ÜNİTE II

LİMİT

Limit

Sağdan ve Soldan Limit

Özel Fonksiyonlarda Limit

Limit Teoremleri

Belirsizlik Durumları

Örnekler

BU BÖLÜM NELERİ AMAÇLIYOR?

Bu bölümü çalıştığınızda (bitirdiğinizde),

* Bir fonksiyonun limitinin ne olduğunu öğrenip kavrayacaksınız.
* Fonksiyonun limiti varsa sağdan ve soldan limitlerinin eşit olduğunu öğrenecek ve kavrayacaksınız.
* Özel fonksiyonları gerçek fonksiyon olarak yazıp, limitlerine bakmayı öğreneceksiniz.
* Limit teoremlerini kavrayıp, üzerinde işlem yapmayı öğreneceksiniz.
* Trigonometrik fonksiyonların limitini kavrayıp, problem çözme yeteneğinizi geliştireceksiniz.
* Limit hesaplarındaki belirsizlik durumlarını inceleyerek, her belirsizlik durumu için ayrı bir yoldan limit hesabını yapmayı öğreneceksiniz.

BU BÖLÜMÜ NASIL ÇALIŞMALIYIZ?

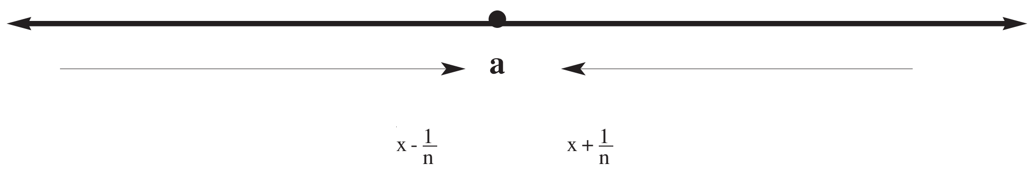
* Ön bilgi olarak lise II sınıf Matematik konusundaki trigonometri bilgisine ihtiyacınız olacak.
* Birinci bölümü çok iyi kavrayıp bu bölüme geçiniz.
* Tanımları çok dikkatli okuyun.
* Örnek ve çözümlerini çok iyi inceleyin yazarak çalışın.
* Bölüm sonundaki değerlendirme sorularını çözmeniz yararınıza olacaktır.

ÜNİTE II
LİMİT

Limit kavramı ve tanımı, kavram olarak eski olmasına karşın, tanımlanması ve kullanılması çok eski değildir. Örneğin limit ünlü $\varepsilon - \delta$ tekniği ile tanımlanması ve kullanılması ülü Alman Matematikçisi Eduard Heine (1821-1881) tarafından olmuştur. Limit fizik ve mühendislikte yaygın olarak kullanılılır.

Limit kavramının öğrencilere verilmesi, tanıtılması, öğretilmesi ve öğrenilmesi öyle o kadar da kolay değildir. Bunun için, limitin tanıtılmasına önce sezgisel olarak yaklaşalım. Daha sonra tam tanımını verelim.

f(x) fonksiyonu verilsin. x noktası bir a noktasına yeteri kadar yaklaşsın. x noktasının a noktasına reel eksen üzerinde sağdan ve soldan olmak üzere, iki yönlü yaklaşımı vardır.



Burada, x değerinin a değerine eşit olması gerekmez. Bir çok durumda, a noktası, f(x) fonksiyonunun tanım bölgesinde olmayabilir. Yani, x noktası a noktasına ($x \neq a$) sağdan ve soldan yaklaşırken f(x) fonksiyonu bir L sayısına yaklaşıyorsa f(x) fonksiyonunun bu a noktasında limiti vardır denir ve kısaca limit;

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \text{ile gösterilir.}$$

(x noktası a ya giderken f(x) fonksiyonunun limiti L dir, diye okunur.)

Eğer x noktası , a ya yaklaşırken f(x) fonksiyonu bir L sayısına yaklaşmıyorsa, f(x) fonksiyonunun limiti yoktur, diyeceğiz.

Yukardaki açıklamalar gösteriyor ki, f(x) fonksiyonunun x=a noktasına sağdan ve soldan yaklaşımları için , f(x) fonksiyonunun değerine eşit olması gerekir. Yani;

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L_1 \quad \text{ve} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = L_2$$

$$L_1 = L_2 = L \quad \text{ise} \quad \lim_{x \to a} f(x) = L \quad \text{dir.}$$

Aksi takdirde bu noktada limit yoktur diyeceğiz.

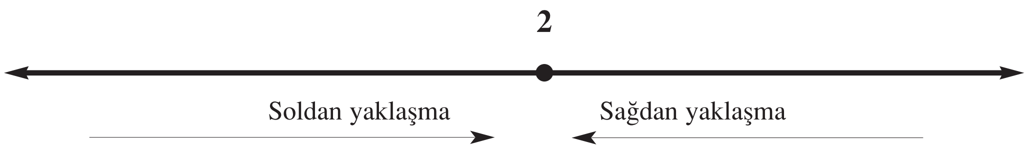
Örnek: $y = x^2$ fonksiyonu için , x noktası 2 değerine yaklaşırken, y değeri hangi değere yaklaşır? Bu durumda Reel eksen üzerindeki bu 2 sayısına sağdan ve soldan değerler vererek yaklaşalım.

x	$y = x^2$
1,5	2,25
1,7	2.89
1,9	3,61
1,99	3,9601
.	.
.	.
.	.

