2. ÜNİTE

KARMAŞIK SAYILAR

☞BU ÜNİTENİN HEDEFLERİ☜

Bu üniteyi bitirdiğinizde aşağıdaki hedeflere ulaşabileceksiniz:

- Karmaşık sayıları kavrayabilecek,
- Karmaşık sayılarla uygulama yapabilecek,
- Karmaşık sayıların geometrik gösterimini kavrayabilecek,
- Karmaşık sayıların geometrik gösterimi ile ilgili uygulama yapabilecek,
- Karmaşık sayıları kutupsal koordinatlarla kavrayabilecek,
- Karmaşık sayılarda kutupsal koordinatlarla uygulama yapabileceksiniz.

✍YUKARIDAKİ HEDEFLERİ KAZANMAK İÇİN NE YAPMALIYIZ?✍

- Üslü çokluklarla ilgili bilgilerinizi pekiştiriniz.
- Trigonometri konusunu tekrarlayınız.
- Denklemlerle ilgili temel işlemleri tekrarlayınız.
- Konu içinde verilen örnekleri çözerek çalışınız.
- Konu içinde sorulan alıştırma ve problemleri yanıtlayınız.
- Konu sonunda verilen araştırma ve değerlendirme sorularını yanıtlayınız.
- Kaynak kısmında yer alan kitaplardan yararlanarak bol soru çözünüz.

BÖLÜM 2-1

KARMAŞIK SAYILAR KÜMESİNDE İŞLEMLER

- ***KARMAŞIK SAYININ TANIMI***
- ***İKİ KARMAŞIK SAYININ EŞİTLİĞİ***
- ***KARMAŞIK SAYILARIN GEOMETRİK GÖSTERİMİ***
- ***BİR KARMAŞIK SAYININ EŞLENİĞİ***
- ***BİR KARMAŞIK SAYININ MUTLAK DEĞERİ (MODÜLÜ)***
- ***KARMAŞIK SAYILAR KÜMESİNDE İŞLEMLER***
- ***i SAYISININ KUVVETLERİ***
- ***KARMAŞIK SAYILARIN TOPLAMININ, ÇARPIMININ VE BÖLÜMÜNÜN EŞLENİĞİ***
- ***KARMAŞIK SAYILARIN MUTLAK DEĞERİ (MODÜLÜ) İLE İLGİLİ ÖZELİKLER***
- ***KARMAŞIK DÜZLEMDE İKİ KARMAŞIK SAYI ARASINDAKİ UZAKLIK***

◆ *KARMAŞIK SAYININ TANIMI*

$ax^2+bx+c=0$ denkleminin diskriminantı, $\Delta=b^2-4ac<0$ ise denklemin reel sayı olan köklerinin olmadığını biliyoruz. Bu bölümde reel kökleri olmayan denklemlerin de çözümlerinin yapılabildiği yeni bir sayı kümesini inceleyeceğiz.

Aşağıdaki tabloda bazı denklemlerin, doğal sayılar (N), tam sayılar(Z), rasyonel sayılar (Q) ve reel sayılar (R) kümesindeki çözümlerini inceleyelim:

Denklem	Sayı Kümesinin İsmi	Sayı Kümesindeki Çözüm Kümesi
$x-5=0$	N	$\{5\}$
$x+5=0$	N	$\phi\ (-5\notin \mathrm{N})$
$x+5=0$	Z	$\{-5\}$
$3x+5=0$	Z	$\phi\ (\frac{-5}{3}\notin \mathrm{Z})$
$3x+5=0$	Q	$\left\{\frac{-5}{3}\right\}$
$x^2-2=0$	Q	$\phi\ (\sqrt{2}\notin \mathrm{Q}, -\sqrt{2}\notin \mathrm{Q})$
$x^2-2=0$	R	$\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$
$x^2+1=0$	N, Z, Q, R	ϕ

Tabloda görüldüğü üzere tanımlanan sayı kümesine göre elde edilen çözüm kümeleri farklılık gösterebilmektedir.

Z tam sayılar kümesi, N doğal sayılar kümesinin, negatif tam sayılarla genişletilmesiyle oluşturulmuştur.

Q rasyonel sayılar kümesi, Z tam sayılar kümesinin, kesir sayılarla genişletilmesiyle oluşturulmuştur.

R reel sayılar kümesi, Q rasyonel sayılar kümesinin irrasyonel sayılarla genişletilmesiyle oluşturulmuştur.

Sonuç olarak,

$N \subset Z \subset Q \subset R$ dir.

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin diskriminantı, $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ ise, denklemin reel sayı olan köklerinin olmadığını biliyoruz.

Örneğin $x^2 + 3 = 0$ denkleminin R kümesindeki çözüm kümesini bulmaya çalışalım:

$\forall x \in R$ için $x^2 \geq 0$ olduğundan,

$\forall x \in R$ için, $x^2 + 3 > 0$ dır.

Buna göre, $x^2 + 3 = 0$ denklemini sağlayan bir x reel sayısı yoktur. Başka bir deyişle, karesi –3 olan bir reel sayı yoktur.

$x^2 + 3 = 0$ denkleminin R kümesindeki çözüm kümesi, Ç=ϕ dir. Bu bölümde R reel sayılar kümesini genişleterek, yeni bir sayı kümesi elde edeceğiz. Bu yeni sayı kümesinde, $x^2 + 3 = 0$ gibi denklemleri sağlayan sayılar da bulunacaktır. Bu yeni sayı kümesi karmaşık sayılar kümesi olarak isimlendirilmektedir.

Karmaşık Sayılar Kümesi

a,b$\in R$ ve $i = \sqrt{-1}$ ya da $i^2 = -1$ olmak üzere,

$$z = a + bi$$

biçiminde tanımlanan **z** sayısına karmaşık (kompleks) sayı, bu sayılardan oluşan

$$C = \{z : z = a + bi,\ a,b \in R \text{ ve } i = \sqrt{-1}\}$$

kümesine de karmaşık sayılar kümesi denir denir ve C ile gösterilir. (Not: $i = \sqrt{-1} \Rightarrow i^2 = -1$ dir.)

$z \in C$ ise, $z = a + bi$ ve a,b$\in R$, $i = \sqrt{-1}$ dir.

$z = a + bi$ karmaşık sayısında **a** ya karmaşık sayının reel (gerçek) kısmı, **b** ye ise sanal (imajiner) kısmı, **i** ye sanal sayı birimi denir ve

$z = a + bi \Rightarrow \mathrm{Re}(z) = a$, $\dot{I}m(z) = b$ dir.

$z = a + bi$ karmaşık sayısı, $z = \mathrm{Re}(z) + \dot{\mathrm{I}}\mathrm{m}(z)\,\mathrm{i}$ biçimindedir.

ÖRNEK 1 ⇨ Aşağıdakileri inceleyelim:

(A) $z_1 = 3 - 6i \Rightarrow \mathrm{Re}(z_1) = 3$, $\dot{I}m(z_1) = -6$ dır.
(B) $z_2 = -2 + \sqrt{3}i \Rightarrow \mathrm{Re}(z_2) = -2$, $\dot{I}m(z_2) = \sqrt{3}$ tür.
(C) $z_3 = 8 + 0i \Rightarrow \mathrm{Re}(z_3) = 8$, $\dot{I}m(z_3) = 0$ dır.
(Not: Bu z sayısı, z=8 şeklinde de gösterilebilir.)

Görüldüğü gibi her reel sayı, sanal kısmı sıfır olan bir karmaşık sayıdır. Bu nedenle, $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$ dir.

(D) $z_4 = 0 - \frac{\sqrt{5}}{3}i \Rightarrow \mathrm{Re}(z_4) = 0, \dot{I}m(z_4) = \frac{-\sqrt{5}}{3}$ tür.
(Not: Bu z sayısı $z_4 = \frac{-\sqrt{5}}{3}i$ şeklinde de gösterilebilir.)

Reel kısmı 0 olan z=bi biçimindeki sayılara "**sanal sayılar**" denir.

ÖRNEK 2 ⇨ $2x^2 + x + 1 = 0$ denkleminin karmaşık sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ Verilen denklemde a=2, b=1, ve c=1 dir.

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = -7 = 7 \cdot i^2 \qquad \leftarrow (i^2 = -1)$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{-1 \pm \sqrt{7i^2}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{4}$$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{7}i}{4} \text{ ve } x_2 = \frac{-1 - \sqrt{7}i}{4} \text{ tür.}$$

O halde verilen denklemin çözüm kümesi,

$$Ç = \left\{ \frac{-1 + \sqrt{7}\mathrm{i}}{4}, \quad \frac{-1 - \sqrt{7}\mathrm{i}}{4} \right\} \text{ tür.}$$

ALIŞTIRMA 1 ⇨ $5x^2 - 4x + 3 = 0$ denkleminin karmaşık sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulunuz.

◆ *İKİ KARMAŞIK SAYININ EŞİTLİĞİ*

$z_1 = a_1 + b_1 i$ ve $z_2 = a_2 + b_2 i$ karmaşık sayıları için,

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2 \text{ ve } b_1 = b_2 \text{ dir.}$$

Başka bir deyişle, iki karmaşık sayı eşitse reel kısımlar ve sanal kısımlar birbirine eşittir. Karşıtı da doğrudur.

ÖRNEK 3 ⇨ $z_1 = (x-2) - 4i$, $z_2 = 6 + (y+10)i$ ve $z_1 = z_2$ olduğuna göre, x ve y değerleri nedir?

ÇÖZÜM ⇨ $z_1 = (x-2) - 4i \Rightarrow \text{Re}(z_1) = x - 2$, *ve* $\dot{I}m(z_1) = -4$

$z_2 = 6 + (y+10)i \Rightarrow \text{Re}(z_2) = 6$, *ve* $\dot{I}m(z_2) = y + 10$

$z_1 = z_2 \Rightarrow \text{Re}(z_1) = \text{Re}(z_2)$ ve $\dot{I}m(z_1) = \dot{I}m(z_2)$

O halde,

$$x - 2 = 6 \Rightarrow x = 6 + 2 \Rightarrow x = 8$$

$$-4 = y + 10 \Rightarrow y = -4 - 10 \Rightarrow y = -14$$

ÖRNEK 4 ⇨ $z_1 = (x-5) + 12i$, $z_2 = (-x+3) + (2y-6)i$ ve $z_1 = z_2$ ise, $z_3 = x + y\,i$ karmaşık sayısının reel ve sanal kısımlarını yazınız.

ÇÖZÜM ⇨ $z_1 = (x-5) + 12i \Rightarrow \text{Re}(z_1) = x - 5$, *ve* $\dot{I}m(z_1) = 12$

$z_2 = (-x+3) + (2y-6)i \Rightarrow \text{Re}(z_2) = -x + 3$, *ve* $\dot{I}m(z_2) = 2y - 6$

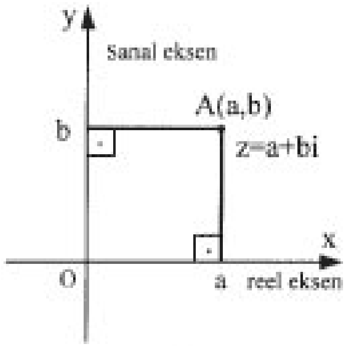
$z_1 = z_2 \Rightarrow \text{Re}(z_1) = \text{Re}(z_2)$ ve $\dot{I}m(z_1) = \dot{I}m(z_2)$ dir.

O halde,

$x - 5 = -x + 3 \Rightarrow x + x = 3 + 5 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4$ tür.
$12 = 2y - 6 \Rightarrow 2y = 12 + 6 \Rightarrow 2y = 18 \Rightarrow y = 9$ dur.
$z_3 = x + y\,i \Rightarrow z_3 = 4 + 9i$
$\text{Re}(z_3) = 4$ ve $\dot{I}m(z_3) = 9$ dur.

◆ KARMAŞIK SAYILARIN GEOMETRİK GÖSTERİMİ

$z = a + bi$ karmaşık sayısında, $\mathrm{Re}(z) = a$, $\dot{I}m(z) = b$ olduğundan, $(\mathrm{Re}(z), \dot{I}m(z)) = (a,b)$ ikilisidir.



Buna göre, C karmaşık sayılar kümesinin elemanları ile analitik düzlemin noktaları arasında,

$$z = a + bi \leftrightarrow A(a,b)$$

bire bir eşleme yapılabilir. Başka bir deyişle, analitik düzlemin her noktasına bir karmaşık sayı eşlenir.

$z_1 = 2 + 4i$ karmaşık sayısı, (2, 4) noktasına eşlenir.

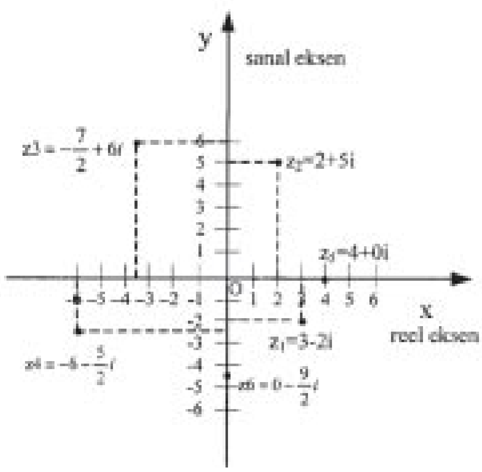
Bu eşlemede, karmaşık sayıların reel kısımlarının bulunduğu x eksenine **reel eksen**; sanal kısımlarının bulunduğu y eksenine **sanal eksen** denir.

Her noktasına bir karmaşık sayının eşlendiği düzleme, **karmaşık düzlem** denir. Başka bir deyişle, iki boyutlu analitik düzlemdeki x ekseninin reel eksen, y ekseninin sanal eksen alınmasıyla oluşturulan düzleme **karmaşık düzlem** denir. $z = a + bi$ karmaşık sayısının karmaşık düzlemdeki görüntüsü A(a,b) noktasıdır.

ÖRNEK 5 ➾ Aşağıdaki karmaşık sayıların eşlendiği noktaları belirtiniz.

$z_1 = 3 - 2i$, $z_2 = 2 + 5i$, $z_3 = -\frac{7}{2} + 6i$, $z_4 = -6 - \frac{5}{2}i$, $z_5 = 4$ ve $z_6 = -\frac{9}{2}i$

ÇÖZÜM ➾



$z_1 = 3 - 2i \leftrightarrow A(3,-2)$

$z_2 = 2 + 5i \leftrightarrow B(2,5)$

$z_3 = -\frac{7}{2} + 6i \leftrightarrow C(\frac{-7}{2}, 6)$

$z_4 = -6 - \frac{5}{2}i \leftrightarrow D(-6, \frac{-5}{2})$

$z_5 = 4 + 0i \leftrightarrow E(4, 0)$

$z_6 = 0 - \frac{9}{2}i \leftrightarrow F(0, \frac{-9}{2})$

◆ BİR KARMAŞIK SAYININ EŞLENİĞİ

Bir Karmaşık Sayının Eşleniği

$z = a + bi$ karmaşık sayısı için $\overline{z} = a - bi$ sayısına **z nin eşleniği** denir ve $\overline{z}$ ile gösterilir.

ÖRNEK 6 ⇨ $z_1 = 1 + 2i$ karmaşık sayısının eşleniğini bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ $z_1 = 1 + 2i$ ise $\overline{z}_1 = 1 - 2i$ dir.

ÖRNEK 7 ⇨ $z = 1 - 2i$ karmaşık sayısının eşleniğini bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ $z = 1 - 2i$ ise $\overline{z} = 1 + 2i$ dir.

Not: $z_1 = a + bi$ ve $z_2 = a - bi$ karmaşık sayıları birbirinin eşleniğidir.

ÖRNEK 8 ⇨ $z_1 = \frac{3}{6} + 4i$, $z_2 = -\sqrt{3} - 6i$, $z_3 = -5i$, ve $z_4 = 2$ sayılarının eşleniklerini yazınız.

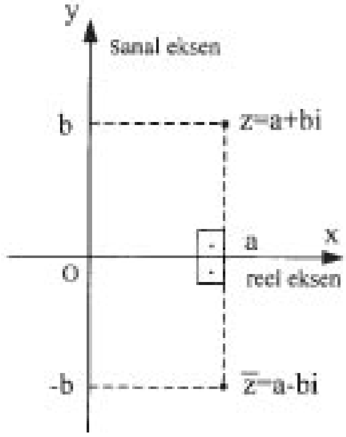
ÇÖZÜM ⇨ $z_1 = \frac{3}{6} + 4i \Rightarrow \overline{z}_1 = \frac{3}{6} - 4i$

$z_2 = -\sqrt{3} - 6i \Rightarrow \overline{z}_2 = -\sqrt{3} + 6i$

$z_3 = -5i \Rightarrow z_3 = 0 - 5i \Rightarrow \overline{z}_1 = +5i \Rightarrow \overline{z}_3 = 5i$

$z_4 = 2 = 2 + 0i \Rightarrow \overline{z}_4 = 2 - 0i \Rightarrow \overline{z}_4 = 2$

$z = a + bi$ ve $\overline{z} = a - bi$ karmaşık sayılarını karmaşık düzlemde gösterelim.



Karmaşık düzlem incelendiğinde

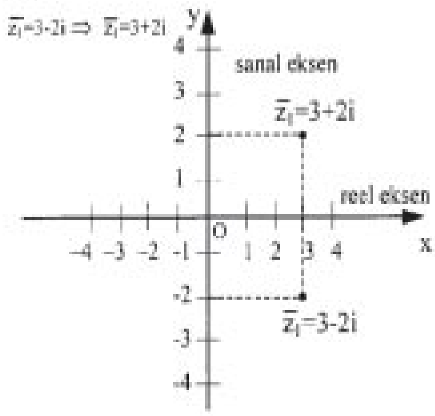
$z = a + bi$, $\overline{z} = a - bi$

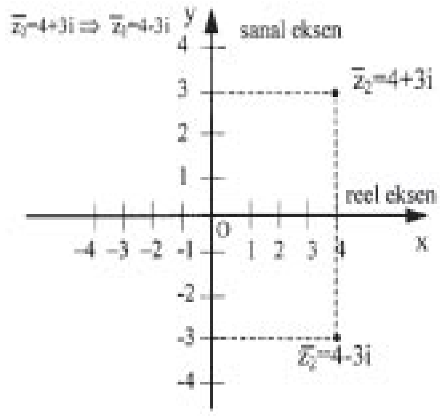
karmaşık sayıları, karmaşık düzlemde reel eksene (x eksenine) göre birbirinin simetriğidir.

ÖRNEK 9 ⇒ (A) $z_1 = 3 - 2i$, $z_2 = 4 + 3i$, karmaşık sayılarının eşleniğini bulunuz ve bunları karmaşık düzlemde gösteriniz.

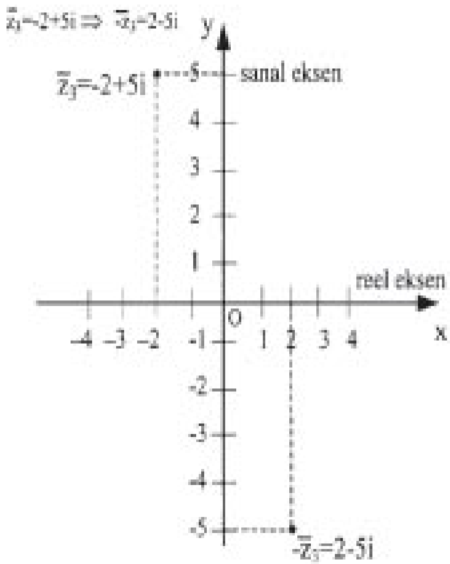
(B) $z_3 = -2 + 5i$, $z_4 = -3 - i$ karmaşık sayılarının $-z_3$ ve $-z_4$ ü karmaşık düzlemde gösteriniz.

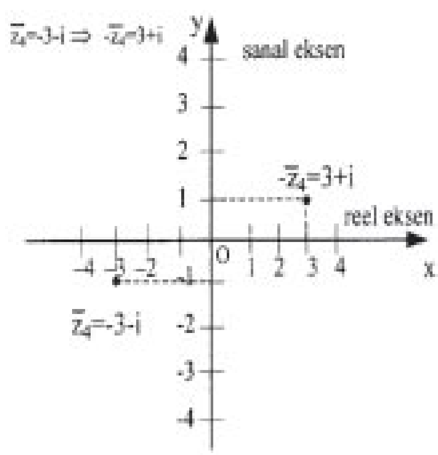
ÇÖZÜM ⇒





Görüldüğü gibi karmaşık sayı z ve kendi eşleniği $\overline{z}$ reel eksene göre simetriktir





Teorem: Bir karmaşık sayının eşleniğinin eşleniği, bu karmaşık sayıya eşittir.

$$\overline{(\overline{z})} = z$$

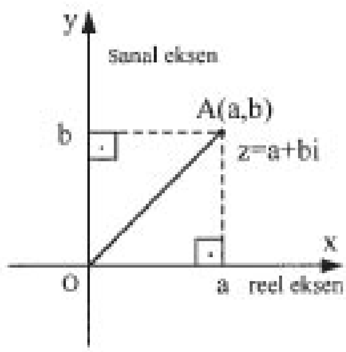
İspat: $z = a + bi \Rightarrow \overline{z} = a - bi$

$$\Rightarrow \overline{(\overline{z})} = \overline{a - bi} = a + bi = z \text{ olur.}$$

ÖRNEK 10 ⇨ z karmaşık sayısının eşleniğinin eşleniği $\overline{(\overline{z})} = 3 - \frac{4}{5}i$ olduğuna göre z karmaşık sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ $\overline{(\overline{z})} = 3 - \frac{4}{5}i \Rightarrow \overline{z} = 3 + \frac{4}{5}i \Rightarrow z = 3 - \frac{4}{5}i$ dir.

◆ *BİR KARMAŞIK SAYININ MUTLAK DEĞERİ (MODÜLÜ)*



$z = a + bi$ karmaşık sayısı, yandaki karmaşık düzlemde gösterilmiştir. Pisagor teoreminden yararlanarak OHA dik üçgeninde,

$$|OA|^2 = |OH|^2 + |AH|^2$$

$$|OA|^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow |OA| = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ bulunur.}$$

$z = a + bi$ karmaşık sayısının mutlak değeri $|z|$,

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ ve } |OA| = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ olduğundan}$$

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2} = |OA| \text{ dur.}$$

Sonuç olarak, karmaşık düzlemde, bir karmaşık sayıya karşılık gelen noktanın, başlangıç noktasına olan uzaklığına bu sayının **mutlak değeri (modülü)** denir.

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Bir Karmaşık Sayının Mutlak Değeri (Modülü)

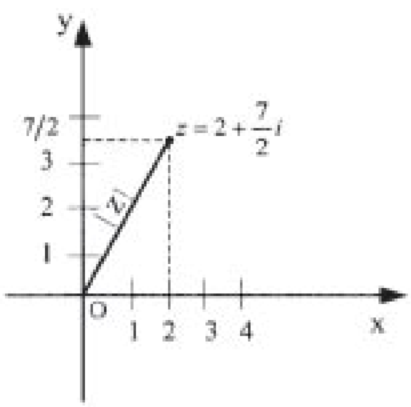
$z = a + bi$ ise $\sqrt{a^2 + b^2}$ ifadesine, z karmaşık sayısının **mutlak değeri** ya da **modülü** denir ve $|z|$ ile gösterilir.

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ dir.}$$

ÖRNEK 11 ⇨ $z = 2 + \frac{7}{2}i$ karmaşık sayısının mutlak değerini (modülünü) bularak karmaşık düzlemde gösteriniz.

ÇÖZÜM ⇨ $z = 2 + \frac{7}{2}i \Rightarrow a = 2,\ b = \frac{7}{2}$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow |z| = \sqrt{2^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2}$$



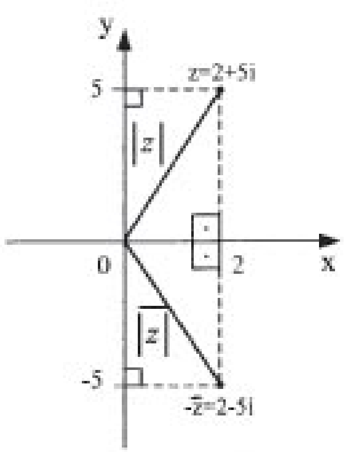
$$= \sqrt{4 + \frac{49}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{4}{\underset{(4)}{1}} + \frac{49}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{16}{4} + \frac{49}{4}} = \sqrt{\frac{65}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{65} \text{ dir.}$$

ÖRNEK 12 ⇨ $z = 2 + 5i$ karmaşık sayısının kendisinin ve eşleniğinin mutlak değerlerini bulunuz ve karmaşık düzlemde gösteriniz.

ÇÖZÜM ⇨ $z = 2 + 5i$ karmaşık sayısının mutlak değeri,



$|z| = \sqrt{2^2 + 5^2}$ ⟵($|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$)

$= \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$ dur.

O halde,

$z = 2 + 5i$ karmaşık sayısının mutlak değeri $|z| = \sqrt{29}$ dur.

$z = 2 + 5i$ karmaşık sayısının eşleniği $\overline{z} = 2 - 5i$

$\leftarrow (z = a + bi \Rightarrow \overline{z} = a - bi)$

$\overline{z} = 2 - 5i$ karmaşık sayısının mutlak değeri,

$$|\overline{z}| = \sqrt{2^2 + (-5)^2}$$ $\leftarrow (|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2})$

$$= \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29} \text{ dur.}$$

O halde, $\overline{z} = 2 - 5i$ karmaşık sayısının mutlak değeri $|\overline{z}| = \sqrt{29}$ dur.

Sonuç olarak, $|z|$ ve $|\overline{z}|$ değerlerini karşılaştırdığımız zaman $|z| = |\overline{z}|$ dir.

ALIŞTIRMA 2 ⇨ $z_1 = 8 + 6i$, $z_2 = 8 + bi$ ve $|z_1| = |\overline{z}_2|$ olduğuna göre b yi hesaplayınız.

◆ *KARMAŞIK SAYILAR KÜMESİNDE DÖRT İŞLEM*

Toplama İşlemi

Karmaşık sayılar toplanırken reel ve sanal kısımlar kendi aralarında toplanır.

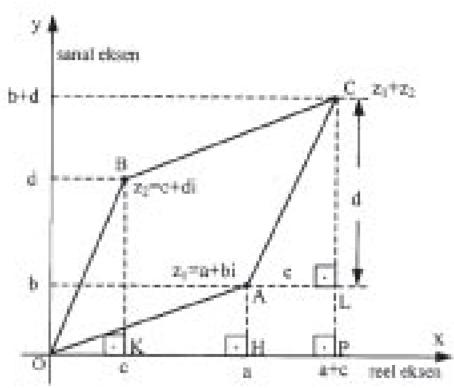
İki Karmaşık Sayının Toplamı

$z_1 = a + bi$ ve $z_2 = c + di$ karmaşık sayılarının toplamı

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di)$$

$$= (a + c) + (b + d)i \text{ dir.}$$

Aşağıdaki grafikte, $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ karmaşık sayılarının, karmaşık düzlemdeki görüntüleri A, B noktalarıdır.

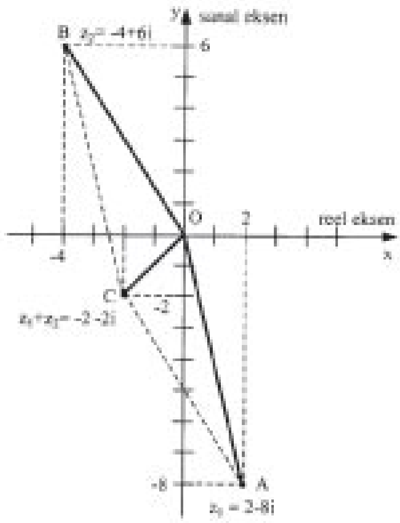


$OACB$ paralelkenarının C köşesi, $z_1 + z_2$ toplamının, karmaşık düzlemde eşlendiği noktadır. OKB, ALC dik üçgenlerinin eşliğinden; $z_1 + z_2$ karmaşık sayısının reel kısmının a+c, sanal kısmının b+d olduğuna dikkat ediniz.

$$z_1 + z_2 = (a+c) + (b+d)i \text{ dir.}$$

ÖRNEK 13 ⇨ $z_1 = 2 - 8i$ ve $z_2 = -4 + 6i$ karmaşık sayılarının toplamını bulunuz ve geometrik yorumunu yapınız.

ÇÖZÜM ⇨



$$z_1 + z_2 = (2 - 8i) + (-4 + 6i)$$

$$= (2 - 4) + (-8 + 6)i$$

$$= -2 - 2i \text{ dir.}$$

$z_1 + z_2$ toplamı, OACB paralelkenarının C köşesine eşlenen karmaşık sayıdır.

$z_1 + z_2 = -2 - 2i$ dir.

ALIŞTIRMA 3 ⇨ $z_1 = 1 + 3i$ ve $z_2 = 2 - 5i$ karmaşık sayılarının toplamını bulunuz ve geometrik yorumunu yapınız.

Karmaşık Sayılarda Toplama İşleminin Özelikleri

Bu bölümde karmaşık sayılar kümesinin toplama işlemi (+) ile değişmeli grup oluşturabilmesi için gereken kapalılık, değişme özeliği, birleşme özeliği, etkisiz (birim eleman) ve ters eleman özeliklerine sahip olduğunu ara adımları atlayarak göstereceğiz. Sizler bu ara adımları tamamlayınız ve her bir özelik için birer örnek veriniz.

Şimdi sırasıyla özelikleri gösterelim.

