ÖRNEKLER

1. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}$ ifadesini hesaplayınız.

Çözüm :

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = \text{Arctan } x \Big|_0^1 \quad \text{Arc tan } 1 - \text{Arc tan } 0$$

$$= \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

2. $\int_{-\pi}^{\pi} \text{Cos}^2 x dx$ ifadesini hesaplayınız.

Çözüm :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{Cos}^2 x dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} (1+\text{Cos}2x)dx = \frac{1}{2} (x+\frac{1}{2} \text{Sin}2x) \Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2}\left[(\pi+\frac{1}{2} \text{Sin}2\pi) - (-\pi+\frac{1}{2} \text{Sin}(-2\pi)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[(\pi) + \pi\right] = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

3. $\int_0^{\pi/2} \text{Sin}^2 x \, dx$ ifadesini hesaplayınız.

Çözüm :

$$\int_0^{\pi/2} \text{Sin}^2 x \, dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} (1-\text{Cos}2x) \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1-\text{Cos}2x)dx = \frac{1}{2} (x- \frac{\text{Sin}2x}{2} \Big|_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[(\frac{\pi}{2} - \frac{\text{Sin}\pi}{2}) - (0 - \frac{\text{Sin}0}{2})\right] = \frac{1}{2} (\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{4}$$

4. $\int x(x^2+1)^4dx$ ifadesini hesaplayınız.

Çözüm :

$t = x^2+1$

$dt = 2xdx$

$dx = \frac{dt}{2x}$

$$\int x(x^2+1)^4dx = \int x.\, t^4 \frac{dt}{2x} = \frac{1}{2}\int t^4\, dt = \frac{1}{2}.\frac{1}{5}t^5+c$$

$$= \frac{1}{10}(x^2+1)^5+c'$$

5. $\int (x+1)\ (x^2+2x-1)^4$ ifadesini hesaplayınız.

Çözüm :

$t = x^2+2x-1$

$dt = (2x+2)dx$

$dx = \frac{dt}{2x+2}$

$$\int (x+1)\ (x^2+2x-1)^4dx = \int (x+1)\, t^4 . \frac{dt}{2x+2}$$

$$= \int (x+1)\, t^4 . \frac{dt}{2(x+1)}$$

$$= \frac{1}{2}\int t^4\, dt = \frac{1}{2}.\frac{1}{5}t^5+c'$$

$$= \frac{1}{10}t^5+c'$$

$$= \frac{1}{10}(x^2+2x-1)^5+c'$$

6. $\int_1^e \frac{\sqrt{1nx}}{x}\, dx$ ifadesini hesaplayınız

Çözüm :

$t = \ell nx$

$dt = \frac{1}{x}dx$

$dx = xdt$

$$\int \frac{\sqrt{\ell nx}}{x}dx = \int \frac{\sqrt{t}}{x}.\, x\, dt = \int \sqrt{t}\, dt = \int t^{1/2}\, dt = \frac{2}{3}t^{3/2}+c' \qquad \frac{2}{3}\sqrt{t^3}+c'$$

$$\int_1^e \sqrt{\frac{\ell nx}{x}}\, dx = \frac{2}{3}\sqrt{(\ell nx)^3}\Big|_1^e = \frac{2}{3}$$

7. $\displaystyle\int \frac{\text{Cos}^2 y}{1\text{-Siny}}\, dy$ ifadesini hesaplayınız.

Çözüm :

$$\int \frac{\text{Cos}^2 y}{1\text{-Siny}}\, dy = \int \frac{1\text{-Sin}^2 y}{1\text{-Siny}} = \int \frac{(1\text{-Siny})\ (1\text{+Siny})}{1\text{-Siny}}\, dy = \int (1\text{+Siny})\ dy$$

$$= y - \text{Cosy} + c$$

8. $\displaystyle\int \text{Cos}\,\frac{1}{2}\,x\ dx$ ifadesini hesaplayınız.

Çözüm :

$t = \frac{1}{2}x$

$dt = \frac{1}{2}dx$

$2dt = dx$

$$\int \text{Cos}\,\frac{1}{2}\,x\ dx = \int (\text{Cos}\ t)\ (2\ dt) = 2\int \text{Cos}\ t\ dt = 2\ \text{Sin}\ t + c'$$

$= 2\ \text{Sin}\,\frac{1}{2}\,x + c'$

9. $\displaystyle\int e^x \,.\, \text{Sine}^x$ ifadesini hesaplayınız.

Çözüm :

$t = e^x$

$dt = e^x\, dx$

$dx = \frac{dt}{e^x}$

$$\int e^x \,.\, \text{Sine}^x\, dx = \int e^x\, \text{Sint}\,.\,\frac{dt}{e^x} = \int \text{Sint}\ dt = -\ \text{Cost} + c'$$

$= -\ \text{Cos}\ e^x + c'$

10. $\int x.\,(x+1)^2\,dx$ ifadesini hesaplayınız.