Soldan yaklaşma

x	$y = x^2$
2,9	8,41
2,5	6,25
2,1	4,41
2,01	4.0401
.	.
.	.
.	.

Sağdan yaklaşma



Yukarda görüldüğü gibi x sayısı, reel eksen üzerinde gerek sağdan ve gerekse soldan 2 sayısına yaklaşırken y değeri de her iki hâlde de 4 sayısına yaklaşmaktadır.

Öyleyse $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$ olduğu kolayca yazılır.

Benzer olarak $\lim_{x \to 1} [|x|]$ değeri var mıdır?

x	$f(x) = [/x/]$
0,5	0
0,6	0
0,8	0
0,9	0
0.99	0

Soldan yaklaşma

x	$f(x) = [/x/]$
1,9	1
1,5	1
1,4	1
1,1	1
1,01	1
1,001	1

Sağdan yaklaşma

Görüldüğü gibi, soldan yaklaşılırsa limit değeri 0, sağdan yaklaşılırsa limit değeri 1 olmaktadır. O hâlde, $\lim_{x \to 1} [|x|]$ değeri yoktur denir.

$A \subset R$, $f : A \to R$ bir fonksiyon olsun. $a \in R$ sabit bir sayı olmak üzere, terimleri $A-\{a\}$ kümesinde olan ve a ya yakınsayan her (x_n) dizisi için $(f(x_n))$ görüntü dizileri bir $L \in R$ sayısına yaklaşıyorsa. x, a ya yaklaşırken ($x \to a$ için) f fonksiyonunun limiti L dir denir ve limit;

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ biçiminde gösterilir.

Örnek: $f = R \to R$, $f(x) = x^2 - 1$ fonksiyonu veriliyor. x, 1 e giderken fonksiyonun limitini bulunuz.

Yani, $\lim\limits_{x \to 1} (x^2 - 1)$ nedir?

Çözüm: 1 e soldan yakınsayan $\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ dizisi için,

$$(f(x_n)) = \left((1 - \frac{1}{n})^2 - 1\right) = \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} - 1\right) = \left(\frac{1}{n^2} - \frac{2}{n}\right) = \left(\left(\frac{1}{n^2}\right) - 2\left(\frac{1}{n}\right)\right) \to 0$$

Ayrıca 1 e sağdan yakınsayan $\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ dizisi için,

$$(f(x_n)) = \left((1 + \frac{1}{n})^2 - 1\right) = \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} - 1\right)$$

$$= \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n}\right) = \left(\left(\frac{1}{n^2}\right) + 2.\left(\frac{1}{n}\right)\right) \to 0$$

O halde ;

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 0$ olduğundan

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$

olarak yazılır.

Pratik yöntem ile , limitin var olduğu kesin olarak biliniyorsa

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x^2 - 1) = 1^2 - 1 = 0$

Örnek: $f: R \rightarrow R,\ f(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & x < 0 \text{ ise} \\ 3, & x \geq 0 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonu veriliyor. $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ değerini bulunuz.

Çözüm: 0 noktasına soldan yaklaşırsak, $f(x) = 2 - x^2$

0 noktasına sağdan yaklaşırsak $f(x) = 3$ alırız.

O hâlde;

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (2 - x^2) = 2 - 0^2 = 2$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 3 = 3$$

$2 \neq 3$ olduğundan limit yoktur.

$A \subset R$, $f = A \rightarrow R$ bir fonksiyon olsun ve $A \in IR$ olsun.
$\forall \varepsilon \in R^+$ için $|x - a| < \delta$ (delta) olduğunda $|f(x) - L| < \varepsilon$ olacak biçimde bir $\delta(\varepsilon) \in R^+$ sayısı varsa, $x \rightarrow a$ için f nin limiti L dir, denir ve $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ şeklinde gösterilir.

$$\forall \varepsilon \in R^+ \text{ için } \exists\ \delta(\varepsilon) \in R^+ \text{ öyleki } |x - a| < \varepsilon \Leftrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = L$$

Bu tanım önceki limit tanımına denktir. Çünkü $|x - a| < \delta$ olması demek, $|x_n - a| < \delta$ yani $(x_n) \rightarrow a$ olması demektir. Bu durumda $|f(x) - L| < \varepsilon$ olması demek $|f(x_n) - L| < \varepsilon$ olması yani $(f(x_n)) \rightarrow L$ olması demektir.

Diğer bir deyişle $|x - a| < \delta$ olması, δ istenildiği kadar küçük seçildiğinde x ile a arasındaki uzaklığın δ dan küçük kalması ve sıfıra yaklaşması, dolayısıyla $x \rightarrow a$

Bu durumda $|f(x) - L| < \varepsilon$ olması ise, çok küçük ε lar için f(x) ile L arasındaki uzaklığın 0 a yaklaşması $f(x) \to L$ olması anlamına gelir.