1. Kapalılık

$z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ karmaşık sayıları için,

$z_1 + z_2 = (a + c) + (c + d)i$ toplamı da karmaşık sayıdır.

$\forall\ z_1, z_2 \in C$ için $z_1 + z_2 \in C$ dir.

Karmaşık sayılar kümesi, toplama işlemine göre kapalıdır.

2. *Değişme Özeliği*

$z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ karmaşık sayıları için,

$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (c + di) + (a + bi) = z_2 + z_1$

$\forall\ z_1, z_2 \in C$ için $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ dir.

C kümesinde, toplama işleminin değişme özelliği vardır.

3. *Birleşme Özeliği*

$z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, $z_3 = e + fi$ karmaşık sayıları için,

$$(z_1 + z_2) + z_3 = [(a + bi) + (c + di)] + (e + fi)$$

$$= (a + bi) + [(c + di) + (e + fi)]$$

$$= z_1 + (z_2 + z_3)$$

$\forall\ z_1, z_2, z_3 \in C$ için $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ olduğundan, C karmaşık sayılar kümesinde, toplama işleminin birleşme özeliği vardır.

4. *Etkisiz (Birim) Eleman*

$0=0+0i$ ve $0 \in C$ dir.

Her $z = a+bi$ karmaşık sayısı için,

$z + 0=(a+bi)+(0+0i)= a+bi = z$,

$0 + z =(0+0i)+(a+bi)= a+bi = z$ dir.

0 sayısı, karmaşık sayıların toplama işleminde etkisiz (birim) elemandır.

5. *Ters Eleman*

$z_1 = a + bi$, $z_2 = -a - bi$ karmaşık sayıları için,

$(z_1 + z_2) = (a + bi) + (-a - bi) = 0+0i = 0$ dır.

Toplama işleminin değişme özeliği olduğundan, $z_1 + z_2 = z_2 + z_1 = 0$ dır.

$z_1 = a + bi$, $z_2 = -a - bi$ karmaşık sayıları, toplama işlemine göre birbirinin tersidir.

$z_1 = a + bi$ karmaşık sayısının toplama işlemine göre tersi, $-z$ ile gösterilir. $z = a + bi$ ise, $-z = -a - bi$ dir. $z + (-z) = 0$ dır.

Toplama işleminin incelediğimiz özeliklerini özetleyelim:

1. C karmaşık sayılar kümesi, toplama işlemine göre **kapalıdır**.
2. Toplama işleminin **değişme özeliği** vardır.
3. Toplama işleminin **birleşme özeliği** vardır.
4. $0=0+0i$ sayısı, toplama işlemi için **etkisiz (birim) elemandır**.
5. Her karmaşık sayının **toplama işlemine göre tersi** vardır.

Sonuç olarak, karmaşık sayılar kümesi yukarıda yazılı özeliklere sahip olduğu için **toplama (+) işlemi ile değişmeli grup** oluşturur.

(C, +) sistemi **değişmeli grup**tur.

Çıkarma İşlemi

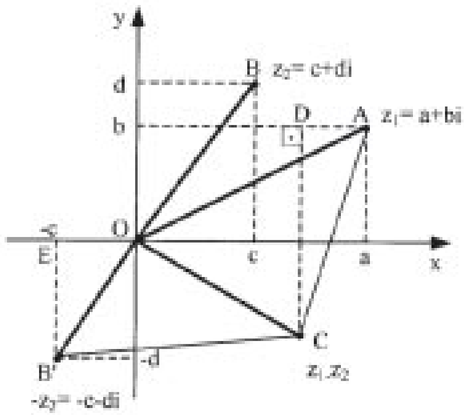
Karmaşık sayılar çıkarılırken reel ve sanal kısımlar kendi aralarında çıkarılır.

İki Karmaşık Sayının Farkı

$z_1 = a + bi$ ve $z_2 = c + di$ karmaşık sayılarının farkı,

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (a + bi) + (-c - di)$$

$$= (a - c) + (b - d)i \quad \text{dir.}$$

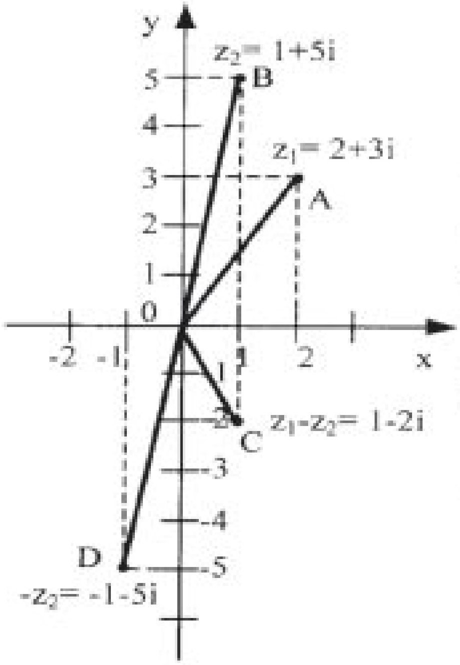


Yandaki şekli inceleyelim. $-z_2$ nin görüntüsü olan B' noktası, z_2 nin görüntüsü olan B noktasının, O noktasına göre simetriğidir. $AOB'C$ paralelkenarının C köşesi $z_1 - z_2$ farkının karmaşık düzlemdeki görüntüsüdür.

$B'EO$, CDA dik üçgenlerinin eşliğinden $z_1 - z_2$ karmaşık sayısının reel kısmının a−c, sanal kısmının b−d olduğuna dikkat ediniz.

ÖRNEK 14 ⇒ $z_1 = 2+3i$ ve $z_2 = 1+5i$ dir. $z_1 - z_2$ farkını karmaşık düzlemde gösteriniz ve geometrik yorumunu yapınız.

ÇÖZÜM ⇒



$z_1 = 2+3i$, $z_2 = 1+5i$,

$-z_2 = -1-5i$ ve $z_1 - z_2$ farkı karmaşık düzlemde gösterilmiştir.

$z_1 - z_2$ farkı $AOB'C$ paralelkenarının C köşesine eşlenen karmaşık sayıdır.

$z_1 - z_2$ farkını iki şekilde bulalım:

I . Yol:

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (2+3i)+(-1-5i)$$

$$= (2-1)+(3-5)i$$

$$= 1-2i \text{ dir.}$$

II. Yol:

$$z_1 - z_2 = (2+3i) - (1+5i)$$

$$=(2+3i)+(-1-5i)$$

$$=(2-1)+(3-5)i$$

$$=1-2i \text{ dir.}$$

ALIŞTIRMA 4 ⇨ $z_1 = -4+6i$ ve $z_2 = -3+2i$ dir. $z_1 - z_2$ farkını karmaşık düzlemde gösteriniz ve geometrik yorumunu yapınız.

Çarpma İşlemi

İki Karmaşık Sayının Çarpımı

$z_1 = a+bi$ ve $z_2 = c+di$ karmaşık sayılarının çarpımı,

$$z_1 \cdot z_2 = (a+bi)\cdot(c+di)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (\mathrm{a}\cdot\mathrm{c}-\mathrm{b}\cdot\mathrm{d})+(\mathrm{a}\cdot\mathrm{d}+\mathrm{b}\cdot\mathrm{c})\,\mathrm{i} \text{ dir.}$$

$z_1, z_2 \in C$ için $z_1 \cdot z_2 \in C$ dir.

Karmaşık sayılarda çarpma işlemi, $i^2 = -1$ olduğu göz önüne alınarak reel sayılardakine benzer şekilde yapılır.

$z_1 = a+bi$ ve $z_2 = c+di$ olsun.

$$z_1 \cdot z_2 = (a+bi)\cdot(c+di)$$

$$=a\cdot c + a\cdot di + bi\cdot c + bi\cdot di$$
$$=\mathrm{a}\cdot\mathrm{c}+\mathrm{a}\cdot\mathrm{d}\cdot\mathrm{i}+\mathrm{b}\cdot\mathrm{c}\cdot\mathrm{i}+\mathrm{b}\cdot\mathrm{d}\cdot\mathrm{i}^2$$

$$=\mathrm{a}\cdot\mathrm{c}+\mathrm{a}\cdot\mathrm{d}\cdot\mathrm{i}+\mathrm{b}\cdot\mathrm{c}\cdot\mathrm{i}-\mathrm{b}\cdot\mathrm{d}$$

$$=(\mathrm{a}\cdot\mathrm{c}-\mathrm{b}\cdot\mathrm{d})+(\mathrm{a}\cdot\mathrm{d}+\mathrm{b}\cdot\mathrm{c})\,\mathrm{i}$$

ÖRNEK 15 ⇒ $z_1 = 6 + 2i$ ve $z_2 = 3 + 4i$ sayılarının çarpımını bulunuz.

ÇÖZÜM ⇒ $(6+2i)\cdot(3+4i) = 6\cdot 3 + 6\cdot 4i + 2i\cdot 3 + 2i\cdot 4i$

$$= 18 + 24i + 6i + 8i^2 \qquad \leftarrow (i^2 = -1)$$

$$= (18-8) + 30i$$

$$= 10 + 30i$$

ÖRNEK 16 ⇒ $z_3 = 2 + 5i$ ve $z_4 = 3 - 6i$ sayılarının çarpımını bulunuz.

ÇÖZÜM ⇒ $z_3 \cdot z_4 = (ac - bd) + (ad + bc)i$

$z_3 = 2 + 5i \Rightarrow a = 2, \quad b = 5$

$z_4 = 3 - 6i \Rightarrow c = 3, \quad d = -6$

$(2+5i)\cdot(3-6i) = [2\cdot 3 - 5\cdot(-6)] + [2\cdot(-6) + 5\cdot 3]\,i$

$$= (6+30) + (-12+15)i$$

$$= 36 + 3i$$

ALIŞTIRMA 5 ⇒ $z_1 = 2 - 8i$ ve $z_2 = -3 + \frac{5}{2}i$ karmaşık sayılarının çarpımını bulunuz.

ÖRNEK 17 ⇒ $z = a + bi$ karmaşık sayısı verilsin. $z\cdot\bar{z}$ çarpımını hesaplayınız.

ÇÖZÜM ⇒ $z\cdot\bar{z} = (a+bi)\cdot(a-bi) = a^2 - abi + abi - b^2\cdot i^2 = a^2 - b^2\cdot(-1)$

$= a^2 + b^2$ olur.

ÖRNEK 18 ⇒ $z = a + bi$ karmaşık sayısı için $z\cdot\bar{z} = |z|^2$ olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM ⇒ $|z| = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$ (mutlak değer tanımı)

$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

$|z|^2 = (\sqrt{a^2+b^2})^2$

$|z|^2 = a^2 + b^2$ dir.

$z \cdot \overline{z} = (a+bi) \cdot (a-bi) = a^2 + b^2$ dir.

O halde, $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$ dir.

Karmaşık Sayılarda Çarpma İşleminin Özelikleri

Bu bölümde, sıfırdan farklı karmaşık sayılar kümesinin çarpma $(\cdot)$ işlemi ile değişmeli grup oluşturabilmesi için gereken kapalılık, değişme özeliği, birleşme özeliği, etkisiz (birim) eleman ve 0 sayısından farklı her karmaşık sayının çarpma işlemine göre ters elemanı özeliklerine sahip olduğunu ara adımları atlayarak göstereceğiz. Sizler, bu ara adımları tamamlayınız ve her bir özelik için birer örnek veriniz.

1. Kapalılık

$z_1 = a+bi$ ve $z_2 = c+di$ karmaşık sayıları için,

$z_1 \cdot z_2 = (ac-bd) + (ad+bc)i$ çarpımı da bir karmaşık sayıdır.

$\forall z_1,\ z_2 \in C$ için, $z_1 \cdot z_2 \in C$ dir.

Karmaşık sayılar kümesi çarpma işlemine göre kapalıdır.

2. Değişme Özeliği

$z_1 = a+bi$ ve $z_2 = c+di$ karmaşık sayıları için,

$z_1 \cdot z_2 = (a+bi) \cdot (c+di) = (c+di) \cdot (a+bi) = z_2 \cdot z_1$ dir.

$\forall z_1,\ z_2 \in C$ için, $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ dir.

Çarpma işleminin değişme özeliği vardır.

3. Birleşme Özeliği

$z_1 = a+bi$, $z_2 = c+di$, $z_3 = e+fi$ karmaşık sayıları için,

$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$

$\forall z_1,\ z_2,\ z_3 \in C$ için, $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$ tür.

Çarpma işleminin birleşme özeliği vardır.

4. Etkisiz (Birim) Eleman

$1=1+0i$ olduğundan, $1 \in C$ dir.

Her $z = a+bi$ karmaşık sayısı için,

$z \cdot 1 = (a+bi)\cdot(1+0i) = (a-0)+(0+b)i = a+bi = z$ dir.

Çarpma işleminin değişme özeliği olduğundan,

$\forall\ z \in C$ için, $z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$ dir.

1 sayısı, çarpma işlemi için birim (etkisiz) elemandır.

5. Ters Eleman

$z \in C$ ve $z = a+bi$ karmaşık sayısı için $z \cdot z^{-1} = 1$ ve $z^{-1} \cdot z = 1$ ise, $z^{-1} = \dfrac{1}{a+bi}$ karmaşık sayısı, $z = a+bi$ karmaşık sayısının, çarpma işlemine göre tersidir.

$z \neq 0$ olmak üzere, $z = a+bi$ karmaşık sayısının çarpma işlemine göre tersi,

$$z^{-1} = \underset{(a-bi)}{\frac{1}{a+bi}} = \frac{a-b}{a^2+b^2} = z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}i \quad \text{dir.}$$

Çarpma işleminin incelediğimiz özeliklerini özetleyelim:

1. C karmaşık sayılar kümesi, çarpma işlemine göre **kapalıdır**.
2. Çarpma işleminin **değişme özeliği** vardır.
3. Çarpma işleminin **birleşme özeliği** vardır.
4. $1+0i=1$ sayısı, çarpma işlemi için **etkisiz (birim) elemandır**.
5. 0 sayısından farklı her karmaşık sayının **çarpma işlemine göre tersi** vardır.

Buna göre, 0 dan farklı karmaşık sayıların kümesi, çarpma $(\cdot)$ işlemi ile **değişmeli grup** oluşturur.

$(C-\{0\}, \cdot\}$ sistemi, **değişmeli gruptur**.

Çarpma İşleminin Toplama İşlemi Üzerine Dağılma Özeliği

$z_1 = a+bi$, $z_2 = c+di$, $z_3 = e+fi$ karmaşık sayılar olduğuna göre,

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = (a+bi)\cdot\left[(c+di)+(e+fi)\right]$$

$$=(a+bi)\cdot(c+di)+(a+bi)\cdot(e+fi)$$

$$=z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3 \text{ olur.}$$

Buna göre, çarpma işleminin, toplama işlemi üzerine **soldan dağılma özeliği** vardır.

$$(z_2 + z_3)\cdot z_1 = z_2 \cdot z_1 + z_3 \cdot z_1$$

Buna göre, çarpma işleminin toplama işlemi üzerine **sağdan dağılma özeliği** vardır.

Yukarıda yapılanlara göre,

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$$

$$(z_2 + z_3)\cdot z_1 = z_2 \cdot z_1 + z_3 \cdot z_1$$

olduğundan, çarpma işleminin toplama işlemi üzerine **dağılma özeliği** vardır.

SONUÇ:

1. (C, +) sistemi, değişmeli gruptur.
2. (C-$\{0\}$, $\cdot$) sistemi, değişmeli gruptur.
3. C karmaşık sayılar kümesinde, çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özeliği vardır.

Bu üç özelik, karmaşık sayılar kümesinin toplama ve çarpma işlemleri ile cisim oluşturduğunu gösterir.

(C, +, **.**) sistemi, **cisimdir**.

$i^1 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = (i^2)\cdot i = (-1)\cdot i = -i$

$i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$

$n \in N$ olmak üzere $(i^4)^n = (1)^n \Rightarrow i^{4n} = 1$ dir. $\leftarrow ((a^m)^p = a^{m\cdot p})$

Buradan,

$i^{4n+1} = i^{4n}\cdot i = 1\cdot i = i$ $\leftarrow (a^{m+p} = a^m \cdot a^p)$

$i^{4n+2} = i^{4n}\cdot i^2 = 1\cdot(-1) = -1$

$i^{4n+3} = i^{4n}\cdot i^3 = 1\cdot(-i) = -i$

elde edilir.

Sonuç olarak, i nin herhangi bir kuvveti bulunurken, kuvvetin 4 ile bölümündeki kalan i nin kuvvetine yazılır.

ÖRNEK 19 ⇨ i^{2000}, i^{25}, i^{123} ve i^{14} değerlerini hesaplayınız.

ÇÖZÜM ⇨ $i^{2000} = (i^4)^{500} = 1$ $(2000 : 4 \rightarrow$ kalan=0)

$i^{25} = i^{(24+1)} = (i^4)^6 \cdot i^1 = 1\cdot i = i$ $(25 : 4 \rightarrow$ kalan=1)

$i^{123} = i^{(120+3)} = (i^4)^{30}\cdot i^3 = 1\cdot(-i) = -i$ $(123 : 4 \rightarrow$ kalan=3)

$i^{14} = i^{(12+2)} = (i^4)^3 \cdot i^2 = 1\cdot(-1) = -1$ $(14 : 4 \rightarrow$ kalan=2)

ÖRNEK 20 ⇨ $P(x) = -2x^{163} + 7x^{46} - 3x^{33} + 6x^{20}$ ise P polinomunun i deki değeri nedir?

ÇÖZÜM ⇨ $P(x) = -2x^{163} + 7x^{46} - 3x^{33} + 6x^{20}$, $P(i) = ?$

$P(i) = -2i^{163} + 7\cdot i^{46} - 3\cdot i^{33} + 6i^{20}$

$P(i) = -2 \cdot (-i) + 7 \cdot (-1) - 3 \cdot (i) + 6 \cdot (1)$

$P(i) = 2i - 7 - 3i + 6$

$P(i) = -i - 1$ dir.

ALIŞTIRMA 6 ⇨ $P(x) = x^{282} + 2x^{135} - 3x^{57} + 5x^{24} + 25x^{5}$ ise P(i) ifadesinin değerini bulunuz.

Bölme İşlemi

İki Karmaşık Sayının Bölümü

z_1, z_2 karmaşık sayılar ve $z_2 \neq 0$ olmak üzere $z_1 : z_2 = z_1 \cdot z_2^{-1}$ dir.

Karmaşık sayılarda bölme işlemi, pay ve paydanın paydanın eşleniği ile çarpılmasıyla yapılır. z_1 karmaşık sayısının z_2 karmaşık sayısına bölümü $z_1 : z_2$ biçiminde yazıldığı gibi $\frac{z_1}{z_2}$ biçiminde de yazılır.

$z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ ve $\bar{z}_2 = c - di$ olsun.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{(c+di)\cdot(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

ÖRNEK 21 ⇨ $z_1 = 2 + i$ ve $z_2 = 3 - 7i$ olsun. $\frac{z_1}{z_2}$ nin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+i}{3-7i} = \frac{(2+i)\cdot(3+7i)}{(3-7i)\cdot(3+7i)} = \frac{2\cdot 3 + 2\cdot 7i + i\cdot 3 + i\cdot 7i}{3\cdot 3 + 3\cdot 7i - 7i\cdot 3 - 7i\cdot 7i}$$

$$= \frac{6+14i+3i+7i^2}{9-49\cdot i^2} = \frac{6+17i+7\cdot(-1)}{9-49\cdot(-1)} = \frac{6+17i-7}{9+49} = \frac{-1+17i}{58} \text{ dir.}$$

ÖRNEK 22 ⇨ $\dfrac{2-i}{2+i}+\dfrac{2+i}{2-i}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ $A=\dfrac{2-i}{2+i}$ $B=\dfrac{2+i}{2-i}$ A+B=?

$$A=\frac{2-\mathrm{i}}{\underset{(2-\mathrm{i})}{2+\mathrm{i}}}=\frac{(2-i)\cdot(2-i)}{(2+i)\cdot(2-i)}=\frac{4-2i-2i+i^2}{4-2i+2i-i^2}=\frac{4-4i+(-1)}{4-(-1)}$$

$$=\frac{4-4i-1}{4+1}=\frac{3-4i}{5}$$

$$B=\frac{2+\mathrm{i}}{\underset{(2+\mathrm{i})}{2-\mathrm{i}}}=\frac{(2+\mathrm{i})\cdot(2+\mathrm{i})}{(2-\mathrm{i})\cdot(2+\mathrm{i})}=\frac{4+2i+2i+i^2}{4+2i-2i-i^2}=\frac{4+4i-1}{4+1}=\frac{3+4i}{5}$$

$$A+B=\frac{2-i}{2+i}+\frac{2+i}{2-i}=\frac{3-4i}{5}+\frac{3+4i}{5}=\frac{3-4i+3+4i}{5}=\frac{6}{5} \text{ tir.}$$

z_1 karmaşık sayısının, z_2 karmaşık sayısına bölümü,

$$z_1:z_2=\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\cdot\overline{z}_2}{z_2\cdot\overline{z}_2}=\frac{z_1\cdot\overline{z}_2}{|z_2|^2} \text{ dir.} \qquad \leftarrow(z\cdot\overline{z}=|z|^2)$$

ÖRNEK 23 ⇨ $z_1=1-2i$ karmaşık sayısını, $z_2=3+2i$ karmaşık sayısına bölünüz.

ÇÖZÜM ⇨

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{1-2i}{\underset{(3-2i)}{3+2i}}=\frac{(1-2i)\cdot(3-2i)}{(3+2i)\cdot(3-2i)} \qquad \leftarrow(z=a+bi \text{ ve } \overline{z}=a-bi)$$

$$=\frac{1\cdot3-1\cdot2i-2i\cdot3-2i\cdot(-2i)}{3^2+(2)^2} \qquad \leftarrow(z\cdot\overline{z}=|z|^2,\ |z|^2=a^2+b^2)$$

$$=\frac{3-2i-6i+4\cdot i^2}{9+4} \qquad \leftarrow((-a)\cdot(-b)=ab \text{ ve } i^2=-1)$$

$$=\frac{3-8i-4}{13}$$

$$=\frac{-1-8i}{13}=\frac{-1}{13}-\frac{8}{13}i \text{ dir.}$$

ALIŞTIRMA 7⇨ $z_1 = 3-\sqrt{5}i$ karmaşık sayısının, $z_2 = 2-5\sqrt{5}i$ karmaşık sayısına bölümünü hesaplayınız.

ÖRNEK 24 ⇨ $(a+bi)^2$ nin açılımını bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ Yukarıda verilen soruyu iki farklı yolla çözeceğiz.

I. Yol:
İki karmaşık sayının çarpım kuralından yararlanarak çözebiliriz.

$$(a+bi)^2 = (a+bi)(a+bi) = (a\cdot a + b\cdot b\cdot i^2) + (a\cdot b + b\cdot a)i$$

$$= [\ a^2 + b^2\cdot(-1)\,] + 2bai$$

$$= (a^2 - b^2) + 2abi \text{ dir.}$$

II. Yol:
$(a+bi)^2$ ifadesinin açılımı, iki terimlinin hesaplanışı gibi yapılabilir. (Not: $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$)

$$(a+bi)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot bi + (bi)^2 = a^2 + 2abi + b^2\cdot i^2$$

$$= a^2 + 2abi + b^2(-1) = (a^2 - b^2) + 2abi \text{ dir.}$$

ÖRNEK 25 ⇨ $(2-4i)^2$ ifadesinin açılımını bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ Yukarıda verilen soruyu iki farklı yolla çözeceğiz.

I. Yol:

Soruyu, $(a+bi)^2 = (a^2 - b^2) + 2abi$ yi kullanarak çözelim:

$$z = 2-4i \Rightarrow a = 2 \quad b = -4$$

$$(2-4i)^2 = (2^2 - (-4)^2) + 2\cdot 2\cdot(-4)i$$

$$= (4-16) - 16i$$

$$= -12 - 16i \text{ dir.}$$

II. Yol:

Soruyu, $(a+b)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2$ yi kullanarak çözelim:

$$z = 2-4i \quad a=2, \quad b=-4i$$

$(2-4i)^2 = 2^2 + 2\cdot 2\cdot(-4i) + (-4i)^2 = 4-16i + (-4)^2\cdot i^2$

$= 4-16i+16\cdot(-1)$

$= 4-16i-16$

$= -12-16i$ dir.

◆ KARMAŞIK SAYILARIN TOPLAMININ, ÇARPIMININ VE BÖLÜMÜNÜN EŞLENİĞİ

Teorem:

$z_1, z_2 \in C$ ise, $\overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ dir.

İspat:

$z_1 = a+bi$ ve $z_2 = c+di$ olsun.

$z_1+z_2 = (a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i$ olduğundan,

$\overline{z_1+z_2} = \overline{(a+c)+(b+d)i} = (a+c)-(b+d)i$ dir…..(*)

$\bar{z}_1 = a-bi$ ve $\bar{z}_2 = c-di$ olduğundan,

$\bar{z}_1+\bar{z}_2 = (a-bi)+(c-di) = (a+c)+(-b-d)i$

$= (a+c)-(b+d)i$ dir….(**)

(*) ve (**) a göre $\overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1+\bar{z}_2$ dir.

ÖRNEK 26 ⇨ $z_1+z_2=\ 2+\frac{3}{4}i$ ise, $\bar{z}_1+\bar{z}_2$ sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ $\overline{z_1+z_2}=\overline{2+\frac{3}{4}i}\Rightarrow\overline{z_1+z_2}=2-\frac{3}{4}i$

$\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$ olduğundan, $\bar{z}_1+\bar{z}_2=2-\frac{3}{4}i$ dir.

ALIŞTIRMA 8 ⇨ Aşağıdaki alıştırmaları yapınız.

(A) $z_1+z_2=\frac{3}{2}+\sqrt{115}i$ ise, $\bar{z}_1+\bar{z}_2$ sayısını yazınız.

(B) $\bar{z}_1+\bar{z}_2=\frac{12}{43}-\frac{23}{2}i$ ise, $\overline{z_1+z_2}$ sayısını yazınız.

(C) $\overline{z_1+z_2}=5+8i$ ise, z_1+z_2 sayısını yazınız.

Teorem:

$z_1,z_2\in C$ ise, $\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$ dir.

İspat:

$z_1=a+bi$, $z_2=c+di$ olsun.

$z_1\cdot z_2=\ (a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$ olduğundan,

$\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{(ac-bd)+(ad+bc)i}=(ac-bd)-(ad+bc)i$ dir…..(*)

$\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2=(a-bi)\cdot(c-di)=\ (ac-bd)+(-ad-bc)i$

$=\ (ac-bd)-(ad+bc)i$ dir….(**)

(*) ve (**) a göre $\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$ dir.

ÖRNEK 27 ⇨ $z_1\cdot z_2=3+4i$ ise, $\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$ sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ $z_1\cdot z_2=3+4i\Rightarrow\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{3+4i}=3-4i$

$\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$ olduğundan $\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2=3-4i$ dir.

ALIŞTIRMA 9 ⇨ Aşağıdaki alıştırmaları yapınız.

(A) $z_1 \cdot z_2 = \frac{5}{72} + 12i$ ise, $\overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$ sayısını yazınız.

(B) $\overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2 = 10 - 8i$ ise, $\overline{z_1 \cdot z_2}$ sayısını yazınız.

(C) $\overline{z_1 \cdot z_2} = 4 + 2\sqrt{6}i$ ise, $z_1 \cdot z_2$ sayısını yazınız.

Teorem:

$z_1, z_2 \in C$ ve $z_2 \neq 0$ ise,

(a) $\overline{\left(\frac{1}{z_2}\right)} = \frac{1}{\overline{z}_2}$ dir. (b) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$ dir.

İspat:

$z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ ve $z_2 \neq 0$ olsun.

(a) $z_2 = c + di$ ise,

$$z_2^{-1} = \frac{1}{z_2}$$

$$= \frac{1}{c + di}$$

$$= \frac{1}{\underset{(c-di)}{c + di}}$$

$$= \frac{c - di}{(c + di) \cdot (c - di)}$$

$$= \frac{c - di}{c^2 + d^2}$$

$$= \frac{c}{c^2 + d^2} - \frac{d}{c^2 + d^2} i$$ olduğundan,

ALIŞTIRMA 9 ⇨ Aşağıdaki alıştırmaları yapınız.

(A) $z_1 \cdot z_2 = \frac{5}{72} + 12i$ ise, $\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ sayısını yazınız.

(B) $\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = 10 - 8i$ ise, $\overline{z_1 \cdot z_2}$ sayısını yazınız.

(C) $\overline{z_1 \cdot z_2} = 4 + 2\sqrt{6}i$ ise, $z_1 \cdot z_2$ sayısını yazınız.

Teorem:

$z_1, z_2 \in C$ ve $z_2 \neq 0$ ise,

(a) $\overline{\left(\frac{1}{z_2}\right)} = \frac{1}{\bar{z}_2}$ dir. (b) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ dir.

İspat:

$z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ ve $z_2 \neq 0$ olsun.

(a) $z_2 = c + di$ ise,

$$z_2^{-1} = \frac{1}{z_2}$$

$$= \frac{1}{c + di}$$

$$= \frac{1}{\begin{matrix} c + di \\ (c - di) \end{matrix}}$$

$$= \frac{c - di}{(c + di) \cdot (c - di)}$$

$$= \frac{c - di}{c^2 + d^2}$$

$$= \frac{c}{c^2 + d^2} - \frac{d}{c^2 + d^2} i \text{ olduğundan,}$$

ÖRNEK 28 ⇨ $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\left(\frac{1+i}{3+4i}\right)$ ise, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$ sayısını $a+bi$ şeklinde ifade ediniz.

