$Ç = \{\sqrt{10}\}$ olur.

(B) $\log_3(x^2+2x)=1 \Rightarrow \log_3(x^2+2x)=\log_3 3^1$

$$\Rightarrow \quad x^2+2x=3$$
$$\Rightarrow \quad x^2+2x-3=0$$
$$\Rightarrow \quad (x+3)(x-1)=0$$
$$\Rightarrow \quad x=-3 \vee x=1$$

$Ç=\{-3,\ 1\}$

ALIŞTIRMA 6 ⇨ Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümesini bulunuz.

(A) $\log(x-1)+\log(x-2)=\log 2$ (B) $\log_2 4x^2=2+\log_2 x$

ÖRNEK 7 ⇨ $\log x+\log(x+2)=\log 3$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ $\log x+\log(x+2)=\log 3$

$$\log[x\cdot(x+2)]=\log 3 \qquad \leftarrow(\log a+\log b=\log(a\cdot b))$$
$$x(x+2)=3$$
$$x^2+2x-3=0$$
$$(x+3)(x-1)=0$$
$$x=1 \text{ veya } x=-3$$

$x=-3$ bu denklemin çözümü olamaz; çünkü $\log_{10}(x+2)$ fonksiyonunun tanım kümesi $x>-2$ veya $(-2,\infty)$ dır. Sonuç olarak, $x=1$ tek çözümdür. $Ç=\{1\}$

ALIŞTIRMA 7 ⇨ $\log_3 x+\log_3(x-3)=\log_3 10$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÖRNEK 8 ⇨ Verilen logaritma denkleminde x i bulunuz.

$$\frac{3}{2}\log_a 4-\frac{2}{3}\log_a 8+\log_a x=\log_a 2$$

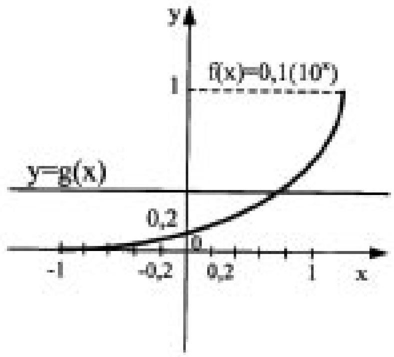
ÇÖZÜM ⇨ $\frac{3}{2}\log_a 4-\frac{2}{3}\log_a 8+\log_a x=\log_a 2$

$$\log_a 4^{3/2}-\log_a 8^{2/3}+\log_a x=\log_a 2 \qquad \leftarrow \text{(Teorem 3)}$$
$$\log_a \sqrt{4^3}-\log_a \sqrt[3]{8^2}+\log_a x=\log_a 2$$
$$\log_a \sqrt{64}-\log_a \sqrt[3]{64}+\log_a x=\log_a 2$$
$$\log_a \sqrt{8^2}-\log_a \sqrt[3]{4^3}+\log_a x=\log_a 2$$
$$\log_a 8-\log_a 4+\log_a x=\log_a 2$$
$$\log_a \frac{8\cdot x}{4}=\log_a 2 \qquad \leftarrow \text{(Teorem 5 ve 4)}$$
$$\log_a 2x=\log_a 2$$
$$2x=2$$
$$x=1$$

ALIŞTIRMA 8 ⇨ $3\log_b 2+\frac{1}{2}\log_b 25-\log_b 20=\log_b x$ denkleminde x i bulunuz.

ARAŞTIRMALAR

1) $f(x)=0{,}1(10^x)$ ve $g(x)=0{,}5$ fonksiyonlarının grafiksel gösterimi aşağıda verilmektedir.



(A) Yukarıdaki grafiği kullanarak $f(x)=g(x)$ in çözümünü tahmin edin.

(B) $f(x)=g(x)$ i sembolik olarak çözünüz.

BÖLÜMÜN ÖZETİ

Aşağıdaki tablo üslü ve logaritmalı denklemlerin çözümünde kullanılabilecek yöntemleri özetlemektedir.

Üslü Denklemler	
Denklem:	$ca^x=k$
Çözüm Metodu:	x i bulmak için her iki tarafın logaritmasını alınız.
Logaritmalı Denklemler	
Denklem:	$c\log_a x=k$
Çözüm Metodu:	x i bulmak için her iki tarafı a tabanına göre üslü şekle getiriniz. Yani, $a^{c\log_a x}=a^k$
Denklem:	$\log_a(bx)\mp\log_a(cx)=k$
Çözüm Metodu:	Bir denklemde aynı tabana göre birden fazla logaritma varsa, ilk önce logaritma teoremlerini (özeliklerini) kullanarak logaritmaları birleştirin.

DEĞERLENDİRME SORULARI

1. $2^{x^2-1}=8$ denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{-2, 2\}$ B) $\{-1, 1\}$ C) $\{2\}$ D) $\{-2\}$ E) ϕ

2. $2^x=-4$ denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{2\}$ B) $\{-2\}$ C) $\{1\}$ D) $\{-2, 2\}$ E) ϕ

3. $4^{x+2}+2^{x+1}=5$ denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{-1\}$ B) $\left\{-\frac{5}{8}\right\}$ C) $\left\{\frac{1}{2},-\frac{5}{8}\right\}$ D) $\left\{-1,-\frac{5}{8}\right\}$ E) $\left\{-1,\frac{1}{2}\right\}$

4. $\log_2(x+1)+\log_2(x-1)=3$ denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{-3, 3\}$ B) $\{-3\}$ C) $\{3\}$ D) $\left\{\frac{3}{2}\right\}$ E) ϕ

5. $\log_5(2x-1)+\log_{25}9=2$ denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\left\{\frac{22}{6}\right\}$ B) $\left\{\frac{27}{2}\right\}$ C) $\left\{\frac{8}{6}\right\}$ D) $\left\{\frac{14}{3}\right\}$ E) Hiçbiri

6. $\log_2(\log_2(\log_3 x))=2$ ise, x in değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 3^{14} B) 3^{16} C) 2^{18} D) 2^{19} E) 2

7. $160+10\log x=50$ ise, x in değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 10^{-11} B) 10^{11} C) 11^{10} D) $(-11)^{10}$ E) Hiçbiri

8. $\ln x+\ln x^2=3$ ise, x in değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) e^3 B) e C) 3 D) $\sqrt[3]{3}$ E) $\sqrt{3}$

9. $\log(7x-2)-\log(x-1)=3$ ise, x in değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{1002}{7}$ B) $\frac{1002}{993}$ C) $\frac{998}{993}$ D) $\frac{998}{1007}$ E) $\frac{998}{1002}$

10. $x^{\log x}=1000000x$ denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{3,-2\}$ B) $\{3\}$ C) $\{1000\}$ D) $\left\{\frac{1}{100}\right\}$ E) $\left\{1000, \frac{1}{100}\right\}$