Bu yönteme $\delta - \varepsilon$ tekniği adı verilir.

Örnek: $f : R \to R$, $f(x) = 2x + 1$ ise $\lim\limits_{x \to 2} (2x + 1) = 5$ olduğunu ispatlayınız.

$\forall \varepsilon \in R^+$ in $\exists f \in R^2$ öyleki, $|x - a| < \delta$ iken $|f(x) - L| < \varepsilon$ olmalıdır.

$|x - 2| < \delta \Rightarrow 2|x - 2| < 2\delta$

$|2x - 4| < 2\delta$

$|(2x + 1) - 5| < 2\delta$

O hâlde $2\delta < \varepsilon$ dersek. $\delta < \dfrac{\varepsilon}{2}$

bulunur. Yani $\varepsilon \in R^+$ verildiğinde $\delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{2}$ veya $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ den küçük pozitif bir sayı olarak alınabilir.

$\forall \varepsilon \in R^+$ en az bir δ bulunduğunda tanıma göre

$\lim\limits_{x \to 2} |2x + 1| = 5$ olur.

SAĞDAN VE SOLDAN LİMİT

A bir açık aralık, $a \in A$ ve f, A da ya da A-{a} da tanımlı bir fonksiyon olsun.

1. x değişkeni a ya sağdan yaklaştırdığımızda f(x) bir L_1 sayısına yaklaşıyorsa, f nin x = a da sağdan limiti L_1 dir, denir ve bu durum ;

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L_1$ ile gösterilir.

2. x değişkeni a ya soldan yaklaştığında f(x) bir L_2 sayısına yaklaşıyorsa, f nin x = a da soldan limiti L_2 denir ve bu durum ;

$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L_2$ ile gösterilir.

3. x değişkeni soldan ve sağdan a ya yaklaştığında f(x) bir L sayısına yaklaşıyorsa , f nin x = a da limiti L dir denir ve bu durum

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ **ile gösterilir.**

1. $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$ *ise* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ *dır.*

2. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ *ise* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ *yoktur.*

3. $h > 0$ *olmak üzere,*

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{h\to 0} f(a-h)$ *ve* $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{h\to 0} f(a+h)$ *dir.*

4. $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ *varsa bu limit tekdir.*

Parçalı fonksiyonlarda, parçalanma noktalarında (kritik noktalarda) sağdan ve soldan limite mutlaka bakılmalıdır.

Örnek: f: R→R $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 0 \text{ ise} \\ 2x+1, & x \geq 0 \text{ ise} \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ nedir?

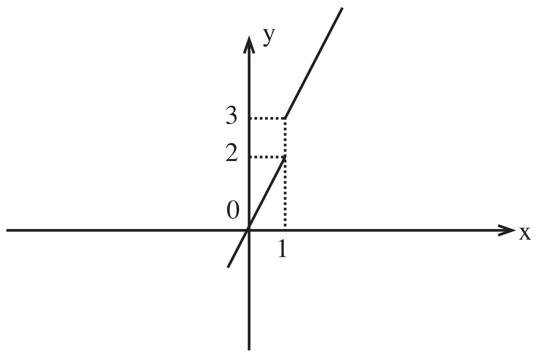
Çözüm: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (x^2 - 1) = 0^2 - 1 = -1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (2x+1) = 2.0+1 = 1$

$-1 \neq 1$ O hâlde

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ yoktur.

Örnek

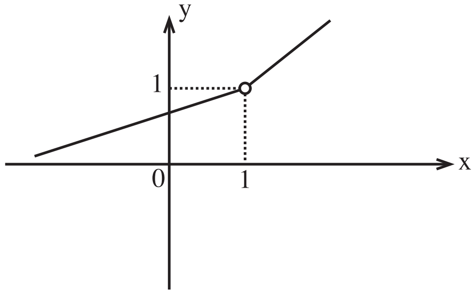


Şekildeki f (x) fonksiyonun x = 1 noktasında limiti var mıdır? Varsa nedir?

Çözüm

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 3 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 2\end{array}\right\} \quad 3 \neq 2 \text{ olduğundan} \quad \lim\limits_{x\to 1} f(x) \text{ yoktur.}$$

Örnek



Şekildeki f(x) fonksiyonunun x = 1 noktasında limiti var mıdır? Varsa nedir?

Çözüm

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1\end{array}\right\} \lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$$

f (1) = Tanımsız

fonksiyonun limiti vardır. Limit değeri 1 dir.

Bir fonksiyonun $x = x_0$ noktasında limitinin olması için $x = x_0$ noktasında tanımlı olması gerekmez.

ÖZEL FONKSİYONLARDA LİMİT

Bütün özel tanımlı fonksiyonların limiti araştırılırken, verilen özel tanımlı fonksiyon parçalı fonksiyon olarak yazılmalı, sonra sağdan ve soldan limit değerlerine bakılmalı.