ÇÖZÜM ⇨ İlk önce, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\overline{\left(\frac{1+i}{3+4i}\right)}$ değerini hesaplayalım:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{1+i}{\underset{(3-4i)}{3+4i}}$$

$$=\frac{(1+i)\cdot(3-4i)}{(3+4i)\cdot(3-4i)}$$

$$=\frac{1\cdot 3+1\cdot(-4i)+i\cdot 3+i\cdot(-4i)}{3^2+3\cdot(-4i)+4i\cdot 3+4^2\cdot i(-i)}$$

$$=\frac{3-4i+3i-4\cdot i^2}{3^2-12i+12i-4^2\cdot i^2}$$

$$=\frac{3-i-4\cdot(-1)}{3^2-4^2\cdot(-1)} \qquad \leftarrow(i^2=-1)$$

$$=\frac{3-i+4}{9-16\cdot(-1)}$$

$$=\frac{7-i}{9+16}$$

$$=\frac{7}{25}-\frac{1}{25}i \text{ dir.}$$

O halde, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\overline{\left(\frac{7}{25}-\frac{1}{25}i\right)}=\frac{7}{25}+\frac{1}{25}i$ dir.

ALIŞTIRMA 10 ⇨ $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\frac{2-2i}{1+5i}$ ise $\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ sayısını $a+bi$ şeklinde ifade ediniz.

◆ KARMAŞIK SAYILARIN MUTLAK DEĞERİ (MODÜLÜ) İLE İLGİLİ ÖZELİKLER

$z = x + yi$ karmaşık sayısının mutlak değeri (modülü),

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ dir. Ayrıca, } |z|^2 = z \cdot \bar{z} \text{ dir.}$$

Teorem:

$z_1, z_2 \in C$ ise $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ dir.

İspat:

$|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

$$\begin{aligned} |z_1 \cdot z_2|^2 = (z_1 \cdot z_2)\,(\overline{z_1 \cdot z_2}) &= (z_1 \cdot z_2) \cdot (\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2) \\ &= (z_1 \cdot \bar{z}_1) \cdot (z_2 \cdot \bar{z}_2) \\ &= |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 \text{ dir.} \end{aligned}$$

$|z_1| \geq 0$, $|z_2| \geq 0$, $|z_1 \cdot z_2| \geq 0$ olduğundan,

$$|z_1 \cdot z_2|^2 = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 \Rightarrow |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \text{ dir.}$$

Sonuçlar

I. Sonuç:

Yukarıda açıklanan teoremden yararlanarak $z \in C$ olmak üzere, $|-z| = |z|$ dir.

Bu sonucun doğruluğunu gösterelim:

$$|-z| = |(-1) \cdot z| = |-1| \cdot |z| = 1 \cdot |z| = |z| \text{ dir.}$$

ÖRNEK 29 ⇨ $z = -3 + i$ ise $|-z| = |z|$ olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM ⇨ Yukarıda verilen soruyu iki farklı yolla çözeceğiz:

I.Yol:

$|-z| = |-(-3 + i)| = |(-1) \cdot (-3 + i)| = |-1| \cdot |-3 + i| = |-3 + i| = |z|$ dir.

II. Yol:

$|z| = |-3+i| = \sqrt{(-3)^2 + (1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$ dur. ....(*)

$|-z| = |-(-3+i)| = |3-i| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$ dur. ...(**)

(*) ve (**) ye göre $|-z| = |z|$ dir.

ALIŞTIRMA 11 ⇨ $z = -3 - 3\sqrt{3}\,i$ ise $|z| = |-z|$ olduğunu gösteriniz.

II. Sonuç:

Yukarıda açıklanan teoremden

$$\forall n \in N \text{ için, } |z^n| = |z|^n$$

sonucunu çıkarabiliriz.

Bu sonucun doğruluğunu gösterelim:

$|z^2| = |z \cdot z| = |z| \cdot |z| = |z|^2$

$|z^3| = |z^2 \cdot z| = |z^2| \cdot |z| = |z|^2 \cdot |z| = |z|^3$ olur.

.
.
. Bu şekilde devam ettiğimizi varsayalım.
.
.

$\forall\, n \in N$ için, $|z^n| = |z|^n$ olduğu görülür.

ÖRNEK 30 ⇨ $|(3+4i)^2| = |3+4i|^2$ olduğunu gösterelim:

ÇÖZÜM ⇨

$$\begin{aligned}|(3+4i)^2| = |9 + 2\cdot 3\cdot 4i + (4i)^2| &= |9 + 24i + 16\cdot (i)^2| \\ &= |9+24i+16\cdot(-1)| \\ &= |9+24i-16| \\ &= |-7+24i| \\ &= \sqrt{(-7)^2 + 24^2} \\ &= \sqrt{49+576} \\ &= \sqrt{625} \\ &= 25 \text{ tir. .... (*)}\end{aligned}$$

$|3+4i|^2 = (\sqrt{3^2+4^2})^2 = (\sqrt{9+16})^2 = (\sqrt{25})^2 = 25$ tir. ....(**)

(*) ve (**) a göre $|(3+4i)^2| = |3+4i|^2$ dir.

ÖRNEK 31 ⇒ $|(\sqrt{2}+3i)\cdot(5-\sqrt{7}i)|$ ifadesinin değerini hesaplayınız.

ÇÖZÜM ⇒ $|(\sqrt{2}+3i)\cdot(5-\sqrt{7}i)| = |\sqrt{2}+3i|\cdot|5-\sqrt{7}i|$ $\leftarrow (|z_1\cdot z_2| = |z_1|\cdot|z_2|)$

$$= \sqrt{(\sqrt{2})^2+3^2}\cdot\sqrt{5^2+(-\sqrt{7})^2} \quad \leftarrow (|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2})$$
$$= \sqrt{2+9}\cdot\sqrt{25+7}$$
$$= \sqrt{11}\cdot\sqrt{32}$$
$$= \sqrt{11\cdot 32} \quad \leftarrow (\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{a\cdot b})$$
$$= \sqrt{352} \text{ dir.}$$

ALIŞTIRMA 12 ⇒ $\left|(2-3\sqrt{5}i)\cdot(1+\frac{3}{2}i)\right|$ ifadesinin değerini hesaplayınız.

Teorem:

$z \in C$ ve $z \neq 0$ ise $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ dir.

İspat:

$z = c+di$ ise $|z| = \sqrt{c^2+d^2}$ dir.

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \left|\frac{1}{c+di}\right| = \left|\frac{1\cdot(c-di)}{(c+di)(c-di)}\right| = \left|\frac{c-di}{c^2+d^2}\right| = \left|\frac{c}{c^2+d^2} + \frac{-d}{c^2+d^2}i\right|$$

$$= \sqrt{\left(\frac{c}{c^2+d^2}\right)^2 + \left(\frac{-d}{c^2+d^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{c^2+d^2}{(c^2+d^2)^2}} = \frac{\sqrt{c^2+d^2}}{c^2+d^2} \text{ dir…(*)}$$

$$\frac{1}{|z|} = \frac{1}{|c+di|} = \frac{1}{\sqrt{c^2+d^2}} = \frac{1\cdot\sqrt{c^2+d^2}}{\sqrt{c^2+d^2}\sqrt{c^2+d^2}} = \frac{\sqrt{c^2+d^2}}{c^2+d^2} \text{ dir….(**)}$$

(*) ve (**) ye göre, $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ dir.

ÖRNEK 32 ⇒ $\left|\dfrac{1}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}\,i}\right|$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM ⇒ $\left|\dfrac{1}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}\,i}\right| = \dfrac{1}{\left|2\sqrt{3}-\sqrt{5}\,i\right|}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{(2\sqrt{3})^2+(-\sqrt{5})^2}}$ $\leftarrow (\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|})$

$= \dfrac{1}{\sqrt{2^2\cdot(\sqrt{3})^2+(-\sqrt{5})^2}}$ $\leftarrow ((a\cdot b)^n = a^n\cdot b^n)$

$= \dfrac{1}{\sqrt{4\cdot 3+5}} = \dfrac{1}{\sqrt{12+5}} = \dfrac{1}{\sqrt{17}} = \dfrac{\sqrt{17}}{17}$ dir. $\leftarrow (\dfrac{1}{\sqrt{a}} = \dfrac{\sqrt{a}}{a})$

ALIŞTIRMA 13 ⇒ $\left|\dfrac{1}{-\dfrac{4}{3}+\dfrac{8}{3}\sqrt{2}\,i}\right|$ ifadesinin değerini bulunuz.

Teorem:

$z_1, z_2 \in C$ ve $z_2 \neq 0$ ise $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ dir.

İspat: $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \left|z_1\cdot z_2^{-1}\right|$

$= |z_1|\cdot\left|z_2^{-1}\right|$ $\leftarrow (|z_3\cdot z_4| = |z_3|\cdot|z_4|)$

$= |z_1|\cdot\dfrac{1}{|z_2|}$ $\leftarrow (\left|\dfrac{1}{z_3}\right| = \dfrac{1}{|z_3|})$

$= \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ dir. $\leftarrow (|z_3|\cdot\dfrac{1}{|z_4|} = \dfrac{|z_3|}{|z_4|})$

ÖRNEK 33 ⇒ $\left|\dfrac{1+2i}{3+4i}\right|$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM ⇒ $\left|\dfrac{1+2i}{3+4i}\right| = \dfrac{|1+2i|}{|3+4i|}$ $\leftarrow (\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|})$

$$=\frac{\sqrt{1^2+2^2}}{\sqrt{3^2+4^2}} \qquad \leftarrow (|z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2})$$

$$=\frac{\sqrt{1+4}}{\sqrt{9+16}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{25}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5^2}}=\frac{\sqrt{5}}{5} \text{ tir.}$$

ÖRNEK 34 ➾ $\left|\frac{(\sqrt{15}-3i)\cdot 4i}{5-2\sqrt{7}\,i}\right|$ ifadesinin değerini hesaplayınız.

ÇÖZÜM ➾ $\left|\frac{(\sqrt{15}-3i)\cdot 4i}{5-2\sqrt{7}\,i}\right|=\frac{|(\sqrt{15}-3i)\cdot 4i|}{|5-2\sqrt{7}\,i|} \qquad \leftarrow \left(\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}\right)$

$$=\frac{|\sqrt{15}-3i|\cdot|4i|}{|5-2\sqrt{7}\,i|} \qquad \leftarrow (|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|)$$

$$=\frac{\sqrt{(\sqrt{15})^2+(-3)^2}\cdot\sqrt{0^2+4^2}}{\sqrt{5^2+(-2\sqrt{7})^2}} \qquad \leftarrow (|z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2})$$

$$=\frac{\sqrt{15+9}\cdot\sqrt{4^2}}{\sqrt{25+4\cdot 7}} \qquad \leftarrow (\sqrt{p^2}=p)$$

$$=\frac{\sqrt{24}\cdot 4}{\sqrt{25+28}}$$

$$=\frac{\sqrt{4\cdot 6}\cdot 4}{\sqrt{53}}$$

$$=\frac{2\cdot\sqrt{6}\cdot 4}{\sqrt{53}} \qquad \leftarrow (\sqrt{p^2\cdot t}=p\cdot\sqrt{t})$$

$$=\frac{8\cdot\sqrt{6}}{\underset{(\sqrt{53})}{\sqrt{53}}} \qquad \leftarrow \text{(Paydayı kökten kurtarma)}$$

$$=\frac{8\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{53}}{53} \qquad \leftarrow (\sqrt{p}\cdot\sqrt{t}=\sqrt{p\cdot t})$$

$$=\frac{8\cdot\sqrt{318}}{53} \text{ tür.}$$

ALIŞTIRMA 14 ➾ Aşağıdaki ifadelerin değerlerini hesaplayınız.

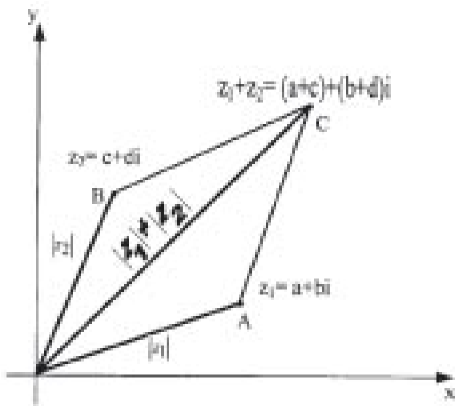
(A) $\left|\frac{1-2i}{4+5i}\right|$

(B) $\left|\frac{(3+2i)\cdot(4-\sqrt{6}\,i)}{1+\sqrt{3}\,i}\right|$

Teorem:

$z_1, z_2 \in C$ ise $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ dir.

İspat:



$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ bağıntısını karmaşık düzlemde geometrik olarak gösterelim:

$$z_1 = a + bi\,,\ z_2 = c + di$$

karmaşık sayılarının ve

$$z_1 + z_2 = (a+c) + (b+d)i$$

toplamının, karmaşık düzlemdeki görüntüleri yandaki şekilde belirtilmiştir. OACB paralelkenardır.

$|OA| = |BC| = |z_1|$, $|OB| = |AC| = |z_2|$, $|OC| = |z_1 + z_2|$ dir.

OAC üçgeninde,

$$|OC| \leq |OA| + |AC| \Rightarrow |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \text{ dir.}$$

ÖRNEK 35 ➫ $z_1 = 1 + 2i$ ve $z_2 = 3 - 4i$ karmaşık sayılarını kullanarak $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM ➫ $z_1 = 1 + 2i \Rightarrow \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ ← ($|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$)

$z_2 = 3 - 4i \Rightarrow \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = \sqrt{5^2} = 5$ ← ($\sqrt{p^2} = p$)

$z_1 + z_2 = (1 + 2i) + (3 - 4i) = (1+3) + (2-4)i$

← ($z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a+c) + (b+d)i$)

$= 4 - 2i$

$|z_1 + z_2| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Bulduğumuz değerleri yerlerine yerleştirelim.

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$\underbrace{2\sqrt{5}}_{4{,}472} \leq \underbrace{\sqrt{5} + 5}_{7{,}236}$$ ← ($\sqrt{5} = 2{,}236067977...$)

Sonuç olarak, $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ dir.

Teorem:

$z_1, z_2 \in C$ ise, $|z_1 - z_2| \le |z_1| + |z_2|$ dir.

İspat:

$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$ olduğundan,

$|z_1 - z_2| = |z_1 + (-z_2)| \le |z_1| + |-z_2|$ $\leftarrow (|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|)$

$|z_1 - z_2| \le |z_1| + |z_2|$ olur. $\leftarrow (|-z_2| = |z_2|)$

ÖRNEK 36 ⇨ $z_1 = 1 + i$ ve $z_2 = 2 - 3i$ karmaşık sayılarının, $|z_1 - z_2| \le |z_1| + |z_2|$ ifadesini sağladığını gösteriniz.

ÇÖZÜM ⇨ $z_1 = 1 + i \Rightarrow |z_1| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$z_2 = 2 - 3i \Rightarrow |z_2| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

$z_1 - z_2 = ?$

$z_1 - z_2 = (1+i) - (2-3i) = 1 + i - 2 + 3i = -1 + 4i$

$\leftarrow ((a+bi) - (c+di) = (a-c) + (b-d)i)$

$|z_1 - z_2| = |-1 + 4i| = \sqrt{(-1)^2 + 4^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$ dir.

Elde ettiğimiz verileri yerlerine yerleştirelim:

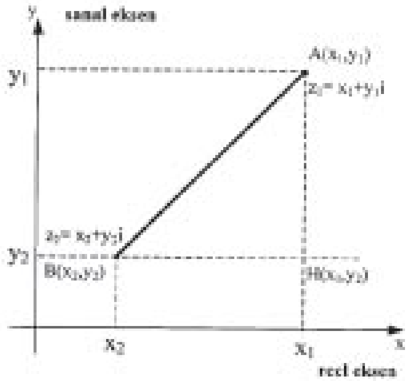
$|z_1 - z_2| \le |z_1| + |z_2|$ ...(*)

$\underbrace{\sqrt{17}}_{\substack{\uparrow \\ 4{,}123}} \le \underbrace{\sqrt{2} + \sqrt{13}}_{\substack{\uparrow \\ 5{,}020}}$ $\leftarrow (\sqrt{17} \cong 4{,}123,\ \sqrt{2} \cong 1{,}414,\ \sqrt{13} \cong 3{,}606)$

O halde, (*) sağlanmaktadır.

ALIŞTIRMA 15⇨ $z_1 = 2 + 5i$ ve $z_2 = -3 + i$ karmaşık sayılarının, $|z_1 - z_2| \le |z_1| + |z_2|$ ifadesini sağladığını gösteriniz.

◆ *KARMAŞIK DÜZLEMDE İKİ KARMAŞIK SAYI ARASINDAKİ UZAKLIK*



$z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$ karmaşık sayıları için, $|z_1 - z_2|$ değerine, z_1 ve z_2 **karmaşık sayıları arasındaki uzaklık** denir.

$z_1 - z_2 = (x_1 + y_1 i) - (x_2 + y_2 i) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i$ olduğundan,

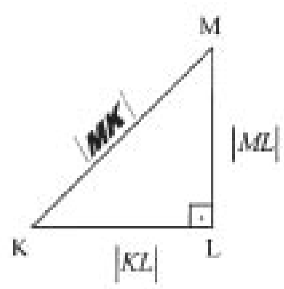
$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \text{ dir.}$$

Yukardaki şekildeki AHB dik üçgeninde, dik kenarların uzunlukları,

$$|BH| = x_1 - x_2 \text{ ve } |AH| = y_1 - y_2 \text{ dir.}$$

$|AB|$ nu, AHB dik üçgeninde Pisagor teoremini uygulayarak bulalım. Bunun için ilk önce Pisagor teoremini hatırlayalım:

Pisagor Teoremi



Bir dik üçgende dik kenarların uzunluklarının karelerinin toplamının karekökü hipotenüsün uzunluğuna eşittir.

$$|MK|^2 = |KL|^2 + |ML|^2$$

$$|MK| = \sqrt{|KL|^2 + |ML|^2}$$

$|AB| = |z_1 - z_2| = ?$

$$|AB| = \sqrt{|BH|^2 + |AH|^2} \text{ dir.}$$

$$|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \text{ dir.}$$

Buna göre, $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$ karmaşık sayıları arasındaki uzaklık,

$$|z_1 - z_2| = |AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \text{ dir.}$$

ÖRNEK 37 ⇒ $z_1 = 2 + 3i$ ve $z_2 = 5 + 7i$ karmaşık sayıları arasındaki uzaklığı bulunuz.

ÇÖZÜM ⇒ Yukarıda verilen soruyu üç farklı yolla çözeceğiz:

I. Yol:

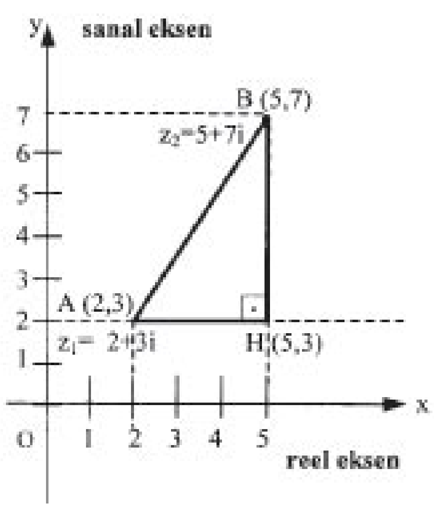
$$\begin{aligned} |z_1 - z_2| &= |(2+3i)-(5+7i)| = |2+3i-5-7i| = |(2-5)+(3i-7i)| \\ &= |-3-4i| \\ &= \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} \qquad \leftarrow (|z| = |x+yi| = \sqrt{x^2+y^2}\,) \\ &= \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \text{ tir.} \end{aligned}$$

II. Yol:

$$z_1 = 2+3i \Rightarrow x_1 = 2 \text{ ve } y_1 = 3$$
$$z_2 = 5+7i \Rightarrow x_2 = 5 \text{ ve } y_2 = 7$$
$$\begin{aligned} |z_1 - z_2| &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(2-5)^2 + (3-7)^2} \\ &= \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} \\ &= \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \text{ tir.} \end{aligned}$$

III. Yol:

$z_1 = 2+3i$ ve $z_2 = 5+7i$ karmaşık sayılarını karmaşık düzlemde gösterelim.



AHB dik üçgeninde Pisagor teoremini uygulayalım.

$$|AB| = \sqrt{|AH|^2 + |BH|^2}$$

Bunun için $|AH|$ ve $|BH|$ uzunluklarını hesaplayalım.

AHB dik üçgeninde

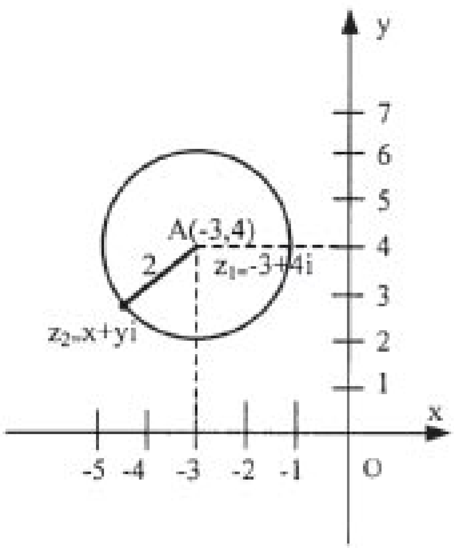
$$|AH| = |5-2| = |3| = 3 \text{ tür.}$$
$$|BH| = |7-3| = |4| = 4 \text{ tür.}$$

$$|AB| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \text{ tir.}$$

ALIŞTIRMA16 ⇨ $z_1 = -2+3i$, $z_2 = -5+7i$ karmaşık sayıları arasındaki uzaklığı hesaplayınız.

ÖRNEK 38 ⇨ $|z-(-3+4i)| = 2$ eşitliğini sağlayan z karmaşık sayılarının karmaşık düzlemdeki görüntüleri olan noktalar kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨

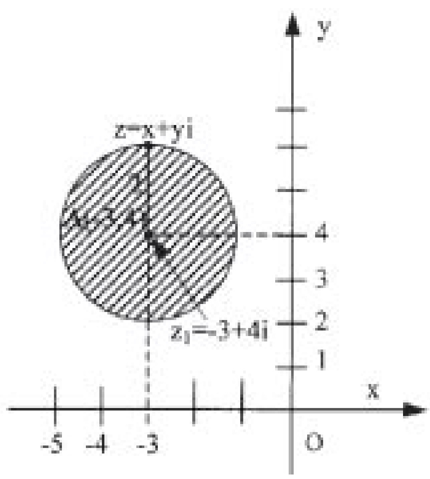


$|z-(-3+4i)| = 2$ eşitliği, $z = x+yi$ karmaşık sayılarının, $z_1 = -3+4i$ karmaşık sayısına olan uzaklıklarının 2 birim olduğunu gösterir. (Not: iki karmaşık sayının birbirinden uzaklığı $|z_1 - z_2|$ dir). Buna göre, $z = x+yi$ karmaşık sayılarının karmaşık düzlemdeki görüntüleri, merkezi $(-3,4)$ ve yarıçapı 2 birim olan çemberi oluşturur. Bu çemberin üzerindeki her bir noka aradığımız noktalar kümesini oluşturmaktadır.

ALIŞTIRMA 17 ⇨ $|z-(-2-3i)| = 4$ eşitliğini sağlayan z karmaşık sayılarının karmaşık düzlemdeki görüntüleri olan noktalar kümesini bulunuz.

ÖRNEK 39 ⇨ $|z-(-3+4i)| \leq 2$ olduğuna göre, z karmaşık sayılarının karmaşık düzlemdeki görüntüleri olan noktalar kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨

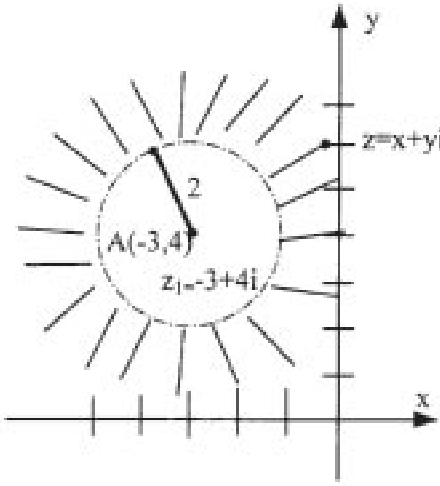


$|z-(-3+4i)| \leq 2$ eşitsizliği, $z = x+yi$ karmaşık sayılarının, $z_1 = -3+4i$ karmaşık sayısına olan uzaklıklarının 2 birim veya 2 birimden küçük olduğunu gösterir. Buna göre, $z = x+yi$ karmaşık sayılarının karmaşık düzlemdeki görüntüleri, merkezi (-3, 4) ve yarıçapı 2 birim olan çemberi ve bu çemberin iç bölgesini oluşturur.

ALIŞTIRMA 18 ⇒ $|z-(-3+2i)| \leq 5$ olduğuna göre, z karmaşık sayılarının karmaşık düzlemdeki görüntüleri olan noktalar kümesini bulunuz.

ÖRNEK 40 ⇒ $|z-(-3+4i)| > 2$ olduğuna göre, z karmaşık sayılarının karmaşık düzlemdeki görüntüleri olan noktalar kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM ⇒



$|z-(-3+4i)| > 2$ eşitsizliği $z = x + yi$ karmaşık sayılarının, $z_1 = -3+4i$ karmaşık sayısına olan uzaklıklarının 2 birimden büyük olduğunu gösterir. Buna göre, $z = x + yi$ karmaşık sayılarının görüntüleri, merkezi (-3,4) ve yarıçapı 2 birim olan çemberin dışında kalan bölgedir.

ALIŞTIRMA 19 ⇒ $|z-(4+5i)| \geq 3$ olduğuna göre, z karmaşık sayılarının karmaşık düzlemdeki görüntüleri olan noktalar kümesini bulunuz.

ARAŞTIRMALAR

1) z=x+yi ile hangi karmaşık sayının çarpımının 1 olduğunu bulunuz.

2) $\{z : 1 \leq |z-2+i| \leq 3,\ z \in C\}$ kümesini karmaşık düzlemde gösteriniz.

3) Karmaşık sayılarla ilgili özgün bir soru yazınız ve çözünüz.

BÖLÜMÜN ÖZETİ

x ve y birer reel sayı ve $i = \sqrt{-1}$ (ya da $i^2 = -1$) olmak üzere $z = x + yi$ şeklinde ifade edilen z sayısına karmaşık sayı denir. Karmaşık sayılar kümesi C ile gösterilir.

$$C = \left\{ z : z = x + yi,\ x, y \in R \ ve\ \sqrt{-1} = i \right\} \text{ dir.}$$

$z = x + yi$ karmaşık sayısında x e karmaşık sayının **reel (gerçek) kısmı**, y ye karmaşık sayının **sanal kısmı** denir ve $\mathrm{Re}(z) = x$, $\dot{I}m(z) = y$ şeklinde gösterilir.

İki Karmaşık Sayının Eşitliği

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = a + bi \\ z_2 = c + di \end{array}\right\} \text{ olsun. } z_1 = z_2 \Leftrightarrow a = c \text{ ve } b = d \text{ dir.}$$

Karmaşık Sayılarda Dört İşlem

$z_1 = a + bi$ ve $z_2 = c + di$ olsun.

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i \qquad z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$

Karmaşık Sayının Eşleniği

$z = x + yi$ karmaşık sayısı için $z = x - yi$ sayısına z **nin eşleniği** denir.

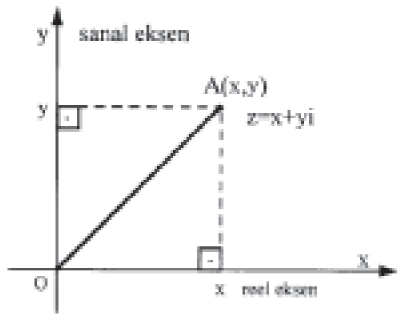
Karmaşık Sayıların Toplamının, Çarpımının ve Bölümünün Eşleniği

$z_1, z_2 \in C$ ise :

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \qquad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

$$\overline{\left(\frac{1}{z_2}\right)}=\frac{1}{\overline{z}_2} \quad (z_2 \neq 0) \qquad\qquad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2} \quad (z_2 \neq 0)$$

Karmaşık Düzlem ve Bir Karmaşık Sayının Görüntüsü:



İki boyutlu analitik düzlemdeki x ekseninin reel eksen, y ekseninin sanal eksen alınmasıyla oluşturulan düzleme **karmaşık düzlem** denir.

$z = x + yi$ karmaşık sayısının, karmaşık düzlemdeki görüntüsü A(x, y) noktasıdır.

Bir Karmaşık Sayının Mutlak Değeri (Modülü):

Karmaşık düzlemde, bir karmaşık sayıya karşılık gelen noktanın, başlangıç noktasına olan uzaklığına bu sayının **mutlak değeri (modülü)** denir ve $|z|$ şeklinde gösterilir.

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Karmaşık Sayıların Mutlak Değeri (Modülü) ile ilgili Özelikler:
$z_1, z_2 \in C$ ise :

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \qquad |z^n| = |z|^n \quad (\forall n \in Z) \qquad |-z| = |z|$$

$$\left|\frac{1}{z_2}\right| = \frac{1}{|z_2|} \quad (z_2 \neq 0) \qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad (z_2 \neq 0)$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \qquad |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Karmaşık Düzlemde İki Karmaşık Sayı Arasındaki Uzaklık:
$z_1 = x_1 + y_1 i \quad z_2 = x_2 + y_2 i$ karmaşık sayıları için, $|z_1 - z_2|$ değerine,

z_1, z_2 **karmaşık sayıları arasındaki uzaklık** denir.

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

DEĞERLENDİRME SORULARI

1) $z_2 = \sqrt{6} - 15i$ karmaşık sayısının sanal kısmı hangi sayıdır?

A) $\sqrt{6}$ B) $\sqrt{-6}$ C) –15 D) 15 E) $\sqrt{6} - 15$

2) $x, y \in R$ olmak üzere, $z_1 = (x-3) + (y+6)i$, $z_2 = 2 + 16i$ ve $z_1 = z_2$ ise, $x - y$ hangi sayıya eşittir?

A) 15 B) 16 C) –3 D) 6 E) –5

3) $z = \frac{-1}{3} - \sqrt{3}\,i$ karmaşık sayısının eşleniği nedir?

A) $\frac{1}{3} + \sqrt{3}\,i$ B) $\frac{-1}{3} + \sqrt{3}\,i$ C) $\frac{1}{3} + \sqrt{3}\,i$

D) $\frac{-1}{3} - \sqrt{3}\,i$ E) $\frac{-1-\sqrt{3}}{3}i$

4) i^{41} in değeri nedir?

A) i B) 1 C) $-i$ D) i E) $41i$

5) $(3-i)^2$ ifadesinin açılımı nedir?

A) $10 + 6i$ B) $-8 + 6i$ C) $8 - 6i$ D) 10 E) $9 - 6i$

6) $\frac{3-2i}{3+2i} + \frac{3+2i}{3-2i}$ işleminin sonucu nedir?

A) $5 + 24i$ B) $\frac{10}{13}$ C) $\frac{3}{2} + 5i$ D) $9 + 2i$ E) $\frac{12}{13}i$

7) $z_1 = 2 + 3i$ ve $z_2 = 5 - 4i$ karmaşık sayılarının toplamı nedir?

A) $2 + i$ B) $-3 + 7i$ C) $5 - i$ D) $7 - i$ E) $7 + 7i$

8) $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 2 - 3i$ karmaşık sayılarının çarpımı nedir?

A) 5 B) 13 C) $4 + 9i$ D) $2 + 6i$ E) $4 - 6i$

9) $z = 2 + 5i$ karmaşık sayısının çarpmaya göre tersi nedir?

A) $-2 - 5i$ B) $-2 + 5i$ C) $\frac{2}{3} + \frac{5}{3}i$

D) $\frac{2}{29} - \frac{5}{29}i$ E) $2 - 5i$

10) $z_1 = 4 + 8i$ karmaşık sayısının $z_2 = 2i$ karmaşık sayısına bölümü nedir?

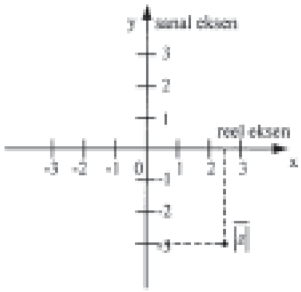
A) 6 B) $4 + 4i$ C) $8 + 16i$ D) $4 - 2i$ E) 0

11) $z = \dfrac{2}{5} + \dfrac{3}{5}i$ karmaşık sayısının mutlak değeri (modülü) nedir?

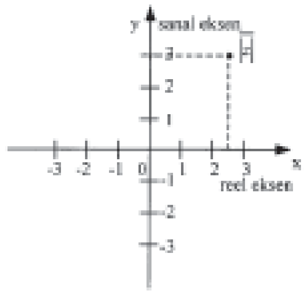
A) $\dfrac{2}{5}$ B) $\dfrac{3}{5}$ C) i D) $\dfrac{2}{5} - \dfrac{3}{5}i$ E) $\dfrac{\sqrt{13}}{5}$

12) $z = \dfrac{5}{2} - 3i$ karmaşık sayısının eşleniğinin karmaşık düzlemdeki gösterimi aşağıdakilerden hangisidir?

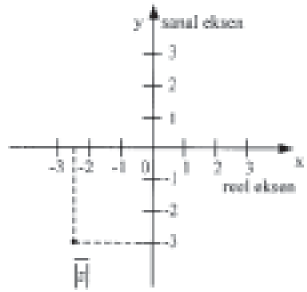
A)

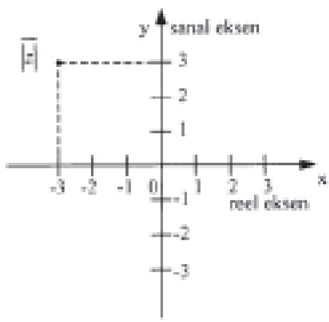


B)

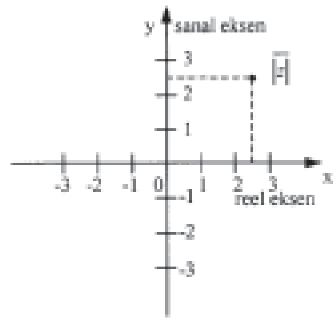


C)





D



E

13) $5x^2 + 10x + 6 = 0$ denkleminin karmaşık sayılar kümesindeki çözüm kümesi nedir?

A) $\left\{\dfrac{-1}{2} - \dfrac{\sqrt{5}}{10}\mathrm{i},\ \dfrac{-1}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{10}\mathrm{i}\right\}$ B) $\left\{-1 - \dfrac{\sqrt{5}}{5}i,\ -1 + \dfrac{\sqrt{5}}{5}i\right\}$

C) $\left\{\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{5}}{10}i,\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{10}i\right\}$ D) $\left\{1 - \dfrac{\sqrt{5}}{5}i,\ 1 + \dfrac{\sqrt{5}}{5}i\right\}$

E) $\left\{\dfrac{1 - \sqrt{5}}{5}\mathrm{i},\ \dfrac{1 + \sqrt{5}}{5}\mathrm{i}\right\}$

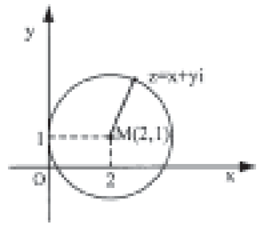
14) $P(x) = x^2 + 5x + 4$ ise, $P(i)$ ifadesi hangi sayıya eşittir?

A) $5 + 5i$ B) $3 + 5i$ C) $3 - 5i$ D) $2 + 5i$ E) $-3 + 4i$

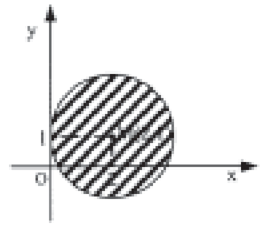
15) $z_1 = 1 - 2i$ ve $z_2 = -3 - 5i$ karmaşık sayıları arasındaki uzaklık nedir?

A) $\sqrt{34}$ B) $\sqrt{13}$ C) 8 D) 64 E) 5

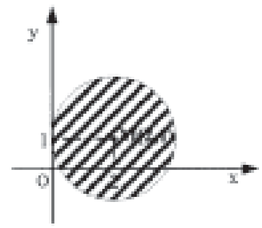
16) $\left| z-(2+i) \right| < 2$ olduğuna göre, z karmaşık sayılarının, karmaşık düzlemdeki görüntüleri olan noktaların kümesinin karmaşık düzlemdeki gösterimi aşağıdakilerden hangisidir?



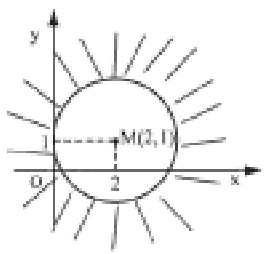
A



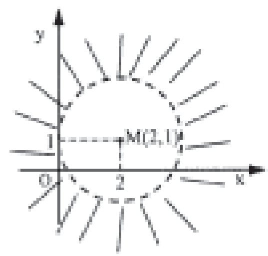
B



C



D



E

17) $z = a + bi$ I. bölgede ise, $-z$ karmaşık sayısı karmaşık düzlemin hangi bölgesindedir?

A) I. B) II. C) III. D) IV.

18) $z_1 + z_2 = 2 + 3\sqrt{11}\,i$ ise $\overline{z}_1 + \overline{z}_2$ sayısı nedir?

A) $-2+3\sqrt{11}\,i$ B) $-2-3\sqrt{11}\,i$ C) $5\sqrt{11}\,i$

D) $2-3\sqrt{11}\,i$ E) $2+3\sqrt{11}\,i$

19) $\overline{z_1 \cdot z_2} = 115 - 324i$ ise $\overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$ sayısı nedir?

A) $115+324i$ B) $-115-324i$ C) $-115+324i$

D) $430i$ E) $115-324i$

20) $\left|-\sqrt{2}-3\sqrt{2}i\right|$ ifadesinin değeri nedir?

A) $\sqrt{8}i$ B) $-4\sqrt{2}\,i$ C) $2\sqrt{5}$ D) $-\sqrt{20}$ E) $\sqrt{12}$

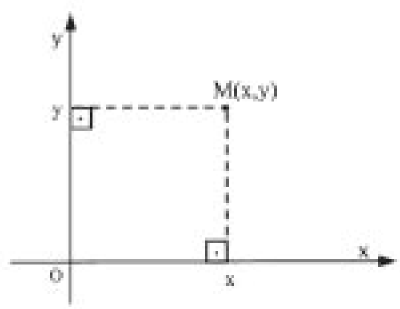
21) $\left|(1+2i)\cdot(\sqrt{5}+i)\right|$ ifadesinin değeri nedir?

A) $\sqrt{30}$ B) $\sqrt{11}$ C) $\sqrt{5}+2i$ D) $\sqrt{10}i$ E) $\sqrt{5}+\sqrt{10}i$

KUTUPSAL BİÇİMDEKİ KARMAŞIK SAYILAR

- ***KUTUPSAL KOORDİNAT SİSTEMİNİN TANIMI***
- ***BİR NOKTANIN KARTEZYEN KOORDİNATLARI İLE KUTUPSAL KOORDİNATLARI ARASINDAKİ BAĞINTILAR***
- ***KARMAŞIK SAYILARIN KUTUPSAL KOORDİNATLARI***
- ***KUTUPSAL BİÇİMDEKİ KARMAŞIK SAYILARLA İŞLEMLER***
- ***KARMAŞIK SAYILARIN KAREKÖKÜ VE KÜPKÖKÜ***

◆ *KUTUPSAL KOORDİNAT SİSTEMİNİN TANIMI*

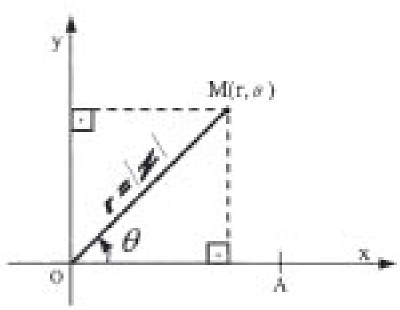


Analitik düzlemde, bir **M** noktasının yerinin (x,y) koordinatları ile belirlendiğini biliyoruz.

Düzlem noktaları, kutupsal koordinatları ile de belirlenir.

Düzlemde O başlangıç noktası ise Ox başlangıç ışınına, **kutup ekseni** ya da **x ekseni** denir.

Düzlemde, bir kutup noktası ve bir kutup ekseninden oluşan koordinat sistemine **kutupsal koordinat sistemi** denir.

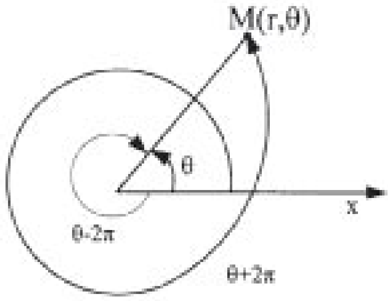


Düzlemdeki bir **M** noktasının, kutup noktasına uzaklığı, $|OM| = |z| = r$ birim, AOM yönlü açısının ölçüsü θ ise,

$$(r,\theta) \text{ veya } (|z|,\theta) \text{ ikilisine,}$$

M noktasının **kutupsal koordinatları** denir.

M noktasının kutupsal koordinatları $(|z|, \theta) = (r, \theta)$ ise, $|z| = r$ ye **yarıçap bileşeni**; θ ya **açısal bileşen** denir.



Kutupsal koordinatları (r,θ) olan M noktası;

$(r,\theta+2\pi),(r,\theta-2\pi),(r,\theta+4\pi), \ldots$

ikililerinden biri ile belirtilebilir.

$\forall\, k \in Z$ için, $(r,\theta+k\cdot 2\pi)$ ikilisi, $M(r,\theta)$ noktasının kutupsal koordinatıdır. Buna göre, kutupsal koordinat sisteminde; düzlemin bir noktasına, birden fazla kutupsal koordinat ikilisi karşılık gelebilir. Yukarıdaki şekli inceleyiniz.

ÖRNEK 1 ➫ Kutupsal koordinatları $\left(2, \dfrac{\pi}{6}\right)$ olan bir **E** noktası için $k \in Z$ olmak üzere $\left(2, \dfrac{\pi}{6}+k\cdot 2\pi\right)$ ikilisi de **E** noktasının kutupsal koordinatlarıdır.

ÖRNEK 2 ➫ **E** noktasının $k=0$, $k=3$, $k=-3$ için elde edilen kutupsal koordinatlarını bulunuz.

ÇÖZÜM ➫

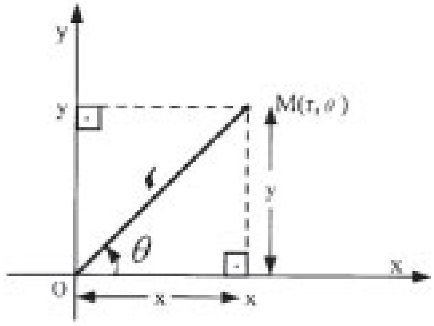
$$k=0 \Rightarrow \left(2,\ \frac{\pi}{6}+0\cdot 2\pi\right)=\left(2,\ \frac{\pi}{6}\right)$$

$$k=3 \Rightarrow \left(2,\ \frac{\pi}{6}+3\cdot 2\pi\right)=\left(2,\ \frac{\pi}{6}+6\pi\right)=\left(2,\ \frac{37\pi}{6}\right)$$

$$k=-3 \Rightarrow \left(2,\ \frac{\pi}{6}-3\cdot 2\pi\right)=\left(2,\ \frac{\pi}{6}-6\pi\right)=\left(2,\ \frac{-35\pi}{6}\right) \text{ olur.}$$

ALIŞTIRMA 1 ➫ Kutupsal koordinatları $\left(3,\dfrac{\pi}{4}\right)$ olan **M** noktasının kutupsal koordinatlarını $k=0$, $k=-1$, $k=2$ ve $k=-3$ için bulunuz.

◆ BİR NOKTANIN KARTEZYEN KOORDİNATLARI İLE KUTUPSAL KOORDİNATLARI ARASINDAKİ BAĞINTILAR



M noktasının kartezyen koordinatları (x,y), kutupsal koordinatları (r,θ) ise, yandaki şekilden

$r=\sqrt{x^2+y^2}$ bulunur.

←(Pisagor Teoremi)

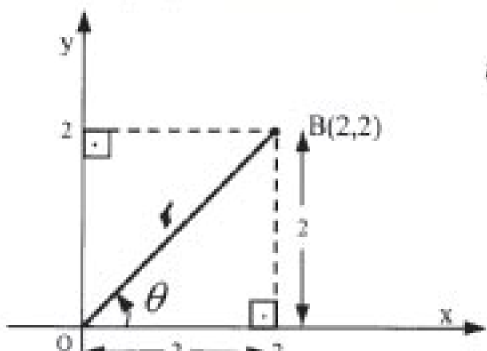
$$\sin\theta=\frac{y}{r}\Leftrightarrow y=r\cdot\sin\theta \qquad \leftarrow\left(\sin\theta=\frac{\text{Karşı D.K.U.}}{\text{Hipotenüs U.}}\right)$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}\Leftrightarrow x=r\cdot\cos\theta \qquad \leftarrow\left(\cos\theta=\frac{\text{Komşu D.K.U.}}{\text{Hipotenüs U.}}\right)$$

$\tan\theta=\dfrac{y}{x}$ olduğu görülür. $\leftarrow\left(\tan\theta=\dfrac{\text{Karşı D.K.U.}}{\text{Komşu D.K.U.}}\right)$

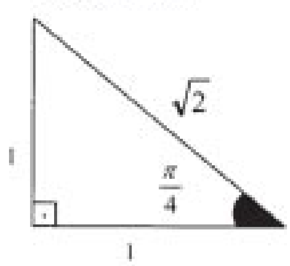
ÖRNEK 3 ⇨ Kartezyen koordinatları $(2,2)$ olan B noktasının, kutupsal koordinatlarını yazınız.

ÇÖZÜM ⇨ B $(2,2)$ noktasının kutupsal koordinatları (r,θ) ise,



$$\begin{aligned} r&=\sqrt{x^2+y^2}\\ &=\sqrt{2^2+2^2}\\ &=\sqrt{4+4}\\ &=\sqrt{2\cdot4}=2\sqrt{2} \text{ birimdir.}\end{aligned}$$

θ değerini bulalım: Yukarıda görüldüğü üzere B $(2,2)$ noktası birinci bölgededir.



$\tan\frac{\pi}{4}=\frac{1}{1}=1$

$$\begin{aligned}\tan\theta&=\frac{y}{x}\\ &=\frac{2}{2}\\ &=1 \text{ olduğundan,}\end{aligned} \qquad \leftarrow\left(\tan\theta=\frac{\text{Karşı D.K.U.}}{\text{Komşu D.K.U.}}\right)$$

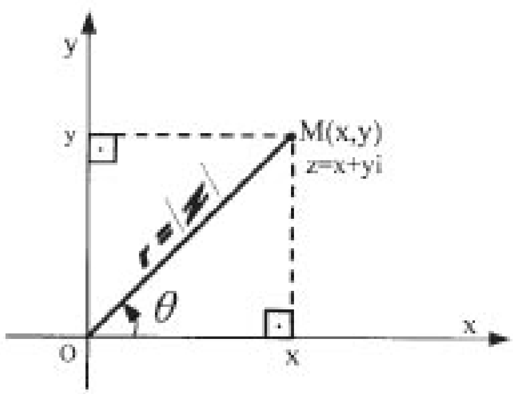
$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ radyandır.

B noktasının kutupsal koordinatları $\left(2\sqrt{2},\ \frac{\pi}{4}\right)$ olur.

$k \in Z$ olmak üzere, $\left(2\sqrt{2},\ \frac{\pi}{4}+k\cdot 2\pi\right)$ ikilisi de B noktasının kutupsal koordinatlarıdır.

ALIŞTIRMA 2 Kartezyen koordinatları $\left(\sqrt{3}\ ,1\right)$ olan D noktasının kutupsal koordinatlarını yazınız.

◆ *KARMAŞIK SAYILARIN KUTUPSAL KOORDİNATLARI*



Karmaşık düzlemde $M(x,y)$ noktasına eşlenen $z=x+yi$ karmaşık sayısının yeri,

$|OM|=|z|=r,\quad m(\widehat{xOM})$

olduğuna göre, $(|z|,\ \theta)$ ikilisiyle de belirlenir.

$(|z|,\theta)$ ikilisine, z karmaşık sayısının kutupsal koordinatları denir.

$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ pozitif reel sayısına, $z=x+yi$ karmaşık sayısının **modülü** yada **mutlak değeri** denir.

θ reel sayısına z karmaşık sayısının **argümenti** denir. $\arg(z)$ ile gösterilir. $\arg(z)=\theta$ dır.

$0 \le \theta < 2\pi$ koşulunu sağlayan θ ya z karmaşık sayısının **esas argümenti** denir.

Esas argümenti θ olan z karmaşık sayısının argümentleri , $k \in Z$ olmak üzere, $\theta + k\cdot 2\pi$ dir.

$z=x+yi$ karmaşık sayısının kutupsal koordinatları $(|z|,\ \theta)$ dır.

$$\cos\theta = \frac{x}{|z|} \Leftrightarrow x = |z| \cdot \cos\theta,$$

$$\sin\theta = \frac{y}{|z|} \Leftrightarrow y = |z| \cdot \sin\theta\ ,$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \quad \text{tir.}$$

$z = x + yi$ karmaşık sayısı, kutupsal koordinatları ile

- $z = x + yi = |z| \cdot \cos\theta + |z| \cdot \sin\theta\ i$
- $z = |z| \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)$
- $z = r \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)$ $\quad \leftarrow (r = |z|)$

gibi 3 farklı biçimde yazılır.

$z = x + yi$ karmaşık sayısının, $z = |z| \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)$ biçiminde yazılışına, z karmaşık sayısının **kutupsal (trigonometrik) gösterimi** denir.

$\cos\theta + i\sin\theta =$ ifadesi, kısaca $cis\theta$ biçiminde yazılır.

Buna göre,

$$z = |z| \cdot (\cos\theta + i\sin\theta) \text{ veya } z = |z| \cdot cis\theta \text{ olur.}$$

$0 \le \theta < 2\pi$ ise , z karmaşık sayısının kutupsal biçimde genel yazılışı,

$$z = |z| \cdot [\cos(\theta + k \cdot 2\pi) + i\sin(\theta + k \cdot 2\pi)],\ k \in Z \text{ olur.}$$

ÖRNEK 4 ⇨ $z = 6 \cdot \left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$ karmaşık sayısının esas argümentini bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ Yukarıda sorulan soruyu cevaplamak için aşağıdaki bilgileri göz önüne alalım:

$$z = |z| \cdot [\cos(\theta + k \cdot 2\pi) + i\sin(\theta + k \cdot 2\pi)],\quad k \in Z$$

veya

$z = |z| \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)$ olduğundan, $\arg(z) = \theta$ dır.

Eğer $0 \le \theta < 2\pi$ ise, θ ya z karmaşık sayısının esas argümenti denir.

$z=6\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$ karmaşık sayısının esas argümenti,

$\theta=\frac{5\pi}{3}$ tür çünkü $\frac{5\pi}{3}$, 0 ile 2π arasında yer almaktadır.

ÖRNEK 5 ⇨ $z=2\cdot\left(\cos\frac{13\pi}{6}+i\sin\frac{13\pi}{6}\right)$ karmaşık sayısının esas argümentini bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ $\theta=\frac{13\pi}{6}$ radyandır fakat θ, z karmaşık sayısının esas argümenti değildir. Çünkü $\theta=\frac{13\pi}{6}$, 0 ile 2π arasında değildir. O halde, $\frac{13\pi}{6}$ radyanın esas ölçüsünü bulmak için trigonometri konusundaki bilgilerimizi hatırlayalım:

Radyan türünden açıların esas ölçüsü, paydanın iki katının tam katlarına göre ayırım yapılarak bölünür.

$$\frac{13\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+\frac{12\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+2\pi$$

olduğundan, esas ölçü $\frac{\pi}{6}$ dır.

Sonuç olarak, z karmaşık sayısının esas argümenti $\theta=\frac{\pi}{6}$ dır.

ÖRNEK 6 ⇨ $z=4\cdot\left(\cos\frac{27\pi}{4}+i\sin\frac{27\pi}{4}\right)$ karmaşık sayısının esas argümentini bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ $z=4\cdot\left(\cos\frac{27\pi}{4}+i\sin\frac{27\pi}{4}\right)$

$\theta=\frac{27\pi}{4}$, 0 ile 2π arasında değildir. O halde, $\theta=\frac{27\pi}{4}$ radyanın esas ölçüsünü bulalım:

$$\frac{27\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+\frac{3\cdot 8\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+3\cdot 2\pi$$

olduğundan, $\theta=\frac{27\pi}{4}$ ün esas ölçüsü $\frac{3\pi}{4}$ tür.

O halde, z karmaşık sayısının esas argümenti, $\theta=\frac{3\pi}{4}$ tür.

ALIŞTIRMA 3 ⇨ $z=8\cdot\left(\cos\frac{57\pi}{5}+i\sin\frac{57\pi}{5}\right)$ karmaşık sayısının esas argümentini bulunuz.

ÖRNEK 7 ⇨ $z = 2 \cdot (\cos 1580° + i \sin 1580°)$ sayısının esas argümentini bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ 1580°, 0° ile 360° arasında olmadığından z karmaşık sayısının esas argümenti değildir.

O halde, 1580° nin esas ölçüsünü bulmak için trigonometri konusundaki bilgilerimizi hatırlayalım:

Derece cinsinden bir açının esas ölçüsünü bulmak için verilen açıyı 360° ye böleriz. Bu bölme işlemindeki kalan, bize açının esas ölçüsünü verir.

$$\begin{array}{r|l} 1580° & 360° \\ \hline -1440° & 4 \\ \hline 140° & \end{array} \qquad 1580° = \underbrace{140°}_{\text{Esas ölçü}} + 4 \cdot 360°$$

O halde, z karmaşık sayısının esas argümenti 140° dir.

ALIŞTIRMA 4 ⇨ $z = 1 \cdot (\cos 400° + i \sin 400°)$ karmaşık sayısının esas argümentini bulunuz.

ÖRNEK 8 ⇨ $z = 2\sqrt{3} + 2i$ karmaşık sayısının mutlak değeri (modülü), esas argümenti ve kutupsal (trigonometrik) gösterimi nedir?

ÇÖZÜM ⇨ $z = 2\sqrt{3} + 2i$ karmaşık sayısının reel ve sanal kısımlarını bulalım:

$z = 2\sqrt{3} + 2i \Rightarrow \text{Re}(z) = x = 2\sqrt{3}$, $\text{İm}(z) = y = 2$

$\leftarrow [z = x + yi \Rightarrow \text{Re}(z) = x \text{ ve } \text{İm}(z) = y]$ dir.

$z = 2\sqrt{3} + 2i$ sayısının mutlak değerini (modülünü) bulalım:

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, z karmaşık sayısının mutlak değeridir.

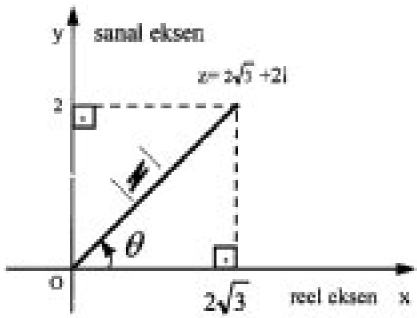
Şimdi, x ve y değerlerini yerine koyalım:

$$|z| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2}$$

$$= \sqrt{2^2 \cdot (\sqrt{3})^2 + 2^2} \qquad \leftarrow \left((a\sqrt{b})^2 = a^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = a^2 \cdot b \right)$$

$$= \sqrt{4 \cdot 3 + 4} = \sqrt{12 + 4} = \sqrt{16} = \sqrt{4^2} = 4 \text{ tür.}$$

$z = 2\sqrt{3} + 2i$ karmaşık sayısının esas argümentini bulalım:



$z = 2\sqrt{3} + 2i$ karmaşık sayısı yandaki karmaşık düzlemde gösterilmiştir.

Karmaşık düzlemde görüldüğü üzere, z karmaşık sayısı I. bölgededir. Bilindiği gibi bu bölgede $x > 0$ ve y>0 dır.

$\longleftarrow$($2\sqrt{3} > 0$ ve $2 > 0$)

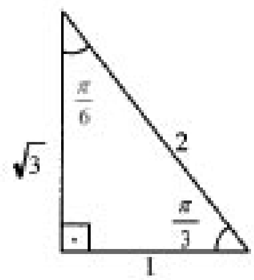
O halde, z karmaşık sayısının **esas argümenti**,

$$\theta \text{ ise, } 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ dir } \ldots(*)$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{tür. } \ldots(**)$$

(*) ve (**) dan dolayı,

$$\tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \text{ dır.}$$



$$\tan\theta = \frac{\text{Karsı D.K.U}}{\text{Komsu D.K.U}}$$

$$\tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\frac{\pi}{6}$, $z = 2\sqrt{3} + 2i$ karmaşık sayısının esas argümentidir. Çünkü $\frac{\pi}{6}$, 0 ile 2π arasındadır.

$z = 2\sqrt{3} + 2i$ karmaşık sayısının kutupsal (trigonometrik) gösterimini bulabilmek için bulduğumuz değerleri

$z = |z| \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)$ da yerlerine koyalım:

$$z = 4 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

veya

$$z = |z| \cdot cis\theta \Rightarrow z = 4 \cdot cis\frac{\pi}{6} \text{ dır.}$$

$z = 2\sqrt{3} + 2i$ *karmaşık sayısının genel kutupsal gösterimini bulabilmek için bulduğumuz değerleri aşağıda yerlerine koyalım:*

$$z = |z| \cdot [\cos(\theta + k \cdot 2\pi) + i\sin(\theta + k \cdot 2\pi)].$$

O halde,

$$z = 4 \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi\right)\right], \; k \in Z \text{ dir.}$$

ÖRNEK 9 ⇨ $z = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$ karmaşık sayısının kutupsal gösterimi nedir ?