Eğer verilen noktada sağdan limit değeri soldan limit değerine eşit ise 0 noktada limiti vardır denir. Aksi hâlde verilen noktada limiti yoktur deriz.

Örnek: $\lim\limits_{x \to 2} \text{Sgn}(x-2) = ?$

Çözüm: f(x) = Sgn(x -2) fonksiyonunu parçalı fonksiyon olarak yazarsak.

$x - 2 = 0$

$x = 2$

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 2 \text{ ise} \\ 0, & x = 2 \text{ ise} \\ 1, & x > 2 \text{ ise} \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to 2^-} f(x) = -1 \\ &\lim_{x \to 2^+} f(x) = 1 \end{aligned}\right\}$$

$-1 \neq 1$ olduğundan $x = 2$ noktasında limit değeri yoktur denir ve $\lim\limits_{x \to 2} \text{sgn}\,(x-2)$ yoktur diye ifade edilir.

Örnek: $\lim\limits_{x \to 2^+} [\![x + 2]\!] = ?$

Çözüm: $f(x) = [\![x+2]\!] = [\![x]\!] + 2$

$x \to 2^+ \Rightarrow [\![x]\!] = 2$

$x \to 2^- \Rightarrow [\![x]\!] = 1$

olduğunu düşünürsek

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to 2^+} f(x) = 4 \\ &\lim_{x \to 2^-} f(x) = 3 \end{aligned}\right\} \text{olur.}$$

$4 \neq 3$ olduğundan limit yok.

Örnek

$\lim\limits_{x \to 4} |x - 4| = ?$

Çözüm: $f(x) = |x-4|$ fonksiyonunu parçalı fonksiyon olarak yazalım.

$$|x-4| = \begin{cases} -x+4 & , \ x < 4 \text{ ise} \\ 0 & , \ x = 4 \text{ ise} \\ x-4 & , \ x > 4 \text{ ise} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to4^-} (-x+4) = -4+4 = 0 \\ \lim\limits_{x\to4^+} f(x) = \lim\limits_{x\to4^+} (x-4) = 4-4 = 0 \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to4} f(x) = 4$$

Örnek: $\lim\limits_{x\to0} \frac{|x|}{x} = ?$

Çözüm: $$\lim\limits_{x\to0} \frac{|x|}{x} = \begin{cases} -1 & , \quad x < 0 \\ \text{Tanımsız,} & \quad x = 0 \\ 1 & \quad x > 0 \end{cases}$$

$$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} 1 = 1$$

$$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-} (-1) = -1$$

$1 \neq -1$ olduğundan $\lim\limits_{x\to0} \frac{|x|}{x}$ yoktur.

Örnek: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} |\cos x| = ?$

Çözüm: $$|\cos x| = \begin{cases} \cos x, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ -\cos x, & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$$

$$\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^+} |\cos x| = \lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^+} (-\cos x) = -\cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} |\cos x| = \lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} (\cos x) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

O hâlde $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})} (\cos x) = 0$

Örnek: $f(x) = \frac{|x|}{x} - Sgn\,[\![(2x-1)]\!]$ ise $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ nedir?

Çözüm : $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1 - Sgn\,[\![2.(-0.001)-1]\!] = -1 - Sgn(-0{,}002-1) = -1+1 = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1 - Sgn\,[\![2.(0.001)-1]\!] = 1 - 1 = 0$

olduğundan $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

Örnek: $\lim\limits_{x \to 2^+} \left(\frac{|2-x|}{x^2-4} + \frac{Sgn(3x+4)}{[\![|x+2|]\!]} \right) = ?$

Çözüm : $x \to 2^+$ iken $|2-x| = -2+x$

$Sgn(3x+4) = 1$

$[\![|x+2|]\!] = 4$ dür.

$$\lim_{x \to 2^+} \left(\frac{x-2}{(x-2)\,(x+2)} + \frac{Sgn(3x+4)}{[\![|x+2|]\!]} \right) =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

LİMİT TEOREMLERİ

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_1$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L_2$ ve $\lambda \in IR$ ise

$A \subset R$, $f: A \to R$ ve $g: A \to R$ iki fonksiyon olsun.

1) $\lim\limits_{x \to a} (f \pm g)(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x) = L_1 \pm L_2$

2) $\lim\limits_{x \to a} (\lambda f)(x) = \lambda \lim\limits_{x \to a} f(x) = \lambda . L_1$

3. $\lim\limits_{x \to a} (f.g)(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) . \lim\limits_{x \to a} g(x) = L_1 . L_2$

4) $\forall x \in A$ için $g(x) \neq 0$ ve $L_2 \neq 0$ ise

$$\lim_{x \to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$$

Örnekler

a) $\lim\limits_{x\to 1}(2x+3) = \lim\limits_{x\to 1} 2x + \lim\limits_{x\to 1} 3$

$= 2.1 + 3 = 5$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\left(3x^2 - 2x + 2\right) = \lim\limits_{x\to 1} 3x^2 - \lim\limits_{x\to 1} 2x + \lim\limits_{x\to 1} 2$

$= 3\lim\limits_{x\to 1} x^2 - 2\lim\limits_{x\to 1} x + \lim\limits_{x\to 1} 2$

$= 3(1)^2 - 2.(1) + 2$

$= 3 - 2 + 2 = 3$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+4}{x-2} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 1} x^2+4}{\lim\limits_{x\to 1} x-2} = \dfrac{1+4}{1-2} = \dfrac{5}{-1} = -5$

d) $\lim\limits_{x\to 2}\left(3x + \operatorname{sgn}(x^2-1) + [|x - \tfrac{1}{2}|]\right)$

$= \lim\limits_{x\to 2}(3x) + \lim\limits_{x\to 2}\operatorname{sgn}(x^2-1) + \lim\limits_{x\to 2}[|x - \tfrac{1}{2}|]$

$= 6 + 1 + 1 = 8$

TEOREM

1. $\lim\limits_{x\to a}|f(x)| = |\lim\limits_{x\to a} f(x)|$ dir.

2. $\lim\limits_{x\to a} c^{f(x)} = c^{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$

3. a) n bir çift doğal sayı ve $f(x) \geq 0$ ise

   $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$

   b) n bir tek doğal sayı ise

   $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$ dir.

4. $\lim\limits_{x\to a}(\log_b f(x)) = \log_b\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)$ dir

Örnek: $\lim\limits_{x\to 2}|x-2| = \lim\limits_{x\to 2}|(x-2)| = 0$

Örnek: $\lim\limits_{x\to 2} 3^{x^2} = 3^{\lim\limits_{x\to 2} x^2} = 3^4 = 81$

Örnek: $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x} = \sqrt{\lim\limits_{x\to 4} x} = 2$

Örnek: $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt[3]{x^2-1} = \sqrt[3]{\lim\limits_{x\to 2} x^2-1} = \sqrt[3]{3}$

Örnek: $\lim\limits_{x\to e}(\ln x) = \ln\left(\lim\limits_{x\to e} x\right) = \ln e = 1$

$A \subset R$ ve $f : A \to R$ bir fonksiyon olsun.

1. $\forall(x_n)$, $(x_n) \to \infty$ için $(f(x_n)) \to L_1$ ise $x \to \infty$ için f fonksiyonunun limiti L_1 denir ve $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) = L_1$ biçiminde gösterilir.

2. $\forall(x_n)$, $(x_n) \to -\infty$ için $(f(x_n)) \to L_2$ ise $x \to -\infty$ için f fonksiyonunun limiti L_2 denir ve $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = L_2$ şeklinde gösterilir.

Genişletilmiş reel sayılarda işlem ve özellikleri:

a∈ olsun

1) $a.\infty = \infty$

2) $\infty + \infty = \infty$

3) $\dfrac{\infty}{\infty}$ = **belirsiz**

4) $\infty - \infty$ = **belirsiz**

5) $\infty - a = \infty$

6) ∞^0 = **belirsiz**

7) 0^0 = **belirsiz**

Polinom şeklindeki ifadelerde $x \to \pm\infty$ için limit hesabı

$k \in R$, $n \in N^+$

$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots + k$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} x^n\left(a + \dfrac{b}{x} + \dfrac{c}{x^2} + \ldots + \dfrac{k}{x^n}\right) = (\pm\infty)^n . a$

Pratik kural

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{p(x)}{Q(x)}$, $\quad Q(x) \neq 0$

Eğer, der p(x) > der Q(x) ise limitin değeri ∞ veya $-\infty$ dur.

Eğer, der p(x) = der Q (x) ise en büyük dereceli terimlerin katsayılarının bölümü

Eğer der p (x) < der Q(x) ise limitin değeri 0 dır.

Örnek: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

Örnek: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2+x}{1-x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(-1 + \dfrac{3}{1-x}\right)$

$= \lim\limits_{x\to\infty}(-1) + \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3}{-1+x}$

$= -1 + 0 = -1$

$\dfrac{x+2}{-x+1} = -1 + \dfrac{3}{-x+1}$

Teorem: $|a| < 1$ ise $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = 0$ dır.

Örnek: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{3^x} = 0$

TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN LİMİTİ

Teorem: a,b,c∈R olmak üzere,

1. $\lim\limits_{x \to a} \sin x = \sin a$
2. $\lim\limits_{x \to a} \cos x = \cos a$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1$
4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$
5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$
6. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan bx}{\sin cx} = \dfrac{b}{c}$
7. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin bx}{\sin cx} = \dfrac{b}{c}$
8. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan bx}{\tan cx} = \dfrac{b}{c}$
9. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin bx}{\tan cx} = \dfrac{b}{c}$

⇨ *3- 9 arası ifadelerin anlamları türev konusunda l Hospital kuralı ile daha iyi anlaşılacaktır.*

BELİRSİZLİK DURUMLARI

Limit hesaplamalarında , $\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}$, $0.\infty$, $\infty - \infty$, belirsizlik durumlarını görelim

A) $\dfrac{0}{0}$ biçimindeki belirsizlikler.

$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ için $\dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = \dfrac{0}{0}$ olması durumunda pay ve payda da (x-a) çarpanı var demektir.