ÇÖZÜM ⇨ $z = x + yi \Rightarrow z = |z| \cdot cis\theta = |z| \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)$ olduğundan z karmaşık sayısının modülünü ($|z|$) ve esas argümentini (θ) bulmamız gerekmektedir.

$$z = x + yi \;\Rightarrow\; |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$z = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i \quad \Rightarrow \mathrm{Re}(z) = x = \frac{3}{2} \;\text{ ve }\; \dot{I}m(z) = y = \frac{-3\sqrt{3}}{2} \;\text{ dir.}$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow |z| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{-3\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$\Rightarrow |z| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{\left(-3\sqrt{3}\right)^2}{2^2}} \leftarrow \left(\left(\frac{a\sqrt{b}}{c}\right)^2 = \frac{a^2 \cdot \left(\sqrt{b}\right)^2}{c^2} = \frac{a^2 \cdot b}{c^2}\right)$$

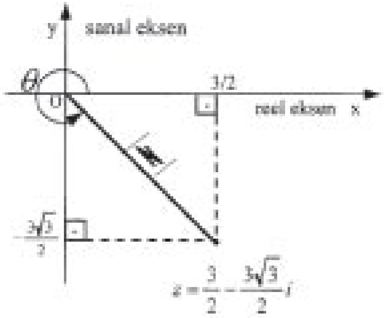
$$\Rightarrow |z| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{(-3)^2 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^2}{2^2}}$$

$$\Rightarrow |z| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{9 \cdot 3}{4}}$$

$$\Rightarrow |z| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{27}{4}}$$

$$\Rightarrow |z| = \sqrt{\frac{9 + 27}{4}} = |z| = \sqrt{\frac{36}{4}} = |z| = \sqrt{9} = \sqrt{3^2} = 3 \text{ tür.}$$

O halde, $z=\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ i karmaşık sayısının modülü 3 tür.



$z=\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i$ karmaşık sayısı yandaki karmaşık düzlemde gösterilmiştir.

Karmaşık düzlemde görüldüğü üzere, z karmaşık sayısı IV. bölgededir. Bilindiği gibi bu bölgede $x>0$ ve y< 0 dır.

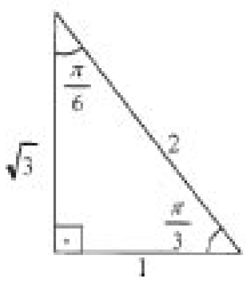
$\leftarrow\left(\frac{3}{2}>0,\ \frac{-3\sqrt{3}}{2}<0\right)$

O halde, z karmaşık sayısının esas argümenti θ için, $\frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi$ dir… (*)

$$\tan\theta=\frac{y}{x}$$

$$=\frac{\frac{-3\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}} \qquad \leftarrow\left(\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}\right)$$

$$=\frac{-3\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{-6\sqrt{3}}{6}=-\sqrt{3}\ \text{tür} \ldots\ (**)$$



$\tan\theta=\frac{\text{Karsı D.K.U}}{\text{Komsu D.K.U}}$

$\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

Yandaki üçgende görüldüğü üzere $\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$ tür. Fakat bizim aradığımız açının ölçüsü $\tan\theta=-\sqrt{3}$ olan değerdir. Bu ise $\frac{3\pi}{2}$ ile 2π arasındadır. (Not: θ, birim çemberin IV. bölgesindedir.)

O halde,

$$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \underset{(3)}{\frac{2\pi}{1}} - \frac{\pi}{3} = \frac{6\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{6\pi - \pi}{3} = \frac{5\pi}{3} \text{ tür.}$$

$0 \le \frac{5\pi}{3} < 2\pi$ arasında olduğundan $z = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$ karmaşık sayısının esas argümenti $\frac{5\pi}{3}$ tür.

$z = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$ karmaşık sayısının kutupsal gösterimi için gerekli olan bu karmaşık sayının modülünü (mutlak değerini) ve esas argümentini (θ) bulduk. Bunlar $|z| = 3$ ve $\theta = \frac{5\pi}{3}$ tür.

O halde,

$$z = |z| \cdot cis\theta = |z| \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$z = 3 \cdot cis\frac{5\pi}{3} = 3 \cdot \left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) \text{ tür.}$$

$z = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$ *karmaşık sayısının genel kutupsal gösterimini bulalım:*

$$z = |z| \cdot [\cos(\theta + k \cdot 2\pi) + i\sin(\theta + k \cdot 2\pi)] \Rightarrow$$
$$z = 3 \cdot \left[\cos\left(\frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi\right)\right], \ k \in Z \text{ dir.}$$

ÖRNEK 10 ⇨ $z = -\sqrt{3} + i$ karmaşık sayısının kutupsal gösterimi nedir ?

ÇÖZÜM ⇨ $z = x + yi \Rightarrow z = |z| \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)$ dır.

O halde, $z = -\sqrt{3} + i$ karmaşık sayısının kutupsal gösterimi için $|z|$ ve θ değerlerini bulmamız gerekmektedir.

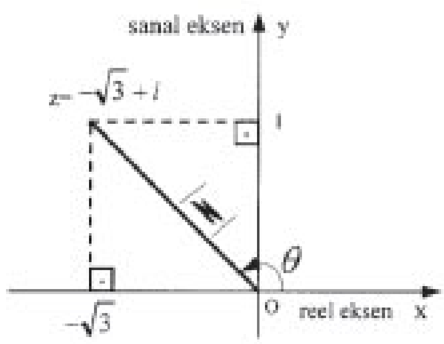
İlk önce, z karmaşık sayısının mutlak değerini ($|z|$) bulalım:

$z = x + yi \Rightarrow \quad \text{Re}(z) = x$ ve $\text{İm}(z) = y$ dir.

$z=-\sqrt{3}+i \Rightarrow \mathrm{Re}(z)=x=-\sqrt{3}$ ve $\quad \dot{I}m(z)=y=1$ dir.

$|z|=\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow |z|=\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+1^2}=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=\sqrt{2^2}=2$ dir.

Şimdi z karmaşık sayısının esas argümentini (θ) bulalım:

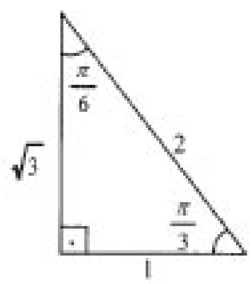


$z=-\sqrt{3}+i$ karmaşık sayısı yandaki karmaşık düzlemde gösterilmiştir.

Karmaşık düzlemde görüldüğü üzere, z karmaşık sayısı II. bölgededir. Bilindiği gibi, bu bölgede $x<0$ ve $y>0$ dır.

$\leftarrow(-\sqrt{3}<0$ ve $1>0)$

O halde, z karmaşık sayısının esas argümenti θ ise,



$\tan\theta=\dfrac{\text{Karsı D.K.U}}{\text{Komsu D.K.U}}$

$\tan\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ dir. ....(*)

$\tan\theta=\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{-\sqrt{3}}=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ tür. ...(**)

Yukarıdaki trigonometrik üçgende görüldüğü üzere $\tan\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ tür.

Fakat bizim aradığımız açının ölçüsü, tanjantı $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ olan değerdir. Bu ise $\dfrac{\pi}{2}$ ile π arasındadır. Başka bir deyişle, θ birim çemberin II. bölgesindedir.

O halde, $\theta=\pi-\dfrac{\pi}{6}=\underset{(6)}{\dfrac{\pi}{1}}-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{6\pi}{6}-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{5\pi}{6}$ dır.

$0 \le \frac{5\pi}{6} < 2\pi$ olduğundan, $z = -\sqrt{3} + i$ karmaşık sayısının esas argümenti $\frac{5\pi}{6}$ dır.

$z = -\sqrt{3} + i$ karmaşık sayısının kutupsal gösterimi için gerekli olan bu sayının mutlak değerini (modülünü) ve esas argümentini bulduk. Bunlar $|z| = 2$ ve $\theta = \frac{5\pi}{6}$ dır.

O halde,

$$z = |z| \cdot cis\theta = |z| \cdot (\cos\theta + i\sin\theta) \Rightarrow z = 2 \cdot cis\frac{5\pi}{6} = 2 \cdot \left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) \text{ dır.}$$

$z = -\sqrt{3} + i$ karmaşık sayısının **genel kutupsal gösterimini** bulalım:

$$z = |z| \cdot [\cos(\theta + k \cdot 2\pi) + i\sin(\theta + k \cdot 2\pi)] \Rightarrow$$

$$z = 2 \cdot \left[\cos\left(\frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi\right)\right],\ k \in Z \text{ dir.}$$

ÖRNEK 11 ⇒ $z_1 = 3$ karmaşık sayısının kutupsal gösterimi nedir ?

ÇÖZÜM ⇒ $z = x + yi \Rightarrow z = |z| \cdot cis\theta = |z| \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)$ dır.

O halde, $z = 3$ karmaşık sayısının kutupsal gösterimi için bu karmaşık sayının mutlak değerini $(|z|)$, ve esas argümentini (θ) bulmamız gerekmektedir.

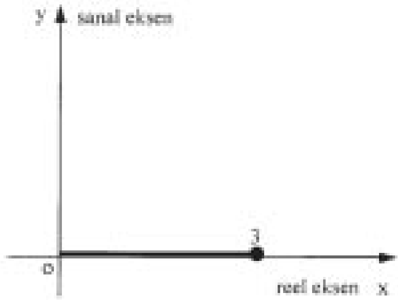
İlk önce, z karmaşık sayısının mutlak değerini $(|z|)$ bulalım:

$$z = x + yi \Rightarrow \quad \mathrm{Re}(z) = x \quad \text{ve} \quad \dot{I}m(z) = y$$

$$z = 3 + 0 \cdot i \Rightarrow \mathrm{Re}(z) = x = 3 \text{ ve } \dot{I}m(z) = y = 0$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow |z| = \sqrt{3^2 + 0^2} = \sqrt{3^2} = 3 \quad \text{tür.}$$

Şimdi, z karmaşık sayısının esas argümentini (θ) bulalım:



$z = 3 = 3 + 0 \cdot i$ karmaşık sayısı yandaki karmaşık düzlemde gösterilmiştir.

Karmaşık düzlemde görüldüğü üzere z karmaşık sayısı x reel ekseni üzerindedir. Çünkü 3 > 0 ve y =0 dır.

O halde, z karmaşık sayısının esas argümenti $\theta = 0$ dır. Çünkü θ, 0 ile 2π arasındadır.

$z = 3$ karmaşık sayısının kutupsal gösterimi için gerekli olan bu karmaşık sayısının mutlak değerini $(|z|)$ ve esas argümentini (θ) bulduk. Bunlar, $|z| = 3$ ve $\theta = 0$ dır.

O halde, $z = 3$ sayısının kutupsal gösterimi:

$z = |z| \cdot cis\theta = |z| \cdot (\cos\theta + i\sin\theta) \Rightarrow z = 3 \cdot cis0 = 3 \cdot (\cos 0 + i\sin 0)$ dır.

$z = 3$ karmaşık sayısının genel kutupsal gösterimi:

$$z = |z| \cdot [\cos(\theta + k \cdot 2\pi) + i\sin(\theta + k \cdot 2\pi)] \Rightarrow$$

$$z = 3 \cdot [\cos(0 + k \cdot 2\pi) + i\sin(0 + k \cdot 2\pi)],\ k \in Z \text{ dir.}$$

ALIŞTIRMA 5 ⇒ Aşağıda verilen karmaşık sayıların mutlak değerini, esas argümentini ve kutupsal koordinatlarını bulduktan sonra kutupsal biçimde yazınız.

(A) $z = -i$ (B) $z = 4 - 4i$ (C) $z = 5 + 5\sqrt{3}\,i$

Kutupsal Koordinatları Verilen Karmaşık Sayının $x + yi$ Biçiminde Yazımı

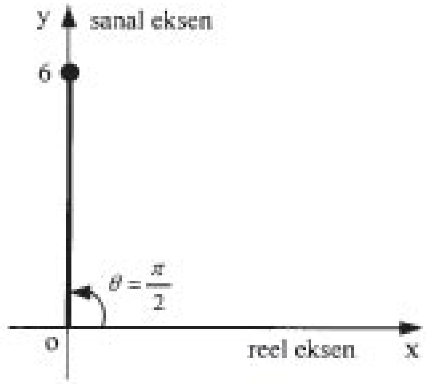
ÖRNEK 12 ⇒ Kutupsal koordinatları $(6, \frac{\pi}{2})$ olan karmaşık sayıyı $z = x + yi$ biçiminde yazınız.

ÇÖZÜM ⇒ Kutupsal koordinat, $(|z|, \theta)$ dır.

$$(6, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow |z| = r = 6 \text{ ve } \theta = \frac{\pi}{2} \text{ dir.}$$

Verilen soruyu iki farklı yolla çözeceğiz:

I.Yol:



$x = |z| \cdot \cos\theta \quad \Rightarrow x = 6 \cdot \cos\frac{\pi}{2} = 6 \cdot 0 = 0$

$y = |z| \cdot \sin\theta \quad \Rightarrow y = 6 \cdot \sin\frac{\pi}{2} = 6 \cdot 1 = 6$

O halde, kutupsal koordinatları $(6, \frac{\pi}{2})$ olan z karmaşık sayısı,

$$z = x + yi \Rightarrow z = 0 + 6i = 6i \text{ dir.}$$

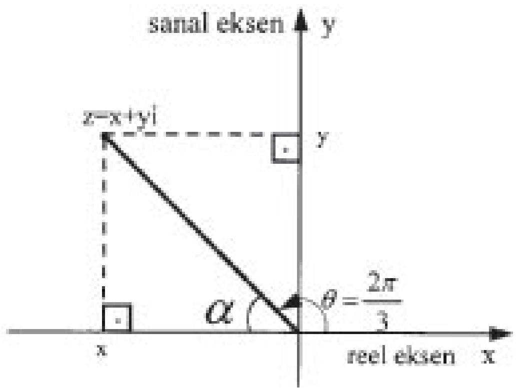
II. Yol:

$|z| = 6$ ve $\theta = \frac{\pi}{2}$ değerlerini $z = |z| \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)$ da yerlerine koyalım:

$z = 6 \cdot (\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) \Rightarrow z = 6 \cdot (0 + i \cdot 1) = 6 \cdot 0 + 6i = 6i$ dir.

ÖRNEK 13 ➾ Kutupsal koordinatları $(2, \frac{2\pi}{3})$ olan z karmaşık sayısını $x + yi$ biçiminde yazınız.

ÇÖZÜM ➾ Kutupsal koordinat $(|z|, \theta)$ dır.



$(2, \frac{2\pi}{3}) \Rightarrow |z| = 2$ ve $\theta = \frac{2\pi}{3}$

$x = |z| \cdot \cos\theta \Rightarrow x = 2 \cdot \cos\frac{2\pi}{3} \ldots(*)$

$y = |z| \cdot \sin\theta \Rightarrow y = 2 \cdot \sin\frac{2\pi}{3} \ldots(**)$

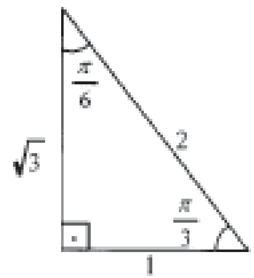
$\cos\frac{2\pi}{3}$ ve $\sin\frac{2\pi}{3}$ değerlerini bulalım:

Karmaşık düzlemde $\theta = \frac{2\pi}{3}$ iken $\alpha = \frac{\pi}{3}$ tür çünkü,

$$\alpha = \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{3\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \text{ tür.}$$

Karmaşık düzlemde incelediğimiz $\cos\frac{2\pi}{3}$ değeri negatif iken $\sin\frac{2\pi}{3}$ değeri pozitiftir.

xOz üçgeninde xOz açısının ölçüsü $\frac{\pi}{3}$ tür.



$\cos\theta = \frac{\text{Komsu D.K.U}}{\text{Hipotenus.U}}$

$\sin\theta = \frac{\text{Karsı D.K.U}}{\text{Hipotenus.U}}$

O halde,

$$\cos\frac{2\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} \text{ dir.}$$

$$\sin\frac{2\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{3} \Rightarrow \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ dir.}$$

Şimdi bulduğumuz $\cos\frac{2\pi}{3}$ ve $\sin\frac{2\pi}{3}$ değerlerini (*) ve (**) da yerlerine koyalım:

$$x = 2\cdot\cos\frac{2\pi}{3} = 2\cdot\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{-2}{2} = -1 \text{ dir.}$$

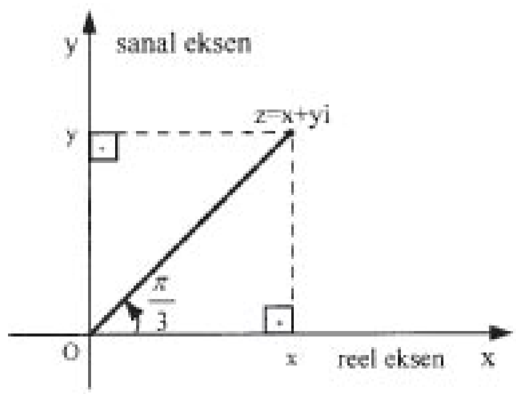
$$y = 2\cdot\sin\frac{2\pi}{3} = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \text{ tür.}$$

O halde,

$$z = x + yi \Rightarrow z = -1 + \sqrt{3}\,i \text{ dir.}$$

ÖRNEK 14 ⇨ Kutupsal koordinatları $(6, \frac{\pi}{3})$ olan karmaşık sayıyı $z = x + yi$ biçiminde yazınız.

ÇÖZÜM ⇨ $|z| = 6$ ve $\theta = \arg(z) = \dfrac{\pi}{3}$ olduğuna göre,



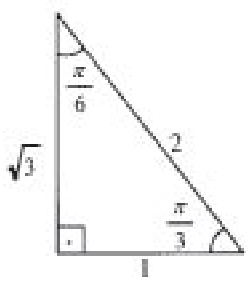
$$z = |z| \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$= 6 \cdot (\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$$

$$= 6 \cdot \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \frac{6}{2} + 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$= 3 + 3\sqrt{3}\, i \text{ dir.}$$

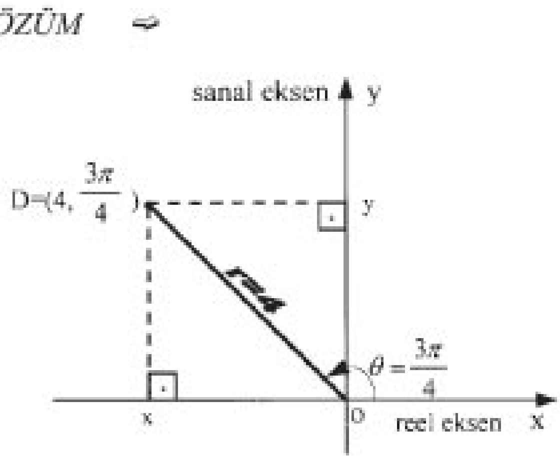


$$\cos\theta = \frac{\text{Komşu D.K.U}}{\text{Hipotenüs.U}}$$

$$\sin\theta = \frac{\text{Karşı D.K.U}}{\text{Hipotenüs.U}}$$

ÖRNEK 15 ⇨ Kutupsal koordinatları $(4, \frac{3\pi}{4})$ olan D noktasını karmaşık düzlemde gösteriniz ve kartezyen koordinatlarını yazınız.

ÇÖZÜM ⇨



Kutupsal koordinatları $(4, \frac{3\pi}{4})$ olan D noktası yandaki koordinat sisteminde gösterilmiştir.

$$x = r \cdot \cos\theta \Rightarrow x = 4 \cdot \cos\frac{3\pi}{4} \ldots (*)$$

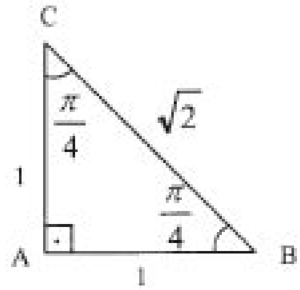
ve

$$y = r \cdot \sin\theta \Rightarrow y = 4 \cdot \sin\frac{3\pi}{4} \ldots (**)$$

O halde, $\cos\frac{3\pi}{4}$ ve $\sin\frac{3\pi}{4}$ değerlerini bulalım:

Karmaşık düzlemde $\theta = \frac{3\pi}{4}$ iken $\alpha = \pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ tür.

Koordinat sisteminde görüldüğü üzere, $\frac{3\pi}{4}$ II. bölgededir. Bu bölgede kosinüs değerleri negatif iken sinüs değerleri pozitiftir.



$\cos\theta = \frac{\text{Komsu D.K.U}}{\text{Hipotenus.U}}$

$\sin\theta = \frac{\text{Karsı D.K.U}}{\text{Hipotenus.U}}$

O halde yanda verilmiş olan trigonometrik üçgenden de yararlanarak istediğimiz değerleri bulalım:

$$\cos\frac{3\pi}{4} = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ dir.} \qquad \leftarrow \left(\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}\right)$$

$$\sin\frac{3\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ dir.}$$

Bulduğumuz değerleri (*) ve (**) da yerlerine koyalım:

$$x = r\cdot\cos\theta \Rightarrow x = 4\cdot\cos\frac{3\pi}{4}$$

$$\Rightarrow x = 4\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow x = -2\sqrt{2} \text{ dir.}$$

$$y = r\cdot\sin\theta \Rightarrow y = 4\cdot\sin\frac{3\pi}{4}$$

$$= 4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= 2\sqrt{2} \text{ dir.}$$

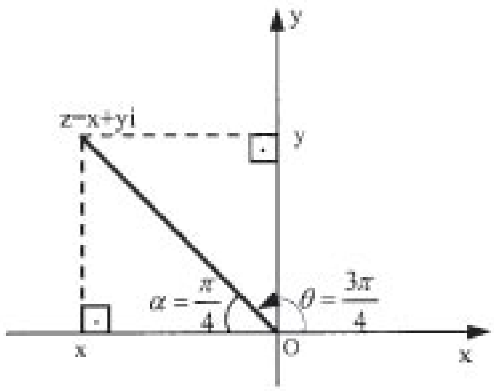
Sonuç olarak, D noktasının kartezyen koordinatları $(-2\sqrt{2},\, 2\sqrt{2})$ dir.

ALIŞTIRMA 6 ➾ $(4, \frac{\pi}{4})$, $(2, \frac{5\pi}{6})$ ve $(2\sqrt{3}, \frac{4\pi}{3})$ noktalarını koordinat sisteminde gösteriniz ve kartezyen koordinatlarını yazınız.

ÖRNEK 16 ➾ $z=\sqrt{2}\cdot(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4})$ sayısını $z=x+yi$ biçiminde yazınız.

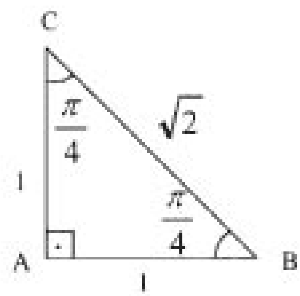
ÇÖZÜM ➾ $z=\sqrt{2}\cdot(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4})$ sayısını $z=x+yi$ biçiminde yazabilmek için,

$\cos\frac{3\pi}{4}$ ve $\sin\frac{3\pi}{4}$ değerlerini hesaplamamız gerekmektedir.



Karmaşık düzlemde görüldüğü üzere, $\cos\frac{3\pi}{4}$ değeri negatif iken $\sin\frac{3\pi}{4}$ değeri pozitiftir. xOz üçgeninde xOz açısının ölçüsü,

$$\alpha=\pi-\theta=\pi-\frac{3\pi}{4}=\frac{4\pi}{4}-\frac{3\pi}{4}=\frac{\pi}{4} \text{ tür.}$$



O halde,

$$\cos\frac{3\pi}{4}=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ dir.}$$

$$\sin\frac{3\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ dir.}$$

$$\cos\theta=\frac{\text{Komsu D.K.U}}{\text{Hipotenus.U}}$$

$$\sin\theta=\frac{\text{Karsı D.K.U}}{\text{Hipotenus.U}}$$

Şimdi bulduğumuz $\cos\frac{3\pi}{4}$ ve $\sin\frac{3\pi}{4}$ değerlerini,

$z=\sqrt{2}\cdot(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4})$ de yerlerine koyalım:

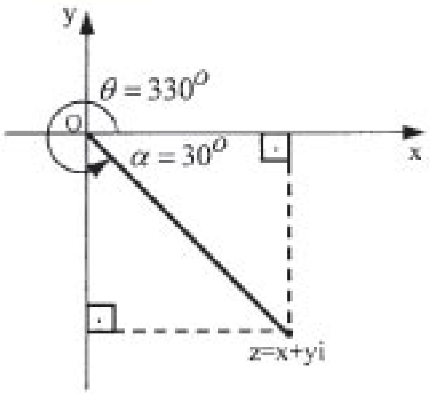
$$z=\sqrt{2}\cdot(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i)$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}i$$

$$=-1+i \text{ dir.}$$

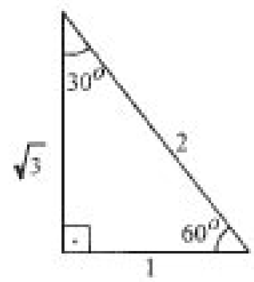
ÖRNEK 17 ⇨ $z=\sqrt{3}\cdot(\cos 330^\circ + i\sin 330^\circ)$ karmaşık sayısını $z=x+yi$ biçiminde yazınız.

ÇÖZÜM ⇨ $z=\sqrt{3}\cdot(\cos 330^\circ + i\sin 330^\circ)$ karmaşık sayısını $z=x+yi$ biçiminde yazabilmek için, $\cos 330^\circ$ ve $\sin 330^\circ$ değerlerini hesaplamamız gerekmektedir.



Karmaşık düzlemde görüldüğü üzere, $\cos 330^\circ$ değeri pozitif iken $\sin 330^\circ$ değeri negatiftir.

xOz üçgeninde xOz açısının ölçüsü, $\alpha = 360^\circ - \theta = 360^\circ - 330^\circ = 30^\circ$ dir.



$\cos\theta = \dfrac{\text{Komsu D.K.U}}{\text{Hipotenus.U}}$

$\sin\theta = \dfrac{\text{Karsı D.K.U}}{\text{Hipotenus.U}}$

O halde,

$\cos 330^\circ = \cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ dir.

$\sin 330^\circ = -\sin 30^\circ = -\dfrac{1}{2}$ dir.

Şimdi, bulduğumuz $\cos 330^\circ$ ve $\sin 330^\circ$ değerlerini,

$$z=\sqrt{3}\cdot(\cos 330^\circ + i\sin 330^\circ)$$

de yerlerine koyalım:

$$z=\sqrt{3}\cdot\left[\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)i\right]$$

$$=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)i$$ ←(Çarpmanın toplama üzerine dağılma özeliği)

$$=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ dir.}$$

ALIŞTIRMA 7 ⇨ Aşağıda kutupsal gösterimi verilen karmaşık sayıları $z=x+yi$ biçiminde yazınız.

(A) $z=4\cdot(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$ (B) $z=5\cdot(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4})$

(C) $z=6\cdot(\cos 300^\circ + i\sin 300^\circ)$

Toplama ve Çıkarma

$z_1 = |z_1| \cdot (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ ve $z_2 = |z_2| \cdot (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ biçiminde verilmiş iki karmaşık sayının toplamını bulmak için, bu sayıları önce $z = x + yi$ (standart) şekline dönüştürmek gerekir. Dönüşüm sonunda iki karmaşık sayı toplanır. İki karmaşık sayının farkını bulmak için ise, dönüşüm sonunda iki karmaşık sayı birbirinden çıkarılır.

ÖRNEK 18 ⇨ $z_1 = 6 \cdot (\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3})$ ve $z_2 = \sqrt{3} \cdot (\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$ karmaşık sayılarının toplamını ve farkını bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ $z_1 = 6 \cdot (\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}) = 6 \cdot (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) = -\frac{6}{2} - \frac{6\sqrt{3}}{2}i = -3 - 3\sqrt{3}i$

$$z_2 = \sqrt{3} \cdot (\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = \sqrt{3}(0 + i) = 0 \cdot \sqrt{3} + \sqrt{3} \cdot i = 0 + \sqrt{3}\,i = \sqrt{3}\,i$$

$z_1 + z_2 = (-3 - 3\sqrt{3}i) + (\sqrt{3}i) = -3 - 3\sqrt{3}i + \sqrt{3}i = -3 - 2\sqrt{3}i$ dir.

$z_1 - z_2 = (-3 - 3\sqrt{3}i) - (\sqrt{3}i) = -3 - 3\sqrt{3}i - \sqrt{3}i = -3 - 4\sqrt{3}i$ dir.

ALIŞTIRMA 8 ⇨ $z_1 = 2 \cdot (\cos\frac{9\pi}{4} + i\sin\frac{9\pi}{4})$ ve $z_2 = 3 \cdot (\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6})$ karmaşık sayılarının toplamını ve farkını bulunuz.

Çarpma

$z_1 = |z_1| \cdot (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ ve $z_2 = |z_2| \cdot (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ karmaşık sayılarının çarpımını bulalım:

$$z_1 \cdot z_2 = \left[\,|z_1| \cdot (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\right] \cdot \left[\,|z_2| \cdot (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\right]$$

$$= |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$= |z_1| \cdot |z_2| \cdot \left[(\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2) + (\cos\theta_1 \cdot \sin\theta_2 + \sin\theta_1 \cdot \cos\theta_2)i\right]$$

$= |z_1| \cdot |z_2| \cdot \left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\right]$ olur.

Buna göre, $z_1 \cdot z_2$ çarpımında

$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) = \theta_1 + \theta_2$ dir.

Kutupsal koordinatları ile verilen $z_1 = (r_1, \theta_1)$, $z_2 = (r_2, \theta_2)$ karmaşık sayıları için, $z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot r_2,\ \theta_1 + \theta_2)$ dir.

$z = |z| \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)$ karmaşık sayısı için,

$$z^2 = z \cdot z = |z| \cdot |z| \cdot [\cos(\theta + \theta) + i\sin(\theta + \theta)] = |z|^2 \cdot (\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$$

$$z^3 = z^2 \cdot z = |z|^2 \cdot |z| \cdot [\cos(2\theta + \theta) + i\sin(2\theta + \theta)] = |z|^3 \cdot (\cos 3\theta + i\sin 3\theta)$$

dır.