Pay x - a). f_1 (x) payda da (x -a) . g_1 (x) şeklinde çarpanlarına ayrılırsa

$$\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} (x-a)\, f_1(x)}{\lim\limits_{x\to a} (x-a)\, g_1(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to a} g_1(x)}$$

hâline gelir. Eğer yine $\frac{0}{0}$ hâlinde ise aynı yol ile pay ve payda çarpanlarına ayrılır.

Örnek: $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{4-4}{2-2} = \frac{0}{0}$ belirsiz.

$$\lim\limits_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} (x+2) = 4$$

Örnek: $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2-x-2}{x+1} = \frac{(-1)^2-(-1)-2}{-1+1} = \frac{1+1-2}{0} = \frac{0}{0}$ belirsiz.

$$\lim\limits_{x\to -1} \frac{(x+1)(x-2)}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1} (x-2) = -1-2 = -3$$

Örnek: $\lim\limits_{x\to y} \frac{y^3-x^3}{y^2-x^2} = \frac{y^3-y^3}{y^2-y^2} = \frac{0}{0}$

$$\lim\limits_{x\to y} \frac{(y-x)(y^2+yx+x^2)}{(y-x)(y+x)} = \lim\limits_{x\to y} \frac{y^2+yx+x^2}{y+x} = \frac{y^2+y^2+y^2}{2y}$$

$$= \frac{3y^2}{2y} = \frac{3}{2} y$$

B) $\frac{\infty}{\infty}$ biçimindeki belirsizlikler.

$$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ için } \frac{\lim\limits_{x\to\infty} f(x)}{\lim\limits_{x\to\infty} g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$$

durumunda pay ve payda en yüksek dereceli x parantezine alınıp kısaltmalar yapılır ve limit hesabına geçilir.

Örnek: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+x}{x^2-x} = \frac{x^2+x}{x^2-x} = \frac{\infty}{\infty}$ o hâlde,

$$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+x}{x^2-x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 1 + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}}{\lim\limits_{x\to\infty} 1 - \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}} = \frac{1+0}{1-0} = 1$$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

Örnek:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-7x^2+3}{3x^2-5x+7}=\frac{\infty}{\infty} \text{ o hâlde,}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4\left(3-\frac{7}{x^2}+\frac{3}{x^4}\right)}{x^2\left(3-\frac{5}{x}+\frac{7}{x^2}\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}x^2.\left(3-\frac{7}{x^2}+\frac{3}{x^4}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\frac{5}{x}+\frac{7}{x^2}\right)}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}3x^2-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^4}}{\lim\limits_{x\to\infty}3-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7}{x^2}}=\frac{\infty-0+0}{3-0+0}=\frac{\infty}{3}=\infty$$

Örnek:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{x-1}=\frac{-\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x\,.\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\frac{-\infty\,(1+0)}{1-0}=-\infty$$

C) ∞ - ∞ BİÇİMİNDEKİ BELİRSİZLİK

$\lim\limits_{x\to\mp\infty}\left[f(x)-g(x)\right]$ için $\lim\limits_{x\to\mp\infty}f(x)-\lim\limits_{x\to\mp\infty}g(x)=\infty-\infty$ durumunda f (x) ifadesi, eşleniği olan f (x) + g (x) ifadesi ile çarpılıp bölünürse $\frac{0}{0}$ veya $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği ile karşılaşılır. Bundan sonra, önceki yöntemlerle limit bulunmaya çalışılır.

Örnek:

$\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x})$ ifadesini bulunuz.

Çözüm

$\lim\limits_{x\to\infty}x-\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}=\infty-\infty$ o hâlde,

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x-\sqrt{x})(x+\sqrt{x})}{(x+\sqrt{x})}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-x}{x+\sqrt{x}}=\frac{\infty}{\infty}$ bu durumdan sonra önceki yöntemlerle

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x\left(1-x^{-\frac{1}{2}}\right)}=\frac{\infty\,(1-0)}{(1-0)}=\infty$$

Örnek: $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$ ifadesini bulunuz.

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2}{x^2-1}-\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=\infty-\infty$ O hâlde,

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{\underset{(x+1)}{x-1}}\right)\lim_{x\to 1}\left(\frac{2-x-1}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{-x+1}{x^2-1}\right)=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{-(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{x+1}=-\frac{1}{2}$$

Örnek: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{2x-1}\right)$ değerini bulunuz.

Çözüm: $\lim\limits_{x\to\infty}x-\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{2x-1}=\infty-\infty$ o hâlde eşleniği ile çarpıp bölelim.

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{2x-1}\right)\frac{\left(x+\sqrt{2x-1}\right)}{x+\sqrt{2x-1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+1}{x+\sqrt{2x-1}}=\frac{\infty}{\infty}\text{ bulunur.}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1+\sqrt{\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}\right)}=\lim_{x\to\infty}x=\infty$$

D) 0. ∞ BİÇİMİNDEKİ BELİRSİZLİKLER

$\lim\limits_{x\to a}f(x)\,.\,g(x)$ için $\lim\limits_{x\to a}f(x)\,.\lim\limits_{x\to a}g(x)=0.\infty$ olması durumunda bu belirsizlik $\lim\limits_{x\to a}f(x)\,.\,g(x)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$ ya da $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}$ hâlinde yazılırsa $\dfrac{\infty}{\infty}$ ya da $\dfrac{0}{0}$ belirsizlikleri hâline dönüştürürüz.

Örnek: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\,.\,(x^2-1)$ limitini bulunuz.

Çözüm: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\,(x^2-1)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\,(x^2-1)=0.\infty$ o hâlde,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\,(x^2-1)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x}=\infty\left(1-\frac{1}{\infty}\right)=\infty$$

LİMİTE AİT ÖRNEKLER

1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$ değeri var mıdır?

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \neq \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$ yok

2) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(1 + \frac{x}{|2x|}\right) = ?$

Çözüm: $x > 0 \Rightarrow |2x| = 2x;$

$$\lim_{x\to 0^+} \left(1+ \frac{x}{2x}\right) = \left(1+ \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

3) $\lim\limits_{x\to 0^-} \left(1+ \frac{x}{|2x|}\right) = ?$

Çözüm: $x < 0$ ise $|2x| = -2x$

$$\lim_{x\to 0^-} \left(1+ \frac{x}{|2x|}\right) = \left(1+ \frac{x}{-2x}\right) = \left(1- \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

4) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x-1}{1+x}$ değeri var mıdır?

Çözüm: $\lim\limits_{x\to (-1)^+} \frac{x-1}{1+x} = \frac{(-1)-1}{1+(-1)^+} = \frac{(-2)}{0^+} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to (-1)^-} \frac{x-1}{1+x} = \frac{(-1)-1}{1+(-1)^-} = \frac{(-2)}{0^-} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to (-1)^+} \frac{x-1}{1+x} \neq \lim\limits_{x\to (-1)^-} \frac{x-1}{1+x}$ olduğundan limit yok.

5) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2}}{x}$ değeri var mıdır?

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$

$x > 0$ ise $|x| = x$

$x < 0$ ise $|x| = -x$ dır.

o hâlde, $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} \neq \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} =$ olduğundan limit yok.

6) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\text{Sgn}\,[|x|] + (2x-1)\right]$ değeri var mıdır?

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\text{Sgn}\,[\,|x|\,] + 2x - 1\right] = \text{Sgn}\,[|0^+|] + 2.(0) - 1$

$= 0 - 1 = -1$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\left[\text{Sgn}\,[\,|x|\,] + 2x - 1\right] = \text{Sgn}\,[|0^-|] + 2\,(0) - 1$

$= \text{Sgn}\,(-1) + (-1)$

$= -1 - 1 = -2$

$-1 \neq -2$ o hâlde limit yok.

7) $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{|x-2|}{x-2} + \text{Sgn}\,x\right)$ ifadesini hesaplayınız.

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{(x-2)}{x-2} + \text{Sgn}\,x\right) = \lim\limits_{x\to 2^+}\,(1 + \text{Sgn}\,x)$

$= 1 + \text{Sgn}\,(2^+)$

$= 1 + 1 = 2$

8) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+2^{\frac{1}{x}}\right)$ değeri var mıdır?

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+2^{\frac{1}{x}}\right) = 1 + 2^{\frac{1}{0^+}} = 1 + 2^{\infty} = 1 + \infty = \infty$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\left(1+2^{\frac{1}{x}}\right) = 1 + 2^{-\infty} = 1 + \dfrac{1}{2^{\infty}} = 1$ limit yoktur.

9) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 2x - 3}$ ifadesini hesaplayınız.

Çözüm: $\dfrac{3^2 - 6.3 + 9}{3^2 - 2.3 - 3} = \dfrac{0}{0}$ belirsiz.

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)\,(x-3)}{(x-3)\,(x+1)} = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x+1} = \dfrac{0}{4} = 0$

10) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{2x} - \sqrt{2}}$ ifadesini hesaplayınız

Çözüm: $\dfrac{\sqrt{1} - 1}{\sqrt{2} - \sqrt{2}} = \dfrac{0}{0}$ = belirsiz.

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{2}\,.\,(\sqrt{x} - 1)} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

11) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{3+x} - 2}{x^2-1}$ ifadesini hesaplayınız.

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{3+x} - 2}{x^2-1} = \dfrac{0}{0}$ belirsiz.

$$\lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{3+x} - 2)(\sqrt{3+x} + 2)}{(x^2-1)(\sqrt{3+x} + 2)} = \lim_{x\to 1} \frac{3+x-4}{(x^2-1)(\sqrt{3+x}+2)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)}{(x-1)(x+1)(\sqrt{3+x}+2)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{3+x}+2)} = \frac{1}{2(2+2)} = \frac{1}{8}$$

12) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{2x^2-3x+1}{5x^4-2x+1}$ ifadesini hesaplayınız

Çözüm: $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{2x^2-3x+1}{5x^4-2x+1} = \dfrac{\infty}{\infty}$ belirsiz

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^{\cancel{4}}\left(5 - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right)} = \frac{2-0+0}{\infty^2(5-0+0)} = \frac{2}{\infty} = 0$$

13) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{x}{\cos x}$ değeri var mıdır?