Aynı şekilde devam edilerek, $p \in N$ olmak üzere,
$z^p = |z|^p \cdot (\cos p\theta + i\sin p\theta)$ olduğu görülür. Bu ise De Moivre formülüdür.

$|z| = 1$ ise $z = 1 \cdot (\cos\theta + i\sin\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$ dır.

$$z^p = (\cos\theta + i\sin\theta)^p = \cos p\theta + i\sin p\theta$$

←(De Moivre formülü)

De Moivre formülü, p nin *negatif* tam sayı olması durumunda da geçerlidir. Sonuç olarak, bu formülü aşağıdaki gibi özetleyebiliriz.

De Moivre Formülü

$z = |z| \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)$ olduğuna göre, $\forall\ k \in Z$ için,

$z^k = |z|^k \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)^k = |z|^k \cdot (\cos k\theta + i\sin k\theta)$ dır.

Bir karmaşık sayının kuvveti, karekökü, küpkökü, … n kökü bulunurken De Moivre formülünden yararlanılır.

ÖRNEK 19 ⇨ $z_1 = 2 \cdot (\cos 240^\circ + i\sin 240^\circ)$ ve $z_2 = 6 \cdot (\cos 150^\circ + i\sin 150^\circ)$ karmaşık sayılarının çarpımını $z = x + yi$ biçiminde yazınız.

ÇÖZÜM ⇨ Bu soruda $z_1 \cdot z_2$ sayısını $z = x + yi$ biçiminde yazacağız.

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_1| \cdot [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

$|z_1| = 2$, $|z_2| = 6 \Rightarrow |z_1| \cdot |z_2| = 2 \cdot 6 = 12$

$\theta_1 = 240^\circ$ ve $\theta_2 = 150^\circ \Rightarrow \theta_1 + \theta_2 = 240^\circ + 150^\circ = 390^\circ = 360^\circ + 30^\circ$

$$z_1 \cdot z_2 = 12 \cdot [\cos(360^\circ + 30^\circ) + i\sin(360^\circ + 30^\circ)]$$

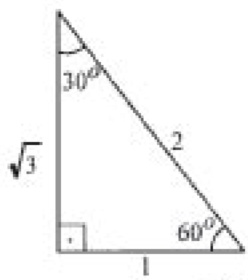
$\cos(360^\circ + 30^\circ)$ ve $\sin(360^\circ + 30^\circ)$ yi hesaplayalım:

$\cos(360^\circ + 30^\circ)$ yi hesaplamak için

$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2$ özdeşliğini kullanalım.

$$\cos(360^\circ + 30^\circ) = \cos 360^\circ \cdot \cos 30^\circ - \sin 360^\circ \cdot \sin 30^\circ$$

$$= 1 \cdot \cos 30^\circ - 0 \cdot \sin 30^\circ = \cos 30^\circ \text{ dir.}$$



$$\cos\theta = \frac{\text{Komsu D.K.U}}{\text{Hipotenus.U}}$$

$$\sin\theta = \frac{\text{Karsı D.K.U}}{\text{Hipotenus.U}}$$

O halde, $\cos(360^\circ + 30^\circ) = \cos 30^\circ$ dir.

$\sin 390^\circ = \sin(360^\circ + 30^\circ)$ yi hesaplayalım:

$$\sin(360^\circ + 30^\circ) = \sin 360^\circ \cdot \cos 30^\circ + \cos 360^\circ \cdot \sin 30^\circ$$

$$= 0 \cdot \cos 30^\circ + 1 \cdot \sin 30^\circ = \sin 30^\circ \text{ dir.}$$

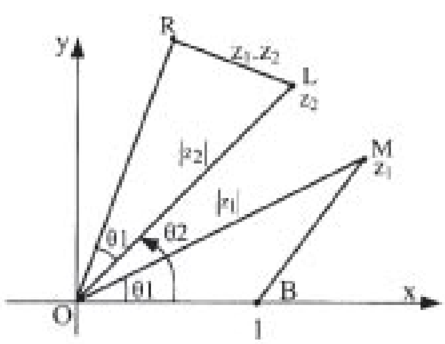
$$z_1 \cdot z_2 = 12 \cdot (\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ) \text{ dir.}$$

$$z_1 \cdot z_2 = 12 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{12}{2}\sqrt{3} + \frac{12}{2}i = 6\sqrt{3} + 6i \quad \text{dir.}$$

ALIŞTIRMA 9 ➩ $z_1 = 3 \cdot (\cos 140^\circ + i\sin 140^\circ)$ ve $z_2 = 2 \cdot (\cos 40^\circ + i\sin 40^\circ)$ karmaşık sayılarının çarpımını $z = x + yi$ biçiminde yazınız.

Çarpma İşleminin Geometrik Yorumu



$z_1 = a + bi = |z_1| \cdot cis\theta_1$ ve $z_2 = c + di = |z_2| \cdot cis\theta_2$

karmaşık sayılarının, karmaşık düzlemdeki görüntüleri M ve L olsun.

B(1,0) olmak üzere, OBM üçgenine benzer olacak şekilde, OLR üçgenini çizelim:

$\overset{\triangle}{OLR} \sim \overset{\triangle}{OBM}$ olduğundan,

$$\frac{|OR|}{|OM|} = \frac{|OL|}{|OB|} \Rightarrow \frac{|OR|}{|z_1|} = \frac{|z_2|}{1}$$

$$\Rightarrow |OR| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$\overset{\triangle}{OLR} \sim \overset{\triangle}{OBM} \Rightarrow m(\widehat{LOR}) = m(\widehat{BOM}) = \theta_1$ olduğundan,

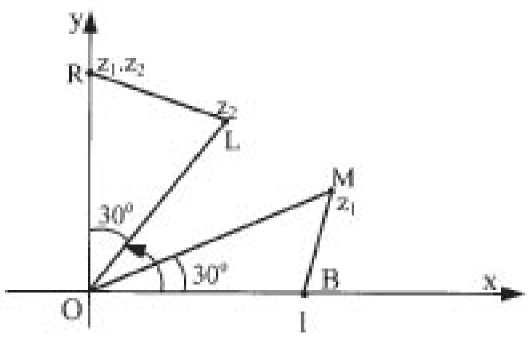
$$m(\widehat{BOR}) = m(\widehat{BOL}) + m(\widehat{LOR}) = \theta_2 + \theta_1 = \theta_1 + \theta_2$$

Buna göre, R noktası, $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$ çarpımının, karmaşık düzlemdeki görüntüsüdür.

$z_1 \cdot z_2$ çarpımının, karmaşık düzlemdeki görüntüsünü bulmak için, OBM üçgenine benzer olan OLR üçgenini çizmek yeter. R noktası, $z_1 \cdot z_2$ nin görüntüsüdür.

ÖRNEK 20 ⇨ $z_1 = 2(\cos 30° + i\sin 30°)$ ve $z_2 = 4(\cos 60° + i\sin 60°)$ karmaşık sayılarının çarpımının karmaşık düzlemdeki görüntüsünü geometrik olarak bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ z_1 ve z_2 karmaşık sayıları, aşağıdaki karmaşık düzlemde gösterilmiştir.



$|OB| = 1$ birim ve $\overset{\triangle}{OLR} \sim \overset{\triangle}{OBM}$ olmak üzere OLR üçgeni çizildiğinde; R noktası, $z_1 \cdot z_2$ çarpımının görüntüsü olur.

$$\frac{|OR|}{|OM|} = \frac{|OL|}{|OB|} \Rightarrow \frac{|OR|}{2} = \frac{4}{1}$$

$$\Rightarrow |OR| = 2 \cdot 4 = 8$$

$m(\widehat{BOR}) = 30° + 60° = 90°$ dir.

$$z_1 \cdot z_2 = 2 \cdot 4 \cdot [\cos(30° + 60°) + i\sin(30° + 60°)]$$

$$= 8 \cdot (\cos 90° + i\sin 90°)$$

$$= 8 \cdot (0 + i \cdot 1) = 8i \text{ dir.}$$

ÖRNEK 21 ⇨ $z_1 = 5\cdot(\cos 25^\circ + i\sin 25^\circ)$, $z_2 = 2\cdot(\cos 20^\circ + i\sin 20^\circ)$ olduğuna göre $z_1 \cdot z_2$ yi $z = x + yi$ biçiminde yazınız.

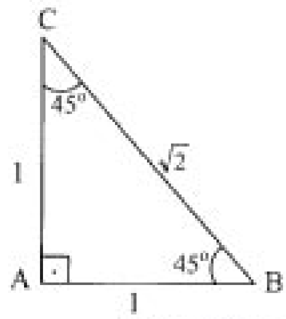
ÇÖZÜM ⇨ $z_1 \cdot z_2 = [r_1 \cdot (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)]\cdot[r_2 \cdot (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)]$

$$= r_1 \cdot r_2 \cdot [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

ifadesinden yararlanarak yukarıda sorulan soruyu çözelim:

$r_1 = 5$, $r_2 = 2$, $\theta_1 = 25^\circ$ ve $\theta_2 = 20^\circ$ olduğuna göre,

$$z_1 \cdot z_2 = 5\cdot 2\cdot[\cos(25^\circ + 20^\circ) + i\sin(25^\circ + 20^\circ)]$$



$\cos\theta = \dfrac{\text{Komsu D.K.U}}{\text{Hipotenus.U}}$

$\sin\theta = \dfrac{\text{Karsı D.K.U}}{\text{Hipotenus.U}}$

$$= 10\cdot(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)$$

$$= 10\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= 10\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \qquad \leftarrow\left(\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}\right)$$

$$= \frac{10\sqrt{2}}{2} + i\frac{10\sqrt{2}}{2}$$

$$= 5\sqrt{2} + 5\sqrt{2}\,i \text{ dir.}$$

ÖRNEK 22 ⇨ $z = 2\cdot(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$ ise z^3 ün eşitini $z = x + yi$ biçiminde yazınız.

ÇÖZÜM ⇨ De Moivre formülünü

$$m \in Z \text{ için } z^m = |z|^m \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)^m = |z|^m \cdot (\cos m\theta + i\sin m\theta)$$

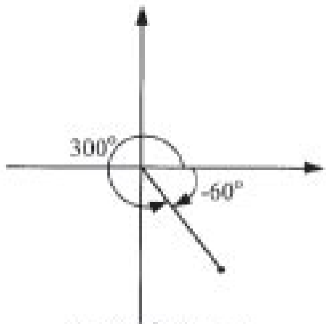
kullanarak z^3 ün eşitini hesaplayalım:

$$z^3 = 2^3 \cdot (\cos 3\cdot\frac{\pi}{3} + i\sin 3\cdot\frac{\pi}{3}) = 8\cdot(\cos\pi + i\sin\pi)$$

$$z^3 = 8\cdot(-1 + i\cdot 0) = -8 \text{ olur.}$$

ÖRNEK 23 ⇨ $z=\sqrt[30]{4}\,(\cos 10^\circ + i\sin 10^\circ)$ olduğuna göre z^{30} un eşitini $z=x+yi$ biçiminde yazınız.

ÇÖZÜM ⇨ De Moivre formülünü kullanarak z^{30} u hesaplayalım:



Cos(360°-θ)=Cos θ
Sin(360°-θ)= - Sin θ

$$z=4^{1/30}\cdot(\cos 10^\circ + i\sin 10^\circ) \qquad \leftarrow (\sqrt[p]{x}=x^{\frac{1}{p}})$$

$$z^{30}=(4^{1/30})^{30}\cdot(\cos 30\cdot 10^\circ + i\sin 30\cdot 10^\circ)$$

$$\leftarrow ((x^{\frac{1}{q}})^q = x^{\frac{q}{q}} = x^1 = x)$$

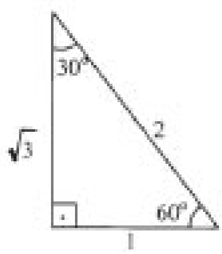
$$=4\cdot(\cos 300^\circ + i\sin 300^\circ)$$

$$=4\cdot[\cos(360^\circ-60^\circ)+i\sin(360^\circ-60^\circ)]$$

$$\leftarrow (\cos(360^\circ-\alpha)=\cos\alpha\,;\ \sin(360^\circ-\alpha)=-\sin\alpha)$$

$$=4\cdot(\cos 60^\circ - i\sin 60^\circ)=4\cdot(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)$$

$$=2-2\sqrt{3}\,i \text{ dir.}$$



$$\cos\theta=\frac{\text{Komsu D.K.U}}{\text{Hipotenus.U}}$$

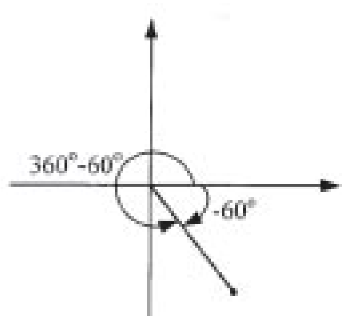
$$\sin\theta=\frac{\text{Karsı D.K.U}}{\text{Hipotenus.U}}$$

Not: $z^{30}=4\cdot(\cos 300^\circ + i\sin 300^\circ)$ olduğuna göre $\cos 300^\circ$ ve $\sin 300^\circ$ yi hesaplamamız gerekmektedir.

Birim çemberden yararlanarak $\cos 300^\circ$ ve $\sin 300^\circ$ yi hesaplayabiliriz.

$$\cos 300^\circ = \cos(-60^\circ)=\frac{1}{2}$$

$$\sin 300^\circ = \sin(-60^\circ)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$



IV.Bölge
sinüs değerleri → negatif
Kosinüs değerleri → pozitiftir

O halde,

$$z^{30}=4\cdot(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)=2-2\sqrt{3}i \text{ dir.}$$

Bölme

$z_1 = |z_1| \cdot (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ ve $z_2 = |z_2| \cdot (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ karmaşık sayılarının bölümü,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1| \cdot (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{|z_2| \cdot (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} = \frac{|z_1| \cdot (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot (\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{|z_2| \cdot (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \cdot (\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}$$

$$= \frac{|z_1| \cdot \left[(\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 - i^2 \cdot \sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2) + (-\cos\theta_1 \cdot \sin\theta_2 + \sin\theta_1 \cdot \cos\theta_2) i\right]}{|z_2| \cdot \underbrace{(\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2)}_{1}}$$

$$= \frac{|z_1| \cdot \left[(\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2) + (\sin\theta_1 \cdot \cos\theta_2 - \cos\theta_1 \cdot \sin\theta_2) i\right]}{|z_2| \cdot 1}$$

$$= \frac{|z_1| \cdot \left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\right]}{|z_2|}$$

$$= \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot \left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\right] \text{ olur.}$$

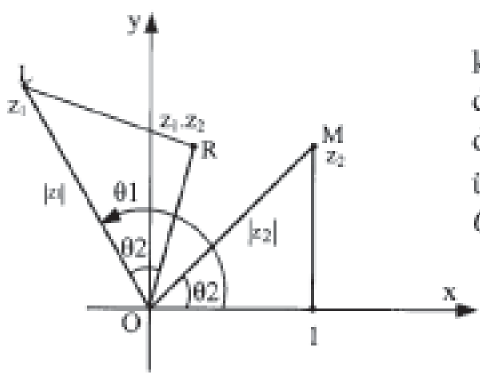
Buna göre, $\dfrac{z_1}{z_2}$ bölümünde,

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) = \theta_1 - \theta_2 \text{ dir.}$$

Kutupsal koordinatları ile verilen $z_1 = (r_1, \theta_1)$ ve $z_2 = (r_2, \theta_2)$ karmaşık sayıları için, $z_1 : z_2 = (r_1 : r_2,\ \theta_1 - \theta_2)$ dir.

Bölme İşleminin Geometrik Yorumu

$z_1 = a + bi = |z_1| \cdot cis\theta_1$ ve $z_2 = c + di = |z_2| \cdot cis\theta_2$



karmaşık sayılarının, karmaşık düzlemdeki görüntüleri L ve M dir. $B(1,0)$ olmak üzere; OMB üçgenine benzer olacak şekilde, OLR üçgenini çizelim:

$$\overset{\triangle}{OLR} \sim \overset{\triangle}{OMB} \quad \Rightarrow \frac{|OL|}{|OM|} = \frac{|OR|}{|OB|}$$

$$\Rightarrow \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{|OR|}{1}$$

$$\Rightarrow |OR| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \text{ olur.}$$

$m(\widehat{ROL}) = m(\widehat{BOM}) = \theta_2$ olduğundan,

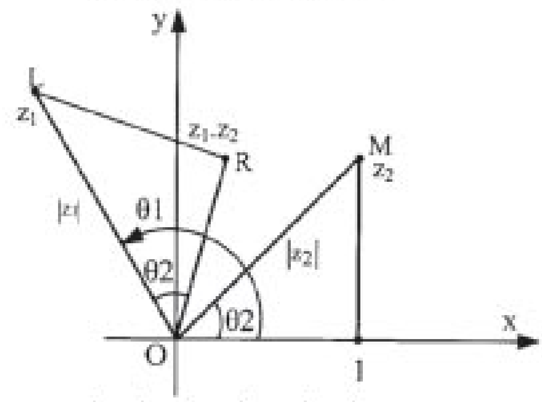
$m(\widehat{BOR}) = m(\widehat{BOL}) - m(\widehat{ROL}) = \theta_1 - \theta_2$ dir.

Buna göre, R noktası, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$ bölümünün, karmaşık düzlemdeki görüntüsüdür.

$\frac{z_1}{z_2}$ bölümünün, karmaşık düzlemdeki görüntüsünü bulmak için, OMB üçgenine benzer olan, OLR üçgenini çizmek yeter. R noktası, $z_1 : z_2$ nin görüntüsüdür.

ÖRNEK 24 ⇨ $z_1 = 6 \cdot (\cos 135^\circ + i\sin 135^\circ)$ ve $z_2 = 2 \cdot (\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)$ karmaşık sayıları veriliyor. $z_1 : z_2$ bölümünün karmaşık düzlemdeki görüntüsünü, geometrik olarak bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ z_1 ve z_2 karmaşık sayıları, aşağıdaki karmaşık düzlemde gösterilmiştir.



$|OB| = 1$ birim ve $\overset{\triangle}{OLR} \sim \overset{\triangle}{OMB}$ olmak üzere, OLR üçgeni çizildiğinde; R noktası, $z_1 : z_2$ bölümünün görüntüsü olur.

$$\frac{|OR|}{|OB|} = \frac{|OL|}{|OM|} \Rightarrow \frac{|OR|}{1} = \frac{6}{2}$$

$$\Rightarrow |OR| = 3 \text{ birimdir.}$$

$m(\widehat{BOR}) = m(\widehat{BOL}) - m(\widehat{BOM}) = 135° - 60° = 75°$ dir.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{6}{2} \cdot \left[\cos\left(135° - 60°\right) + i\sin\left(135° - 60°\right)\right]$$

$$= 3 \cdot \left(\cos 75° + i\sin 75°\right) \text{ dir.}$$

ÖRNEK 25 ⇨ $z_1 = 2 \cdot \left(\cos 240° + i\sin 240°\right)$ ve $z_2 = 6 \cdot \left(\cos 150° + i\sin 150°\right)$ karmaşık sayılarının $\frac{z_1}{z_2}$ bölümünü $x + yi$ biçiminde (standart biçimde) yazınız.

ÇÖZÜM ⇨ $z_1 = 2 \cdot \left(\cos 240° + i\sin 240°\right) \Rightarrow |z_1| = 2, \ \theta_1 = 240°$

$$z_2 = 6 \cdot \left(\cos 150° + i\sin 150°\right) \Rightarrow |z_2| = 6, \ \theta_2 = 150°$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot \left[\left(\cos(\theta_1 - \theta_2)\right) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\right]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{6} \cdot \left[\left(\cos\left(240° - 150°\right)\right) + i\sin\left(240° - 150°\right)\right]$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left(\cos 90° + i\sin 90°\right) \text{ dir.}$$

$\frac{z_1}{z_2}$ yi standart biçimde yazalım:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{3} \cdot \left(\cos 90° + i\sin 90°\right) = \frac{1}{3} \cdot (0 + i) = \frac{1}{3} i \text{ olur.}$$

ÖRNEK 26 ⇨ $z = 4 \cdot \text{cis}30° = 4 \cdot \left(\cos 30° + i\sin 30°\right)$ karmaşık sayısının, çarpma işlemine göre tersini bulunuz.

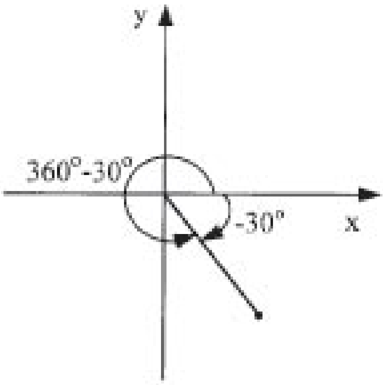
ÇÖZÜM ⇨ Yukarıda verilen soruyu iki farklı yolla çözebiliriz.

I. Yol:

$$z = 4 \cdot \left(\cos 30° + i\sin 30°\right) \Rightarrow |z| = 4, \ \theta = 30°$$

z karmaşık sayısının çarpmaya göre tersi, $z^{-1} = \frac{1}{z}$ dir.

$$z^{-1} = \frac{1}{4 \cdot \left(\cos 30° + i\sin 30°\right)} = \frac{1 \cdot \left(\cos 30° - i\sin 30°\right)}{4 \cdot \left(\cos 30° + i\sin 30°\right) \cdot \left(\cos 30° - i\sin 30°\right)}$$



$$= \frac{\cos 30^\circ - i\sin 30^\circ}{4\cdot\left(\cos^2 30^\circ + \sin^2 30^\circ\right)} = \frac{1\cdot\left(\cos 30^\circ - i\sin 30^\circ\right)}{4}$$

$\leftarrow(\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1)$

$$= \frac{1}{4}\cdot\left[\cos\left(-30^\circ\right) + i\sin\left(-30^\circ\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\left[\cos\left(360^\circ - 30^\circ\right) + i\sin\left(360^\circ - 30^\circ\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\left(\cos 330^\circ + i\sin 330^\circ\right) \text{ dir.}$$

II. Yol:

$$\frac{1}{4\cdot(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)} = \frac{\cos 360^\circ + i\sin 360^\circ}{4\cdot(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)}$$

$\leftarrow(1 = \cos 360^\circ + i\sin 360^\circ)$

$$= \frac{1}{4}\cdot\left[\cos(360^\circ - 30^\circ) + i\sin(360^\circ - 30^\circ)\right]$$

$\leftarrow$(İki karmaşık sayının bölümü)

$$= \frac{1}{4}\cdot(\cos 330^\circ + i\sin 330^\circ) \text{ dir.}$$

ALIŞTIRMA 10 ⇒ Aşağıdaki alıştırmaları yapınız:

(A) $z = 4\cdot cis\frac{\pi}{3}$ karmaşık sayısının çarpma işlemine göre tersini bulunuz ve elde ettiğiniz karmaşık sayıyı $x + yi$ biçiminde yazınız.

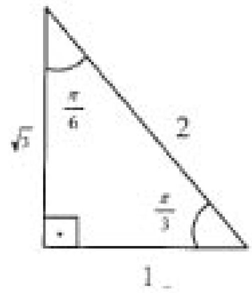
(B) $z_1 = 4\cdot\left(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ\right)$ ve $z_2 = 6\cdot\left(\cos 150^\circ + i\sin 150^\circ\right)$ karmaşık sayılarının $\frac{z_1}{z_2}$ bölümünü $x + yi$ biçiminde yazınız.

ÖRNEK 27 ⇒ $z_1 = 8\cdot\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$ ve $z_2 = 4\cdot\left(\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ olduğuna göre $\frac{z_1}{z_2}$ yi $x + yi$ biçiminde yazınız.

ÇÖZÜM ⇒ $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1\cdot\left(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1\right)}{r_2\cdot\left(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2\right)} = \frac{r_1}{r_2}\cdot\left[\cos\left(\theta_1 - \theta_2\right) + i\sin\left(\theta_1 - \theta_2\right)\right]$ den yararlanarak yukarıda sorulan soruyu cevaplayacağız.

$r_1 = 8,\quad r_2 = 4,\quad \theta_1 = \dfrac{5\pi}{6}$ ve $\theta_2 = \dfrac{2\pi}{3}$ olduğuna göre ,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{8\cdot\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)}{4\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)}$$



$\text{Cos}\,\theta = \dfrac{\text{Komşu D.K.U}}{\text{HipotenüsU.}}$

$\text{Sin}\,\theta = \dfrac{\text{Karşı D.K.U}}{\text{HipotenüsU.}}$

$$= \frac{8}{4}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6} - \underset{(2)}{\frac{2\pi}{3}}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6} - \underset{(2)}{\frac{2\pi}{3}}\right)\right]$$

$$= 2\cdot\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{4\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{4\pi}{6}\right)\right]$$

$$= 2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= 2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

$$= \frac{2\cdot\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{2}i$$

$$= \sqrt{3} + i \text{ dir.}$$

◆ *KARMAŞIK SAYILARIN KAREKÖKÜ VE KÜPKÖKÜ*

Karekök:

Bir Karmaşık Sayının Karekökü

z,u$\in C$ ve $u^2 = z$ ise, u karmaşık sayısına, z karmaşık sayısının **karekökü** denir.

$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ karmaşık sayısının kareköklerini, z_0 , z_1 ile gösterirsek;

$z_0 = \sqrt{|z|}\cdot\left(\cos\dfrac{\theta}{2} + i\sin\dfrac{\theta}{2}\right)$, $z_1 = \sqrt{|z|}\cdot\left[\cos\left(\dfrac{\theta}{2} + \pi\right) + i\sin\left(\dfrac{\theta}{2} + \pi\right)\right]$ olur.

$z = |z|\cdot(\cos\theta + i\sin\theta)$, $\quad u = |u|\cdot(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ olsun.

u, z nin karekökü ise,

$$u^2 = z \Rightarrow \left[\, |u| \cdot (\cos\alpha + i\sin\alpha)\right]^2 = |z| \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\Rightarrow |u|^2 \cdot (\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha) = |z| \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)$$

←(De Moivre Formülü)

$$\Rightarrow |u|^2 = |z| \quad \text{ve} \quad 2\alpha = \theta + k \cdot 2\pi$$

$$\Rightarrow |u| = \sqrt{|z|} \quad \text{ve} \quad \alpha = \frac{\theta}{2} + k \cdot \pi \quad \text{olur.}$$

$k = 0$ ise, $\alpha = \dfrac{\theta}{2}$ olduğundan, karekök, $u_0 = \sqrt{|z|} \cdot \left(\cos\dfrac{\theta}{2} + i\sin\dfrac{\theta}{2}\right)$;

$k = 1$ ise, $\alpha = \dfrac{\theta}{2} + \pi$ olduğundan, karekök,

$$u_1 = \sqrt{|z|} \cdot \left[\cos\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right)\right] \text{ olur.}$$

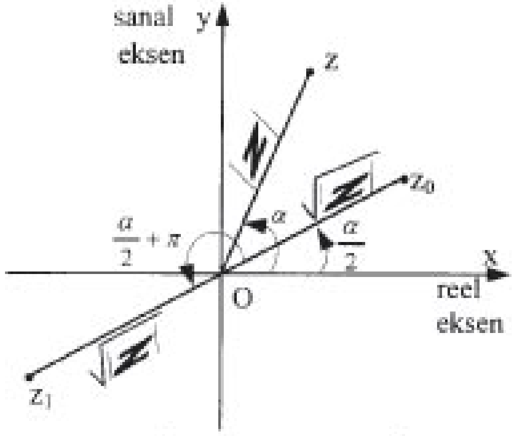
$z = |z| \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)$ sayısının karekökleri,

$$u_0 = \sqrt{|z|} \cdot \left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right) \text{ ve } u_1 = \sqrt{|z|} \cdot \left[\cos\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right)\right] \text{ dir.}$$

$k = 2$ için, $\alpha = \dfrac{\theta}{2} + 2\pi$ olur.

O halde, $\cos\left(\dfrac{\theta}{2} + 2\pi\right) = \cos\dfrac{\theta}{2}$, $\sin\left(\dfrac{\theta}{2} + 2\pi\right) = \sin\dfrac{\theta}{2}$

olduğundan, $k = 2$ için bulunan kök, u_0 köküne eşit olur. k nin öteki değerleri için bulunan kökler de u_0, u_1 köklerinden birine eşit olur. Buna göre, z karmaşık sayısının karekökleri, u_0 ve u_1 dir.



z karmaşık sayısı ve z nin z_0 , z_1 karekökleri, yandaki karmaşık düzlemde gösterilmiştir.
z karmaşık sayısının z_0 , z_1 karekökleri, O başlangıç noktasına (orijine) göre birbirinin simetriğidir.