Çözüm: $\lim\limits_{x\to (\frac{\pi}{2})^+} \dfrac{x}{\cos x} = \dfrac{\frac{\pi}{2}}{\cos (\frac{\pi}{2})^+} = \dfrac{\frac{\pi}{2}}{0^+} = +\infty$

$$\lim_{x\to (\frac{\pi}{2})^-} \frac{x}{\cos x} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\cos (\frac{\pi}{2})^-} = \frac{\frac{\pi}{2}}{0^-} = -\infty$$

$\lim\limits_{x\to (\frac{\pi}{2})} \dfrac{x}{\cos x}$ yoktur.

15) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{x}$ değeri var mıdır?

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\cos x}{x} = \dfrac{\cos (0^+)}{0^+} = \dfrac{1}{0^+} = \infty$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\cos x}{x} = \frac{\cos 0^-}{0^-} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{x}$ yoktur.

ÖZET

Bu bölümde, aşağıdaki durumlar öğrencilere verilmeye çalışılmıştır:

1. Limitin tarihçesi, limite sezgisel yaklaşım ve limitin tanımı verilmiştir.

2. Limitde sağdan ve soldan yaklaşmanın ne olduğu anlatılarak örneklerle pekiştirilmiştir.

3. Limitin var olup olmadığını anlamak için ε-δ (Epsilon- Delta) tekniği öğrencilere tanıtılmıştır.

4. Sağdan ve soldan limitin tanımı verilerek ve gerekli uyarılarda bulunduktan sonra örneklere geçilmiştir.

5. Özel fonksiyonların limitinin nasıl alınacağı öğrencilere anlatılmış, ilgili örneklerle limit konusu açıklık kazanmıştır.

6. Limit teoremleri verilip, pekiştirmek için örneklere başvurulmuştur.

7. Limitte belirsizlik durumları verilip, ilgili örneklerle bazı belirsizlik durumları için limit alınmıştır.

DEĞERLENDİRME TESTİ 2

1) $\lim\limits_{x\to 3^+} \left[\!\left[\dfrac{|5-3x|}{2} \right]\!\right]$ değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 4 B) -3 C) -2 D) 1

2) $f(x) = \operatorname{sgn}(x^2 - 3x - 4) + 1$ ise $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)$ değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1

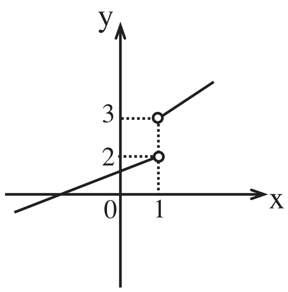
3) $f : R \to R$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 0 \text{ ise} \\ 2x + 1, & x \geq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2

4)



şekildeki f (x) fonksiyonun grafiği verilmiştir. Buna göre x = 1 noktası için ne söylenir?

a) x = 1 noktasında limit yoktur.

b) x = 1 noktasında limit vardır.

c) x = 1 noktasında limit vardır ve 2 dir.

d) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 3$

5) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} |\sin x|$ değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) limiti yoktur.

6) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{3x^2+5}{x-3}$ değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) e B) $\frac{1}{2}$ C) 0 D) ∞

7) $\lim\limits_{x\to \infty} (\sqrt{x} - x)$ değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0 B) - 1 C) 1 D) $-\infty$

DEĞERLENDİRME TESTİNİN ÇÖZÜMLERİ

1) $\lim\limits_{x \to 3^+} [|\frac{5 - 3^+}{2}|] = -3$

Doğru cevap B

2) $x \to 4^+ \Rightarrow x^2 - 3x - 4 < 0$ dır.

$Sgn(x^2 - 3x - 4) = -1$

$\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = -1 + 1 = 0$

Doğru cevap C

3) $\lim\limits_{x \to 0^-} (x^2 + 1) = 1$

$\lim\limits_{x \to 0^+} (2x + 1) = 1$

Doğru cevap C

4) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2$

$2 \neq 3$ limit yok.

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 3$

Doğru cevap A

5) $|\sin x| = \begin{cases} \sin x & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ -\sin x & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} = |\sin x| = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x = \sin \frac{\pi}{2} = 1$

Doğru cevap B

6) I. Yol der $(3x^2+5) >$ der (x-3) olduğundan

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+5}{x-3} = \infty$$

II. Yol $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(3+\frac{5}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{3}{x}\right)} = \frac{\infty(3+0)}{(1-0)} = \infty$$

Doğru cevap D

7) $\infty - \infty$ biçiminde,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x}-x)\,.\,(\sqrt{x}+x)}{\sqrt{x}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x-x^2}{\sqrt{x}+x} = \frac{\infty}{\infty}$$ biçiminde belirsiz.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(\frac{1}{x}-1\right)}{x\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+1\right)} = \frac{\infty(0-1)}{(0+1)} = -\infty$$

Doğru cevap D