ÖRNEK 28 ⇨ $z = 4\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ karmaşık sayısının kareköklerini bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ $z = 4\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

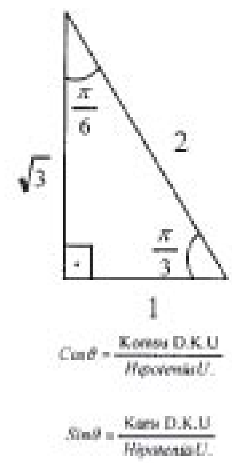
$z = 4\cdot cis\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ tür.

z nin karekökleri u olduğuna göre,

$$u^2 = z = 4\cdot cis\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right) \text{ ; } k\in\{0,1\} \text{ dir.}$$

$$u = 4^{1/2}\cdot \mathrm{cis}\left[\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right)\right]$$

$$= 2\cdot \mathrm{cis}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{3} + \frac{1}{2}\cdot 2k\pi\right] = 2\cdot \mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{3} + k\pi\right)$$

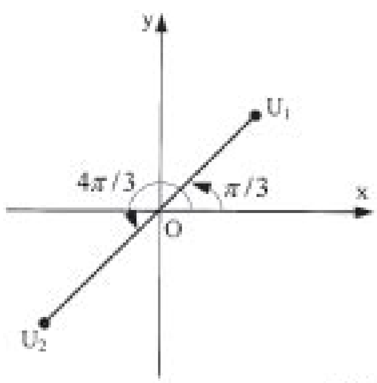


$k = 0$ *için,* $u_1 = 2\cdot cis\frac{\pi}{3} = 2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$$= 2\cdot\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$= 1 + \sqrt{3}\, i \text{ dir.}$$

k=1 için,



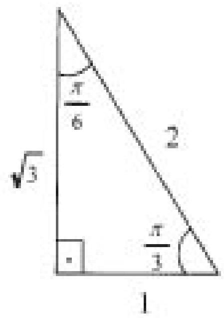
$$u_2 = 2\cdot \mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{3} + \pi\right)$$

$$= 2\cdot \mathrm{cis}\left(\frac{\pi + 3\pi}{3}\right)$$

$$= 2\cdot \mathrm{cis}\left(\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$= 2\cdot\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) \ldots (*)$$

Birim çemberden yararlanarak, $\cos\frac{4\pi}{3}$ ve $\sin\frac{4\pi}{3}$ değerlerini hesaplayalım. $\frac{4\pi}{3}$ karmaşık düzlemde III. bölgededir. Burada kosinüs ve sinüs negatif değerlere sahiptir. (Not: $\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$ *ve* $\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$)



$Cos\theta = \frac{\text{Komşu D.K.U}}{\text{HipotenüsU.}}$

$Sin\theta = \frac{\text{Karşı D.K.U}}{\text{HipotenüsU.}}$

$$\cos\frac{4\pi}{3} = \cos(\pi+\frac{\pi}{3}) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} \text{ dir.}$$

$$\sin\frac{4\pi}{3} = \sin(\pi+\frac{\pi}{3}) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ dir.}$$

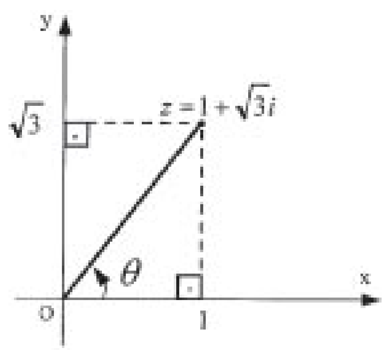
Bulduğumuz değerleri (*) da yerine koyalım.

$$u_2 = 2\cdot\left[\left(\frac{-1}{2}\right)+i\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)\right] = -1-\sqrt{3}\,i \text{ dir.}$$

u_1 ve u_2 *orijine* göre birbirinin *simetriğidir.*

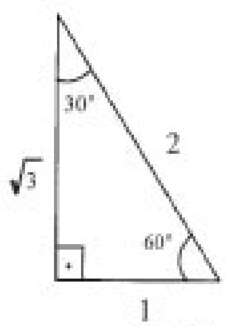
ÖRNEK 29 ⇨ $z = 1+\sqrt{3}\,i$ karmaşık sayısının kareköklerini bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ $z = 1+\sqrt{3}\,i \Rightarrow \text{Re}(z) = x = 1$ ve $\dot{I}m(z) = y = \sqrt{3}$



$$|z| = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2 \text{ dir.}$$

Karmaşık düzlemde görüldüğü üzere, $z = 1+\sqrt{3}\,i$ karmaşık sayısı I. bölgededir.



$\tan\theta = \frac{\text{Karşı D.K.U}}{\text{Komşu D.K.U}}$

$\tan 60^{o} = \sqrt{3}$

$Cos\theta = \frac{\text{Komşu D.K.U}}{\text{HipotenüsU.}}$

$Sin\theta = \frac{\text{Karşı D.K.U}}{\text{HipotenüsU.}}$

O halde,

$0^\circ < \theta < 90^\circ$ dir. .... (*)

$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$ tür. .... (**)

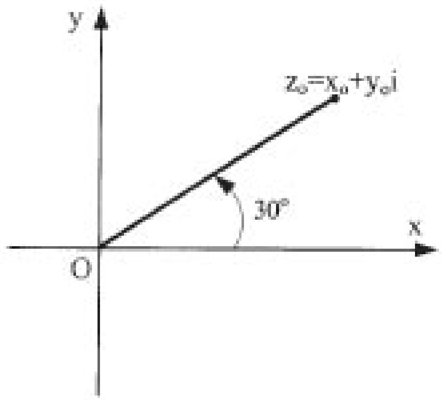
(*) ve (**) den dolayı, $\theta = 60^\circ$ dir.

Şimdi bulduğumuz değerleri, $z = |z| \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)$ da yerlerine koyalım:

$$z = 2 \cdot (\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) \text{ dir.}$$

z karmaşık sayısının karekökleri, z_0 ve z_1 dir.

z_0 sayısını bulalım:



$$z_0 = \sqrt{2} \cdot (\cos\frac{60^\circ}{2} + i\sin\frac{60^\circ}{2})$$

$\leftarrow (z_0 = \sqrt{|z|} \cdot (\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2})$)

$$= \sqrt{2} \cdot (\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$$

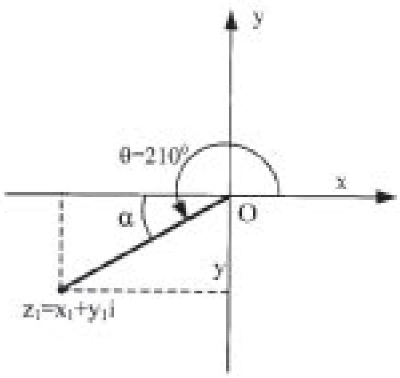
$$= \sqrt{2} \cdot (\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)$$

$$= \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \qquad \leftarrow (\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a.b})$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \text{ dir.}$$

$$z_1 = \sqrt{2} \cdot \left[\cos(\frac{60^\circ}{2} + 180^\circ) + i \ \sin(\frac{60^\circ}{2} + 180^\circ)\right]$$

$\leftarrow (z_1 = \sqrt{|z|} \cdot \left[(\cos\frac{\theta}{2} + 180^\circ) + i\sin(\frac{\theta}{2} + 180^\circ\right]$)



$$= \sqrt{2} \cdot (\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ)$$

$\cos 210^\circ$ ve $\sin 210^\circ$ değerlerini hesaplayalım:

Karmaşık düzlemde görüldüğü üzere, $\cos 210^\circ$ ve $\sin 210^\circ$ nin değerleri negatiftir.

xOz_1 üçgeninde, xOz_1 açısının ölçüsü,

$$\alpha = 210^\circ - 180^\circ = 30^\circ \text{ dir.}$$

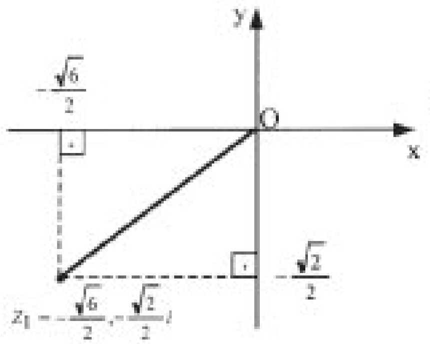
O halde,

$$\cos 210^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ dir.}$$

$$\sin 210^\circ = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2} \text{ dir.}$$

Şimdi bulduğumuz $\cos 210^{o}$ ve $\sin 210^{o}$ değerlerini,

$$z_1 = \sqrt{2}\cdot(\cos 210^{o} + i\sin 210^{o})$$



$${}_1 = \sqrt{2}\cdot\left[\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= -\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2} + i\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

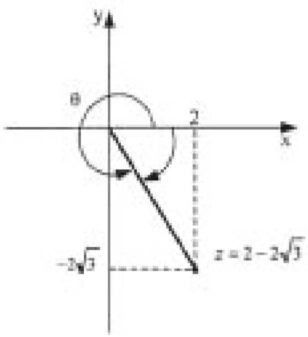
$$= -\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \text{ dir.}$$

z karmaşık sayısının karekökleri z_0 *ve* z_1 *orijine* göre birbirinin *simetriğidir.*

ÖRNEK 30 ⇨ $z = 2 - 2\sqrt{3}\,i$ karmaşık sayısının kareköklerini bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ $z = 2 - 2\sqrt{3}\,i$ sayısının kutupsal gösterimini bulalım:

$$z = 2 - 2\sqrt{3}\,i \Rightarrow \mathrm{Re}(z) = x = 2 \text{ ve } Im(z) = y = -2\sqrt{3}$$



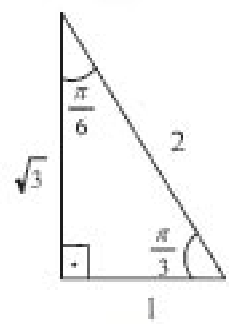
$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow |z| = \sqrt{2^2 + (-2\sqrt{3})^2}$$

$$= \sqrt{4 + 4\cdot 3} = \sqrt{16} = 4 \text{ tür.}$$

Karmaşık düzlemde görüldüğü üzere z karmaşık sayısı IV. bölgededir.

O halde, $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ dir….(*)

$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$ tür….(**)



(*) ve (**) den dolayı, $\theta = \frac{5\pi}{3}$ tür.

Şimdi bulduğumuz değerleri,

$$z = |z|\cdot(\cos\theta + i\sin\theta)$$

da yerine koyalım:

$$z = 4\cdot(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}) \text{ tür.}$$

$Tan\,\theta = \frac{\text{Karsı D.K.U}}{\text{Komsu D.K.U}} \Rightarrow Tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

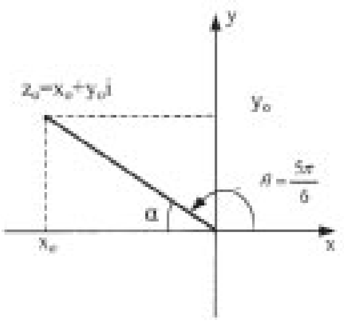
$Cos\,\theta = \frac{\text{Komsu D.K.U}}{HipotenüsU.}$

$Sin\,\theta = \frac{\text{Karsı D.K.U}}{HipotenüsU.}$

z karmaşık sayısının karekökleri, z_0 ve z_1 dir.

$$z_0 = \sqrt{4} \cdot \left(\cos \frac{\frac{5\pi}{3}}{2} + i \sin \frac{\frac{5\pi}{3}}{2} \right) \qquad \leftarrow \left(z_0 = \sqrt{|z|} \cdot (\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

$$= 2 \cdot (\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}) \text{ dır.}$$



$\cos \frac{5\pi}{6}$ ve $\sin \frac{5\pi}{6}$ değerlerini hesaplayalım:

Karmaşık düzlemde görüldüğü üzere, $\cos \frac{5\pi}{6}$ değeri negatif iken, $\sin \frac{5\pi}{6}$ değeri pozitiftir.

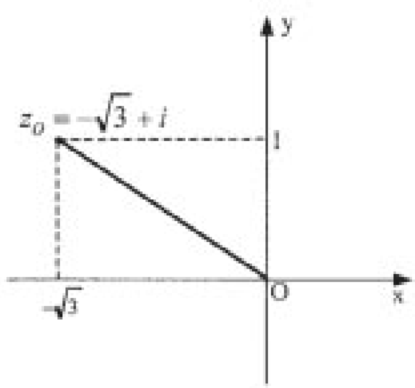
$x_0 O z_0$ üçgeninde $x_0 O z_0$ açısının ölçüsü α :

$$\alpha = \pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{6\pi}{6} - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \text{ dır.}$$

O halde,

$$\cos \frac{5\pi}{6} = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ dir.}$$

$$\sin \frac{5\pi}{6} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \text{ dir.}$$



Şimdi bulduğumuz $\cos \frac{5\pi}{6}$ ve $\sin \frac{5\pi}{6}$ değerlerini,

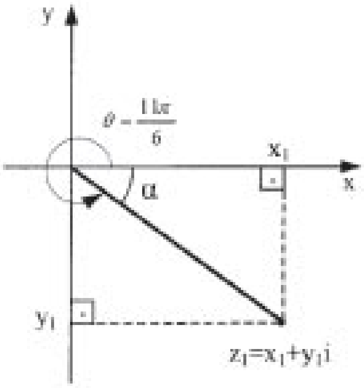
$$z_0 = 2 \cdot (\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6})$$

da yerlerine koyalım:

$$z_0 = 2 \cdot (-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i)$$

$$= \frac{-2\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{2} i$$

$$= -\sqrt{3} + i \text{ dir.}$$



$$z_1 = \sqrt{4}\cdot\left(\cos\left(\frac{\frac{5\pi}{3}}{2}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{\frac{5\pi}{3}}{2}+\pi\right)\right)$$

$$\leftarrow\left(z_1 = \sqrt{|z|}\cdot\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)\right]\right)$$

$$=2\cdot\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}+\pi\right)\right]$$

$$=2\cdot\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right) \text{ dır.}$$

$\cos\frac{11\pi}{6}$ ve $\sin\frac{11\pi}{6}$ değerlerini hesaplayalım:

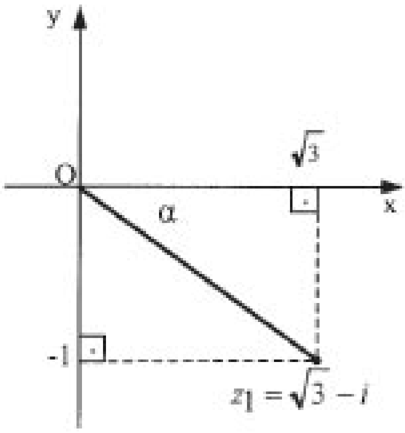
Karmaşık düzlemde görüldüğü üzere, $\cos\frac{11\pi}{6}$ değeri pozitif iken, $\sin\frac{11\pi}{6}$ değeri negatiftir.

x_1Oz_1 üçgeninde x_1Oz_1 açısının ölçüsü α :

$$\alpha = 2\pi-\frac{11\pi}{6}=\frac{12\pi}{6}-\frac{11\pi}{6}=\frac{\pi}{6} \text{ dır.}$$

O halde,

$$\cos\frac{11\pi}{6}=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ dir.}$$
$$\sin\frac{11\pi}{6}=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2} \text{ dir.}$$



Şimdi bulduğumuz $\cos\frac{11\pi}{6}$ ve $\sin\frac{11\pi}{6}$ değerlerini,

$$z_1 = 2\cdot\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)\text{da}$$

yerlerine koyalım:

$$z_1 = 2\cdot\left[\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)i\right]$$
$$=\frac{2\sqrt{3}}{2}-\frac{2}{2}i$$
$$=\sqrt{3}-i \text{ dir.}$$

$z = 2 - 2\sqrt{3}\,i$ karmaşık sayısının karekökleri:

$$z_0 = -\sqrt{3} + i$$
$$z_1 = \sqrt{3} - i \text{ dir.}$$

Bulduğumuz değerlerin doğru olup olmadığını kontrol edelim:

$z = z_0^2$ ve $z = z_1^2$ olmalıdır.

İlk önce, $z = z_0^2$ nin doğru olup olmadığını kontrol edelim:

$z = 2 - 2\sqrt{3}\,i$ ve $z_0 = -\sqrt{3} + i \Rightarrow z = z_0^2$

$$(2 - 2\sqrt{3}\,i) = (-\sqrt{3} + i)^2$$
$$= (-\sqrt{3})^2 + 2 \cdot (-\sqrt{3}) \cdot i + i^2 \qquad \leftarrow ((a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2)$$
$$= 3 - 2\sqrt{3}\,i - 1$$
$$= 2 - 2\sqrt{3}\,i \text{ dir.}$$

O halde, $z = 2 - 2\sqrt{3}\,i$ karmaşık sayısının kareköklerinden biri $z_0 = -\sqrt{3} + i$ dir.

Şimdi $z = z_1^2$ nin doğru olup olmadığını kontrol edelim:

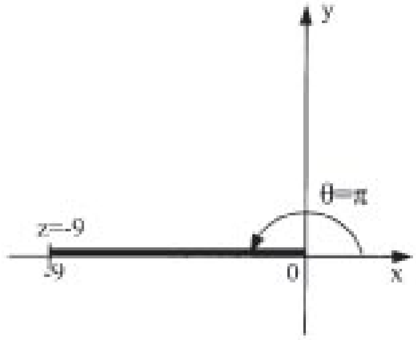
$z = 2 - 2\sqrt{3}\,i$ ve $z_1 = \sqrt{3} - i \Rightarrow z = z_1^2$

$$(2 - 2\sqrt{3}\,i) = (\sqrt{3} - i)^2$$
$$= (\sqrt{3})^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \mathrm{i} + \mathrm{i}^2 \qquad \leftarrow ((a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2)$$
$$= 3 - 2\sqrt{3}\,i - 1$$
$$= 2 - 2\sqrt{3}\,i \text{ dir.}$$

O halde, $z = 2 - 2\sqrt{3}\,i$ karmaşık sayısının kareköklerinden ikincisi $z_1 = \sqrt{3} - i$ dir.

ÖRNEK 31 ⇨ $z=-9$ karmaşık sayısının kareköklerini bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ İlk önce $z=-9$ karmaşık sayısının kutupsal gösterimini bulalım:



z karmaşık sayısının kutupsal gösterimi,

$$z=|z|\cdot(\cos\theta+i\sin\theta)$$

şeklinde olacaktır.

O halde, $|z|$ ve θ değerlerini bulmamız gerekmektedir.

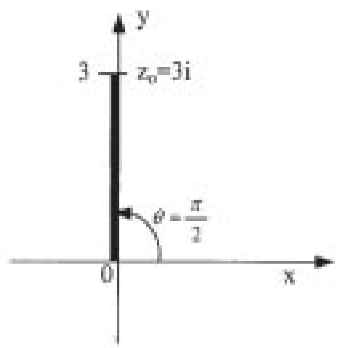
$z=-9+0\cdot i\Rightarrow \mathrm{Re}(z)=x=-9$ ve $\dot{I}m(z)=y=0$ dır.

Karmaşık düzlemde görüldüğü üzere, $\theta=\pi$ dir.

O halde,

$$z=|z|\cdot(\cos\theta+i\sin\theta)\Rightarrow z=9\cdot(\cos\pi+i\sin\pi)$$

$z=-9$ karmaşık sayısının kareköklerinden z_0 ı bulalım:



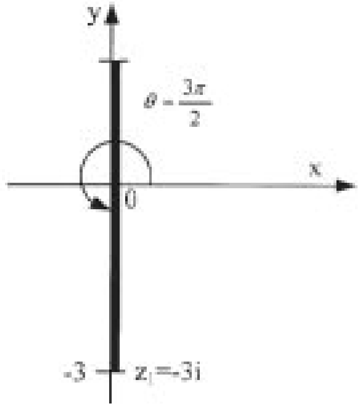
$$z_0=\sqrt{|z|}\cdot\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right) \text{ dir.}$$

O halde,

$$z_0=\sqrt{9}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=3\cdot(0+i\cdot1)$$
$$=3i \text{ dir.}$$

$z=-9$ karmaşık sayısının kareköklerinden z_1 i bulalım:

$$z_1=\sqrt{|z|}\cdot\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)\right] \text{ dir.}$$



O halde,

$$z_1=\sqrt{9}\cdot\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right)\right]$$
$$=3\cdot\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$$
$$=3\cdot[0+i\cdot(-1)]$$
$$=-3i \text{ dir.}$$

$z=-9$ karmaşık sayısının karekökleri:

$$z_0 = 3i$$
$$z_1 = -3i \text{ dir.}$$

ALIŞTIRMA 11 ⇨ $z_0 = 3i$ ve $z_1 = -3i$ karmaşık sayılarının $z=-9$ karmaşık sayısının karekökleri olup olmadığını kontrol ediniz.

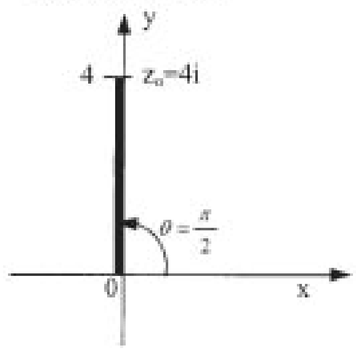
ÖRNEK 32 ⇨ $z = 4i$ karmaşık sayısının kareköklerini bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ z karmaşık sayısının karekökleri:

$$z_0 = \sqrt{|z|}\cdot\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right) \ldots.(*)$$

$$z_1 = \sqrt{|z|}\cdot\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)\right] \text{ dir}\ldots.(**)$$

Yukarıda görüldüğü üzere, $|z|$ ve θ değerlerini bulmamız gerekmektedir.

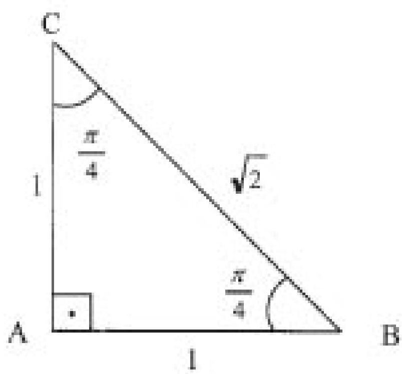


$$z = 0 + 4i \Rightarrow x = 0 \text{ ve } y = 4$$
$$|z| = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow |z| = \sqrt{0^2+4^2}$$
$$\Rightarrow |z| = \sqrt{4^2} = 4$$

Karmaşık düzlemde görüldüğü üzere, $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ dir.

Bulduğumuz değerleri (*) ve (**) da yerlerine koyalım:

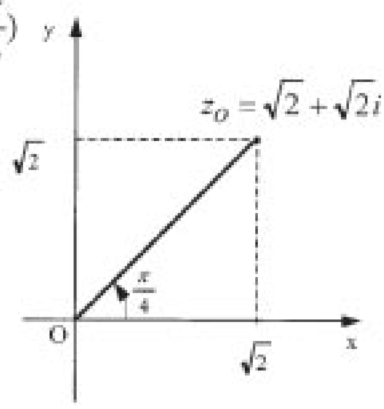
İlk önce, z_0 karmaşık sayısını bulalım:



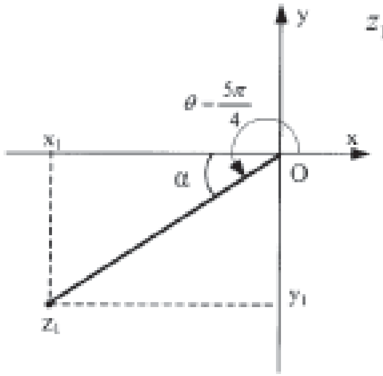
$$\cos\theta = \frac{\text{Komsu D.K.U}}{\textit{HipotenüsU.}}$$

$$\sin\theta = \frac{\text{Karsı D.K.U}}{\textit{HipotenüsU.}}$$

$$z_0 = \sqrt{4}\cdot\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}}{2} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}}{2}\right)$$
$$= 2\cdot(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$$
$$= 2\cdot(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i)$$
$$= 2\cdot(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i})$$
$$= \frac{2\sqrt{2}}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{2}i$$
$$= \sqrt{2} + \sqrt{2}\,\mathrm{i} \text{ dir.}$$



Şimdi, z_1 karmaşık sayısını bulalım:



$$z_1 = \sqrt{4} \cdot \left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{2} + \pi \right) + i \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{2} + \pi \right) \right]$$

$$= 2 \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \pi \right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + \pi \right) \right]$$

$$= 2 \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{4} \right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{4} \right) \right]$$

$$= 2 \cdot \left(\cos\frac{5\pi}{4} + \sin\frac{5\pi}{4} i \right) \ldots (***)$$

$\cos\frac{5\pi}{4}$ ve $\sin\frac{5\pi}{4}$ değerlerini hesaplayalım:

Karmaşık düzlemde görüldüğü üzere $\cos\frac{5\pi}{4}$ ve $\sin\frac{5\pi}{4}$ değerleri negatiftir.

x_1Oz_1 üçgeninde x_1Oz_1 açısının ölçüsü,

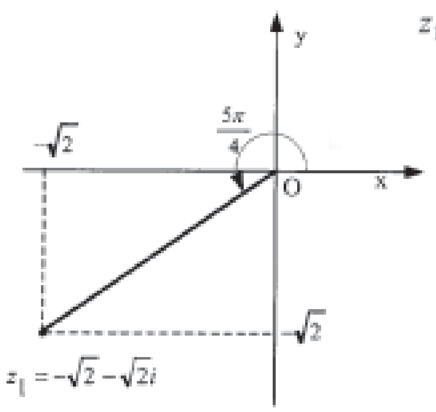
$$\alpha = \frac{5\pi}{4} - \pi = \frac{5\pi}{4} - \frac{4\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \text{ tür.}$$

O halde,

$$\cos\frac{5\pi}{4} = -\cos\left(\frac{\pi}{4} \right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ dir.}$$

$$\sin\frac{5\pi}{4} = -\sin\left(\frac{\pi}{4} \right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ dir.}$$

Şimdi bulduğumuz değerleri (***) da yerlerine koyalım:



$$z_1 = 2 \cdot \left(\cos\frac{5\pi}{4} + i \sin\frac{5\pi}{4} \right)$$

$$= 2 \cdot \left[-\frac{1}{\sqrt{2}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) i \right]$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}} i$$

$$= -\frac{2\sqrt{2}}{2} - \frac{2\sqrt{2}}{2} i$$

$$= -\sqrt{2} - \sqrt{2}\, i \text{ dir.}$$

$z_0 = \sqrt{2} + \sqrt{2}\, i$ ve $z_1 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\, i$ karmaşık sayılarının $z = 4i$ karmaşık sayısının karekökleri olup olmadığını kontrol ediniz.

ALIŞTIRMA 12 ⇨ Aşağıda verilen karmaşık sayıların kareköklerini bulunuz.

(A) $z = 3$ (B) $z = 6i$ (C) $z = 2\cdot(\cos 120° + i\sin 120°)$
(D) $z = 5\cdot(\cos 46° + i\sin 46°)$

(Not: Kosinüs ve sinüs değerlerini bulmak için trigonometrik tablodan yararlanınız.)

r negatif bir gerçek sayı ise $\sqrt{r} = i\sqrt{-r}$ dir.

ÖRNEK 33 ⇨ $\sqrt{-1}$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ Yukarıda verdiğimiz tanıma göre,

$$\sqrt{-1} = i\sqrt{-(-1)} = i\sqrt{1} = i \text{ dir.}$$

Tanım kullanmadan da bu sonucu bulabiliriz. $i^2 = -1$ olduğunu biliyoruz. O halde,

$$\sqrt{-1} = \sqrt{i^2} = (i^2)^{1/2} = i^{2/2} = i^1 = i = 0 + i \quad \text{dir.}$$

ÖRNEK 34 ⇨ Aşağıdaki karmaşık sayıları $z = x + yi$ biçiminde yazınız.

A) $\sqrt{-64}$ B) $\sqrt{(-2i)^2}$ C) $\sqrt{-25}\cdot\sqrt{-9}$

ÇÖZÜM ⇨ A) $\sqrt{-64} = i\sqrt{-(-64)} = i\sqrt{64} = i\cdot 8 = 0 + 8i$ dir.

veya

$$\sqrt{-64} = \sqrt{i^2\cdot 64} = \sqrt{i^2\cdot 8^2} = (i^2\cdot 8^2)^{1/2} = i^{2/2}\cdot 8^{2/2} = 8i = 0 + 8i \text{ dir.}$$

$\leftarrow ((a^n\cdot b^n)^{1/n} = a^{n/n}\cdot b^{n/n}) = a^1\cdot b^1 = ab)$

B) $\sqrt{(-2i)^2} = \sqrt{4i^2} = \sqrt{-4} = i\sqrt{-(-4)} = \sqrt{4} = 2i = 0 + 2i$ dir.

veya

$$\sqrt{(-2i)^2} = \sqrt{4i^2} = \sqrt{2^2\cdot i^2} = 2i = 0 + 2i \text{ dir.}$$

C) $\sqrt{-25}\cdot\sqrt{-9} = ?$

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{-25} &= i\sqrt{25} = 5i\\ \sqrt{-9} &= i\sqrt{9} = 3i\end{aligned}\right\} \Rightarrow \sqrt{-25}\cdot\sqrt{-9} = 5i\cdot 3i = 15i^2 = 15\cdot(-1) = -15$$

$$= -15 + 0i \text{ dir.}$$

ALIŞTIRMA 13 ⇨ Aşağıdaki karmaşık sayıları $z = x + yi$ şeklinde yazınız.

A) $\sqrt{-16} + \sqrt{-64}$ B) $\sqrt{\dfrac{-1}{9}}$

C) $\sqrt{-8} \cdot \sqrt{8}$ D) $\sqrt{-25} - \sqrt{-100}$

Küpkök

> **Küpkök**
>
> $z,\ u \in C$ ve $u^3 = z$ ise, u sayısına, z nin **küpkökü** denir. Buna göre, z nin küpkökleri u_0, u_1 ve u_2 dir.
>
> $z = |z| \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)$ karmaşık sayısının küpkökleri z_0, z_1 ve z_2 ile gösterilirse,
>
> $$z_0 = \sqrt[3]{|z|} \cdot (\cos\frac{\theta}{3} + i\sin\frac{\theta}{3})$$
> $$z_1 = \sqrt[3]{|z|} \cdot \left[\cos(\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3})\right]$$
> $$z_2 = \sqrt[3]{|z|} \cdot \left[\cos(\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}) + i\sin(\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3})\right] \text{ olur.}$$

$z = |z| \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)$, $u = |u| \cdot (\cos\alpha + i\sin\alpha)$ olsun.

$$u^3 = z$$

$$\left[\,|u| \cdot (\cos\alpha + i\sin\alpha)\right]^3 = |z| \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$|u|^3 \cdot (\cos 3\alpha + i\sin 3\alpha) = |z| \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)$$ ←(De Moivre Formülü)

O halde, $|u|^3 = z \Rightarrow |u| = \sqrt[3]{|z|}$

$$3\alpha = \theta + k \cdot 2\pi \Rightarrow \alpha = \frac{\theta}{3} + k \cdot \frac{2\pi}{3} \text{ olur.}$$

z nin küpkökleri,

$k = 0$ için $\alpha = \dfrac{\theta}{3}$ olduğundan,

$$u_0 = \sqrt[3]{|z|} \cdot (\cos\frac{\theta}{3} + i\sin\frac{\theta}{3}) \text{ tür.}$$

$k = 1$ için $\alpha = \dfrac{\theta}{3} + \dfrac{2\pi}{3}$ olduğundan,

$$u_1 = \sqrt[3]{|z|} \cdot \left[\cos\left(\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)\right] \text{ tür.}$$

$k = 2$ için $\alpha = \dfrac{\theta}{3} + \dfrac{2 \cdot 2\pi}{3} = \dfrac{\theta}{3} + \dfrac{4\pi}{3}$ olduğundan,

$$u_2 = \sqrt[3]{|z|} \cdot \left[\cos\left(\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}\right)\right] \text{ tür.}$$

$k = 3$ için $\alpha = \dfrac{\theta}{3} + \dfrac{3 \cdot 2\pi}{3} = \dfrac{\theta}{3} + 2\pi$ olduğundan,

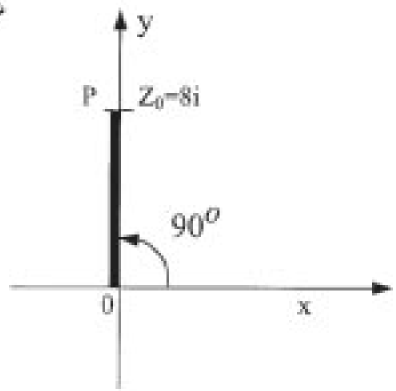
$$u_3 = \sqrt[3]{|z|} \cdot \left[\cos\left(\frac{\theta}{3} + 2\pi\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{3} + 2\pi\right)\right] \text{ tür.}$$

$\cos(\dfrac{\theta}{3} + 2\pi) = \cos\dfrac{\theta}{3}$; $\sin(\dfrac{\theta}{3} + 2\pi) = \sin\dfrac{\theta}{3}$ olduğundan

$k = 3$ için bulunan kök, u_0 ile aynı olur. $k \geq 3$ değerleri için bulunan kökler de u_0, u_1 ve u_2 köklerinden birine eşit olmaktadır.

ÖRNEK 35 ⇒ $z = 8i$ sayısının küpköklerini bulunuz.

ÇÖZÜM ⇒



$z = 8i$ karmaşık sayısının görüntüsü P olsun. Büyüklüğü 8 ve argümenti 90° olduğundan $z = 8 \cdot \text{cis}\,90^\circ$ dir.

Verilen karmaşık sayının küp köklerini,

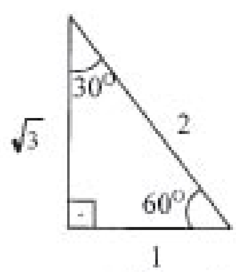
$$u = \sqrt[3]{r} \cdot \text{cis}\left(\frac{\theta + k \cdot 360^\circ}{3}\right), \quad k \in \{0, 1, 2\}$$

den yararlanarak bulacağız.

$r = 8$, $\theta = 90^\circ$ ise $u = \sqrt[3]{8} \cdot \text{cis}\left(\dfrac{90^\circ + k \cdot 360^\circ}{3}\right)$, $k \in \{0, 1, 2\}$ dir.

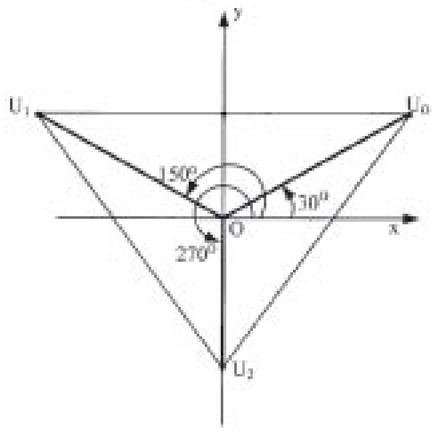
$k = 0$ *için,*

$$u_0 = \sqrt[3]{8} \cdot \text{cis} \cdot \left(\frac{90^\circ}{3}\right)$$
$$= \sqrt[3]{8} \cdot \left(\cos\frac{90^\circ}{3} + i\sin\frac{90^\circ}{3}\right)$$
$$= 2 \cdot (\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)$$
$$= 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} + 1\,i \text{ dir.}$$



$$\cos\theta = \frac{\text{Komsu D.K.U}}{\textit{HipotenüsU.}}$$

$$\sin\theta = \frac{\text{Karsı D.K.U}}{\textit{HipotenüsU.}}$$



k=1 için,

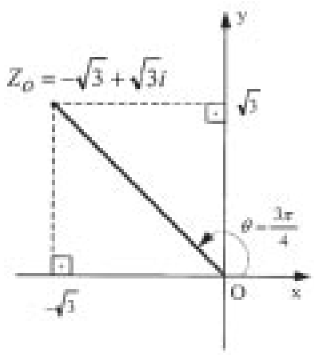
$$u_1 = 2\cdot \text{cis}\left(\frac{90^\circ + 360^\circ}{3}\right)$$
$$= 2\cdot \text{cis}150^\circ$$
$$= 2\cdot(\cos 150^\circ + i\sin 150^\circ)$$
$$= 2\cdot\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$$
$$= -\sqrt{3} + i \text{ dir.}$$

$k = 2$ *için,*

$$u_2 = 2\cdot \text{cis}\left(\frac{90^\circ + 2\cdot 360^\circ}{3}\right)$$
$$= 2\cdot(\cos 270^\circ + i\sin 270^\circ)$$
$$= 2\cdot\left[0 + i\cdot(-1)\right] = -2i \text{ dir.}$$

ÖRNEK 36 ⇨ $z = -\sqrt{3} + \sqrt{3}\,i$ sayısının küpköklerini bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ z karmaşık sayısının küpkökleri:



$$z_0 = \sqrt[3]{|z|}\cdot(\cos\frac{\theta}{3} + i\sin\frac{\theta}{3})$$
$$z_1 = \sqrt[3]{|z|}\cdot[\cos(\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3})]$$
$$z_2 = \sqrt[3]{|z|}\cdot[\cos(\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}) + i\sin(\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3})] \text{ tür.}$$

Yukarıda görüldüğü üzere, $|z|$ ve θ değerlerini bulmamız gerekmektedir.

$$z = -\sqrt{3} + \sqrt{3}\,i \Rightarrow \text{Re}(z) = x = -\sqrt{3} \text{ ve } \dot{I}m(z) = y = \sqrt{3}$$

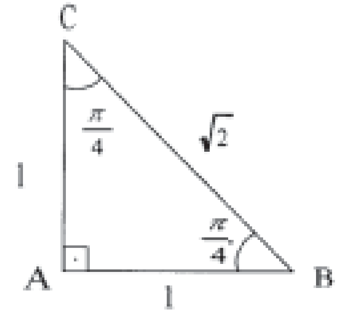
$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow |z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{3+3} = \sqrt{6} = 6^{1/2}$$

Karmaşık düzlemde görüldüğü üzere, z karmaşık sayısı II. bölgededir. (Not: $\text{Re}(z) < 0$ ve $\dot{I}m(z) > 0$)

O halde, $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$ dir…(*)

$\tan\theta = \dfrac{y}{x} = \dfrac{\sqrt{3}}{-\sqrt{3}} = -1$ dir…(**)

(*) ve (**) den dolayı, $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$ tür.

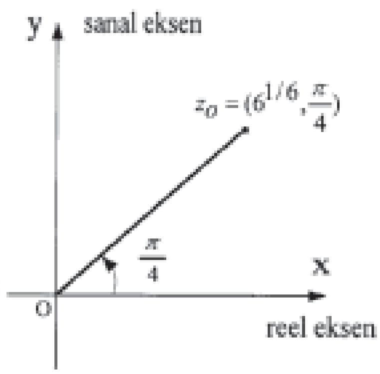


$\tan\theta = \dfrac{\text{Karsı D.K.U}}{\textit{Komsu}\text{ D.K.U}}$

z_0 küpkökünü bulalım:

$\tan\dfrac{\pi}{4} = 1$

$$z_0 = \sqrt[3]{6^{1/2}} \cdot \left[\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{4}}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{3\pi}{4}}{3}\right)\right] = (6^{1/2})^{1/3} \cdot (\cos\frac{3\pi}{12} + i\sin\frac{3\pi}{12})$$



$$= 6^{\frac{1}{2}\frac{1}{3}} \cdot (\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$$

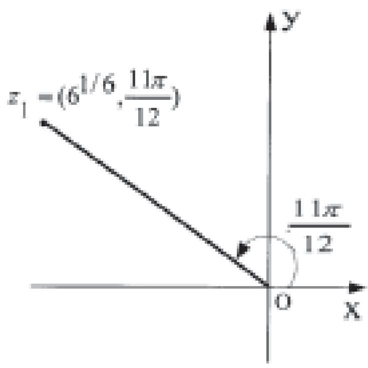
$$= 6^{1/6} \cdot (\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$$

$$= 6^{1/6} \cdot cis\frac{\pi}{4} \text{ tür.}$$

z_1 küpkökünü bulalım:

$$z_1 = \sqrt[3]{|z|} \cdot [\cos(\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3})]$$

$$= \sqrt[3]{6^{1/2}} \cdot [\cos(\frac{3\pi}{12} + \underset{(4)}{\frac{2\pi}{3}}) + i\sin(\frac{3\pi}{12} + \underset{(4)}{\frac{2\pi}{3}})]$$

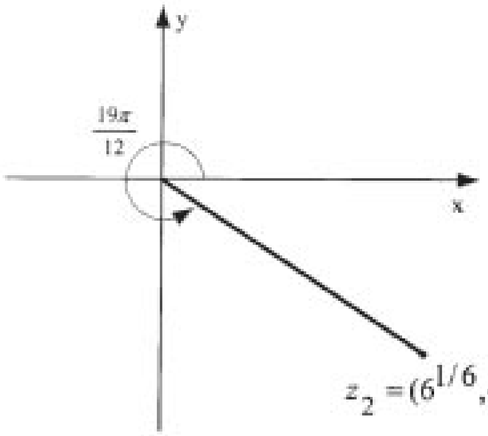


$$= 6^{\frac{1}{2}\frac{1}{3}} \cdot [\cos(\frac{3\pi}{12} + \frac{8\pi}{12}) + i\sin(\frac{3\pi}{12} + \frac{8\pi}{12})]$$

$$= 6^{1/6} \cdot (\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12})$$

$$= 6^{1/6} \cdot cis\frac{11\pi}{12} \text{ dir.}$$

z_2 küpkökünü bulalım:

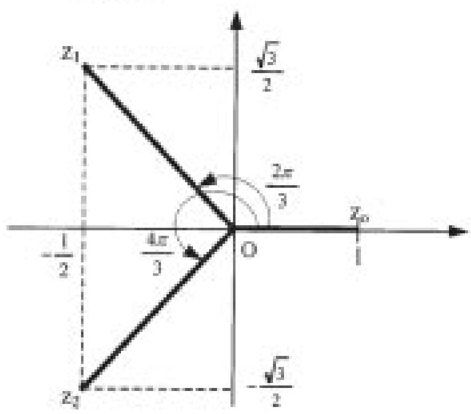


$$= \sqrt[3]{|z|} \cdot [\cos(\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}) + i\sin(\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3})]$$
$$= \sqrt[3]{6^{1/2}} \cdot [\cos(\frac{3\pi}{12} + \underset{(4)}{\frac{4\pi}{3}}) + i\sin(\frac{3\pi}{12} + \underset{(4)}{\frac{4\pi}{3}})]$$
$$= 6^{\frac{1}{2}\frac{1}{3}} \cdot [\cos(\frac{3\pi}{12} + \frac{16\pi}{12}) + i\sin(\frac{3\pi}{12} + \frac{16\pi}{12})]$$
$$= 6^{1/6} \cdot (\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12})$$
$$= 6^{1/6} \cdot cis\frac{19\pi}{12} \text{ dir.}$$

ÖRNEK 37 ➾ $z^3 = 1$ denklemini çözünüz.

ÇÖZÜM ➾ Yukarıda verilen soruyu iki farklı yolla çözeceğiz.

I. Yol:



$z^3 = 1$ ise $z = 1^{1/3}$

$1 = 1 \cdot cis0$ olduğundan,

$$1^{1/3} = (cis0)^{1/3}$$
$$= cis\left(\frac{0 + k \cdot 2\pi}{3}\right)$$
$$= cis\left(\frac{k \cdot 2\pi}{3}\right),\ k \in \{0, 1, 2\} \text{ dir.}$$

$k = 0$ *için,*

$$z_0 = cis\left(\frac{0 \cdot 2\pi}{3}\right) = cis\,0 = 1 \text{ dir.}$$

$k = 1$ *için,*

$$z_1 = cis\left(\frac{1 \cdot 2\pi}{3}\right) = cis\frac{2\pi}{3} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ dir.}$$

$k = 2$ *için,*

$$z_2 = cis\left(\frac{2 \cdot 2\pi}{3}\right) = cis\frac{4\pi}{3} = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ dir.}$$

O halde, $z^3 = 1$ denkleminin karmaşık sayılar kümesinde z_0, z_1 ve z_2 gibi üç tane kökü vardır.

II. Yol:

$$z = |z| \cdot (\cos\theta + i\sin\theta) = |z| \cdot cis\theta$$

$$z_0 = |z|^{1/3} \cdot cis\frac{\theta}{3}$$

$$z_1 = |z|^{1/3} \cdot cis(\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3})$$

$$z_2 = |z|^{1/3} \cdot cis(\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3})$$

z_0, z_1 ve z_2 değerlerini hesaplayınız.

ALIŞTIRMA 14 ⇨ $z = 27i$ sayısının küpköklerini bulunuz.

$z = x + yi$ Karmaşık Sayısının Köklerini Bulmak İçin Genel Kural

Önce karmaşık sayıyı $z = |z| \cdot cis(\theta + 2k\pi)$ kutupsal biçiminde yazalım.

z sayısının n. kökleri w ise $w = \sqrt[n]{|z|} = |z|^{\frac{1}{n}}$ demektir. z nin değeri yerine yazılırsa,

$$w = |z|^{\frac{1}{n}} \cdot [cis(\theta + k \cdot 2\pi)]^{\frac{1}{n}}$$

$$w = |z|^{\frac{1}{n}} \cdot cis\left[\frac{1}{n} \cdot (\theta + k \cdot 2\pi)\right]$$

$$w = \sqrt[n]{|z|} \cdot cis\frac{\theta + k \cdot 2\pi}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1) \text{ elde edilir.}$$

Uyarı: Mutlak değeri r, argümenti θ olan bir karmaşık sayının n tane kökü vardır. Bunların mutlak değerleri $\sqrt[n]{|z|}$ ve bir tanesinin argümenti $\frac{\theta}{n}$ dir. Öteki kökler $\frac{\theta}{n}$ ye, $\frac{2\pi}{n} = \frac{360°}{n}$ nin tam katları eklenerek bulunur. Bu köklerin görüntüleri, ağırlık merkezi başlangıç noktasında olan n kenarlı bir düzgün çokgenin köşeleridir.

ÖRNEK 38 ⇨ $z=4\cdot(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$ sayısının kareköklerini bulalım:

ÇÖZÜM ⇨ $z^{1/n}=|z|^{\frac{1}{n}}\cdot[\cos(\frac{\theta+k\cdot 2\pi}{n})+i\sin(\frac{\theta+k\cdot 2\pi}{n})],\ k\in\{0,1,....,n-1\}$ dir.

$z^{1/n}=|z|^{\frac{1}{n}}\cdot[\cos(\frac{\theta}{n}+\frac{k\cdot 2\pi}{n})+i\sin(\frac{\theta}{n}+\frac{k\cdot 2\pi}{n})],\ k\in\{0,1,....,n-1\}$ dir.

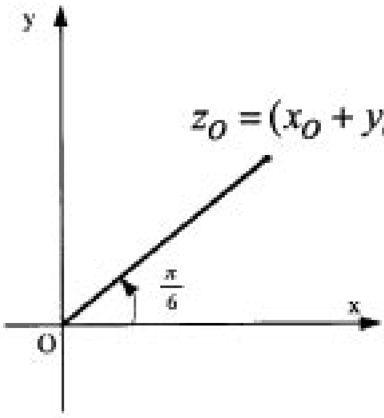
$z=4\cdot(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})\Rightarrow|z|=4$ ve $\theta=\frac{\pi}{3}$ tür.

z karmaşık sayısının karekökleri olan z_0 ve z_1 karmaşık sayılarını bulacağız.

$$z^{\frac{1}{2}}=4^{1/2}\cdot\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{3}}{2}+\frac{k\cdot 2\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{3}}{2}+\frac{k\cdot 2\pi}{2}\right)\right],\ k\in\{0,1\} \text{ dir.}$$

$k=0$ için,

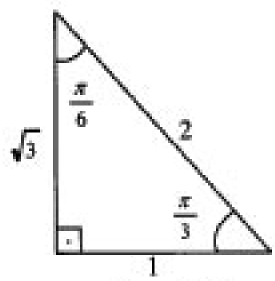
$$z_0=4^{1/2}\cdot(\cos\frac{\pi}{6}+\frac{0\cdot 2\pi}{2})+i\sin(\frac{\pi}{6}+\frac{0\cdot 2\pi}{2})]$$



$$=2\cdot(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$$

$$=2\cdot(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)$$

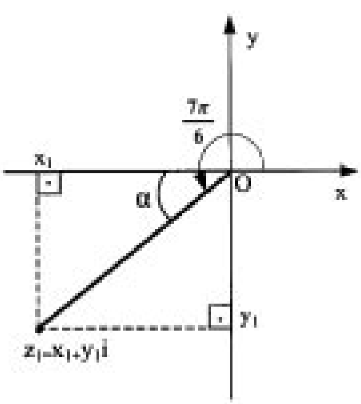
$$=\sqrt{3}+i \text{ dir.}$$



$\cos\theta=\frac{\text{Komsu D.K.U}}{\text{HipotenüsU.}}$

$\sin\theta=\frac{\text{Karsı D.K.U}}{\text{HipotenüsU.}}$

$k=1$ *için,*



$$z_1=4^{1/2}\cdot[\cos(\frac{\pi}{6}+\frac{1\cdot 2\pi}{2})+i\sin(\frac{\pi}{6}+\frac{1\cdot 2\pi}{2})]$$

$$=2\cdot[\cos(\frac{\pi}{6}+\pi)+i\sin(\frac{\pi}{6}+\pi)]$$

$$=2\cdot[\cos(\frac{\pi}{6}+\frac{6\pi}{6})+i\sin(\frac{\pi}{6}+\frac{6\pi}{6})]$$

$$=2\cdot(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6})$$

$\cos\frac{7\pi}{6}$ ve $\sin\frac{7\pi}{6}$ değerlerini hesaplayalım:

Karmaşık düzlemde görüldüğü üzere $\cos\frac{7\pi}{6}$ ve $\sin\frac{7\pi}{6}$ değerleri negatiftir.

x_1Oz_1 üçgeninde x_1Oz_1 açısının ölçüsü α,

$$\alpha = \frac{7\pi}{6} - \pi = \frac{\pi}{6} \text{ dır.}$$

O halde,

$$\cos\frac{7\pi}{6} = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ dir.}$$

$$\sin\frac{7\pi}{6} = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} \text{ dir.}$$

Şimdi bulduğumuz $\cos\frac{7\pi}{6}$ ve $\sin\frac{7\pi}{6}$ değerlerini,

$$z_1 = 2\cdot(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6})$$

da yerlerine koyalım:

$$z_1 = 2\cdot[-\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)i]$$

$$= -\frac{2\sqrt{3}}{2} - \frac{2}{2}i$$

$$= -\sqrt{3} - i \text{ dir.}$$

ARAŞTIRMALAR

1) $\dfrac{2+2i}{\sqrt{5}-5i}$ sayısının kutupsal biçimi nedir?

2) $z = r\cdot cis\theta$ ise $\dfrac{1}{\overline{z}}$ neye eşittir?

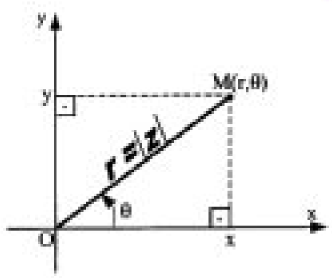
3) $z = 4+4i$ karmaşık sayısının esas argümenti θ ise $\sin 2\theta$ nın değeri nedir?

4) z karmaşık sayısının kareköklerinin görüntüleri arasındaki ilişkiyi açıklayınız.

5) z karmaşık sayısının küpköklerinin görüntülerini karmaşık düzlemde belirttikten sonra bu noktaları birleştirdiğimiz zaman elde ettiğiniz geometrik şeklin ne olduğunu nedenleriyle birlikte yazınız.

6) $z^4 = 81\cdot \text{cis}\,240^\circ$ ise z_0, z_1, z_2 ve z_3 sayılarını bulunuz ve geometrik olarak yorumlayınız.

BÖLÜMÜN ÖZETİ



$z = x + yi$ karmaşık sayısının, karmaşık düzlemdeki görüntüsü M(r,θ) noktasıdır.

OM ile Ox ekseninin oluşturduğu **açının ölçüsü** θ olsun.

z karmaşık sayısının, $z = |z|\cdot(\cos\theta + i\sin\theta) = r\cdot(\cos\theta + i\sin\theta)$ biçiminde ifade edilmesine karmaşık sayının **kutupsal (trigonometrik) gösterimi** denir.

Yukarıda ifade edilen eşitlikleri sağlayan θ reel sayısına z nin argümenti denir ve $\arg(z) = \theta$ biçiminde gösterilir. $0 \le \theta < 2\pi$ ise θ ya karmaşık sayının **esas argümenti** denir.

Karmaşık sayının mutlak değer ve argümentinden oluşan ikiliye bu sayının **kutupsal koordinatları** denir ve $\left(|z|, \theta\right) = (r, \theta)$ biçiminde gösterilir.

$z = |z|\cdot(\cos\theta + i\sin\theta)$ sayısı, $z = |z|\cdot cis\theta$ biçiminde de yazılabilir.

$0 \le \theta < 2\pi$ ise z karmaşık sayısının kutupsal biçimde genel yazılışı $z = |z|\cdot[\cos(\theta + k\cdot 2\pi) + i\sin(\theta + k\cdot 2\pi)]$ olur. $(k \in Z)$

Kutupsal Biçimde Yazılışlara Göre İşlemler:

$z_1 = |z_1| \cdot (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ ve $z_2 = |z_2| \cdot (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ olsun.

$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$

$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} \cdot [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$ dir.

De Moivre Formülü:

$z = |z| \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)$ olduğuna göre, $\forall m \in Z$ için,

$z^m = |z|^m \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)^m = |z|^m \cdot (\cos m\theta + i\sin m\theta)$ dır.

Karmaşık Sayıların Karekökü:

$z = |z| \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)$ karmaşık sayısının karekökleri z_0, z_1 ise,

$z_0 = \sqrt{|z|} \cdot (\cos\dfrac{\theta}{2} + i\sin\dfrac{\theta}{2})$

$z_1 = \sqrt{|z|} \cdot [\cos\dfrac{\theta}{2} + \pi) + i\sin(\dfrac{\theta}{2} + \pi)]$ dir.

Karmaşık Sayıların Küpkökü:

$z = |z| \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)$ karmaşık sayısının küpkökleri z_0, z_1, z_2 ise,

$$z_0 = \sqrt[3]{|z|} \cdot (\cos\frac{\theta}{3} + i\sin\frac{\theta}{3})$$

$$z_1 = \sqrt[3]{|z|} \cdot [\cos\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3})]$$

$$z_2 = \sqrt[3]{|z|} \cdot [\cos\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}) + i\sin(\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3})]$$ olur.

DEĞERLENDİRME SORULARI

1) $z = 3 + 3i$ sayısının kutupsal koordinatlarını yazınız.

A) $(3\sqrt{2}, 3\pi)$ B) $(3\sqrt{2}, 2\pi)$ C) $(3\sqrt{2}, \frac{\pi}{3})$

D) $(3\sqrt{2}, \frac{\pi}{6})$ E) $(3\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$

2) Kutupsal koordinatları $(4, \frac{\pi}{3})$ olan karmaşık sayının kartezyen koordinatları aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ B) $(1, \frac{1}{2})$ C) $(2, 2\sqrt{3})$

D) $(2, \frac{\sqrt{3}}{2})$ E) $(1, \frac{1}{2})$

3) $z = 2 + 2\sqrt{3}\,i$ karmaşık sayısının genel kutupsal gösterimi nedir?

A) $z = 2 \cdot \left[\cos(\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi) + i\sin(\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi) \right]$

B) $z = 2 \cdot \left[\cos(\frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi) + i\sin(\frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi) \right]$

C) $z = 4 \cdot \left[\cos(\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi) + i\sin(\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi) \right]$

D) $z = 4 \cdot \left[\cos(\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi) + i\sin(\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi) \right]$

E) $z = 4 \cdot \left[\cos(\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi) + i\sin(\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi) \right]$

4) $z = -2$ karmaşık sayısının kutupsal biçimde gösterimi nedir?

A) $z = 2 \cdot (\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$ B) $z = 2 \cdot (\cos\pi + i\sin\pi)$

C) $z = 2 \cdot (\cos 0 + i\sin 0)$ D) $z = 2 \cdot (\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$

E) $z = 2 \cdot (\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})$

5) Kutupsal koordinatları $(8, \frac{\pi}{3})$ olan karmaşık sayı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2 + i$ D) $-1 + i$ C) $1 + \sqrt{3}\,i$ D) $4 + 4\sqrt{3}\,i$ E) $1 + 2i$

6) $z = 2 \cdot (\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})$ karmaşık sayısının esas argümenti nedir?

A) 2 B) $\frac{7\pi}{4}$ C) $\frac{\pi}{4}$ D) $\cos\frac{7\pi}{4}$ E) $\sin\frac{7\pi}{4}$

7) Kutupsal biçimde verilen $z = 8 \cdot (\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})$ karmaşık sayısının $x + yi$ biçiminde (standart biçimde) yazılışı nedir?

A) $-4\sqrt{3} + 4i$ B) $8 + 2i$ C) $-2\sqrt{3} + 2i$

D) $\sqrt{3} + 4i$ E) $4\sqrt{3} + 4i$

8) $z_1 = 3 \cdot (\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$ ve $z_2 = 4 \cdot (\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$ olduğuna göre $z_1 \cdot z_2$ çarpımının $z = x + yi$ biçiminde yazılışı nedir?

A) $-\sqrt{3} + 6i$ B) $6\sqrt{3} + 6i$ C) $-6\sqrt{3} + 6i$

D) $\sqrt{3} + i$ E) $-\sqrt{3} - i$

9) $\sqrt{-3}\cdot\sqrt{-20}$ karmaşık sayısının $x+yi$ biçiminde yazılışı nedir?

A) $\sqrt{3}+20i$ B) $\sqrt{-3}-\sqrt{20}\,i$ C) $-3-20i$

D) $-2\sqrt{15}+0i$ E) $\sqrt{15}+2i$

10) $z_1=2\cdot(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4})$ ve $z_2=4\cdot(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$ olduğuna göre $\frac{z_1}{z_2}$ bölümünün $z=x+yi$ biçiminde yazılışı nedir?

A) $1+i$ B) 1 C) -1 D) i E) $-\frac{1}{2}$

11) $z_1=24\cdot(\cos 54^\circ+i\sin 54^\circ)$ ve $z_2=8\cdot(\cos 24^\circ+i\sin 24^\circ)$ karmaşık sayılarının $\frac{z_1}{z_2}$ bölümü nedir?

A) $\sqrt{3}+i$ B) $\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$ C) $3\sqrt{3}-i$

D) $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ E) $3\sqrt{3}i$

12) $z=-2+2\sqrt{3}\,i$ karmaşık sayısının kareköklerinden biri nedir?

A) $1+\sqrt{2}\,i$ B) $1+\sqrt{3}\,i$ C) $1-\sqrt{3}\,i$

D) $-2-2\sqrt{3}\,i$ E) $2-\sqrt{3}\,i$

13) $z=9i$ sayısının kareköklerinden biri nedir?

A) $\frac{3}{\sqrt{2}}$ B) $\frac{3}{\sqrt{2}}(-1+i)$ C) $\frac{3}{\sqrt{2}}(1-i)$

D) $\frac{-3}{\sqrt{2}}(1+i)$ E) $\frac{-3}{\sqrt{2}}(1-i)$

14) $z=16\cdot(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)$ karmaşık sayısının kareköklerinden biri nedir?

A) $-2\sqrt{3}-2i$ B) $\sqrt{3}-2i$ C) $\sqrt{3}+2i$ D) $2i$ E) $2\sqrt{3}$