Çözüm :

$u = x$	$dv = (x+1)^2\,dx$
$du = dx$	$v = \frac{1}{3}(x+1)^3$
Kısmi integrasyon	
$uv - \int vdu$	

$$\int x.\,(x+1)^2\,dx = x.\,\frac{1}{3}(x+1)^3 - \int \frac{1}{3}(x+1)^3\,dx$$

$$= \frac{x(x+1)^3}{3} - \frac{1}{3}\int (x+1)^3\,dx$$

$$= \frac{x(x+1)^3}{3} - \frac{1}{12}(x+1)^4 + c'$$

11. $\int \frac{xdx}{x^2-5x+4}$ ifadesini hesaplayınız.

Çözüm :

$$\frac{x}{x^2-5x+4} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-4)}$$

$Ax - 4A + Bx - B$

$x = (A+B)\,x - 4A - B$

$A+B = 1$ $\qquad$ $-\frac{1}{3} + B = 1$

$-4A - B = 0$ $\qquad$ $B = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

$-3A = 1$

$A = -\frac{1}{3}$

$$\int \frac{x}{x^2-5x+4}\,dx = \int \frac{-\frac{1}{3}}{x-1}\,dx + \int \frac{\frac{4}{3}}{x-4}\,dx$$

$$= -\frac{1}{3}\ln|x-1| + \frac{4}{3}\ln|x-4| + c'$$

12. $\displaystyle\int \frac{dt}{9t^2-16}$ ifadesini hesaplayınız.

Çözüm :

$$\int \frac{dt}{9t^2-16} = \int \frac{dt}{(3t)^2-4^2} = \frac{1}{8}\ln\left|\frac{3t-4}{3t+4}\right| + c'$$

13. $\displaystyle\int \frac{4e^x}{e^{2x}-3e^x+2}$ ifadesini hesaplayınız.

Çözüm :

$e^x = u$ dersek. $e^x dx = du$

$$\int \frac{4e^x\,dx}{e^{2x}-3e^x+2} = \int \frac{4\,du}{u^2-3u+2} = 4\int \frac{du}{(u-\frac{3}{2})^2-\frac{1}{4}} = 4\int \frac{du}{(u-\frac{3}{2})^2-(\frac{1}{2})^2}$$

$$= \frac{1}{2.\frac{1}{2}}\ell n\left|\frac{u-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}{u-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}\right| + c' = \ell n\left|\frac{u-2}{u-1}\right| + c' = \ell n\,\frac{e^x-2}{e^x-1} + c'$$

14. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}-1}$ ifadesini hesaplayınız.

Çözüm :

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}-1}\,dx =$$

$x = u^6 \Rightarrow dx = 6u^5\,du$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}-1}\,dx = \int \frac{u^3}{u^2-1}\,6u^5\,du = 6\int \frac{u^8}{u^2-1}\,du = 6\int \left(u^6+u^4+u^2+1+\frac{1}{u^2-1}\right)du$$

$$= 6\int (u^6+u^4+u^2+1)\,du + 6\int \frac{du}{u^2-1} = 6\left[\frac{1}{7}u^7+\frac{1}{5}u^5+\frac{1}{3}u^3+u+\frac{1}{2}\ell n\left|\frac{u-1}{u+1}\right|\right] + c'$$

$$\left[= 6\;\frac{1}{7}.\;\sqrt[6]{x^7} + \frac{1}{5}\sqrt[6]{x^5} + \frac{1}{3}\sqrt[6]{x^3} + 6\sqrt{x} + \frac{1}{2}\ell n\left|\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1}\right| + c\right]$$ bulunur.

15. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}$ ifadesini hesaplayınız.

Çözüm :

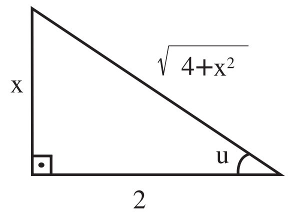
$x = .3\text{Sinu} \Rightarrow dx = 3\text{ Cosu du}, \quad u = \text{Arc Sin}\,\frac{x}{3}$

$$\int \frac{.3\text{ Cosu du}}{9\text{Sin}^2u\sqrt{9-9\text{ Sin}^2u}} \int \frac{3\text{ Cosu du}}{9\text{Sin}^2u\; 3\sqrt{\underbrace{1-\text{Sin}^2u}_{\text{Cos}^2u}}} = \int \frac{\text{Cosu du}}{9\text{Sinu . Cosu}} = \int \frac{du}{9\text{Sin}^2u}$$

$$= \frac{1}{9}\int \frac{du}{\text{Sin}^2u} = -\frac{1}{9}\text{Cotgu} + c' = -\frac{1}{9}\text{Cotg}\left(\text{Arcsin}\,\frac{x}{3}\right) + c'$$

16. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}}$ ifadesini hesaplayınız.

Çözüm :



$x = 2\text{tanu} \Rightarrow dx = 2(1+\text{tan}^2u)\,du$

$dx = \dfrac{2\,du}{\text{Cos}^2u}$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}} = \int \frac{\frac{2\,du}{\text{Cos}^2u}}{4\,\frac{\text{Sin}^2u}{\text{Cos}^2u}\sqrt{4+4\text{tan}^2u}} = \int \frac{du}{4\,\text{Sin}^2u\sqrt{1+\text{tan}^2u}}$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{du}{\text{Sin}^2u.\frac{1}{\text{Cosu}}} = \frac{1}{4}\int \frac{\text{Cosu du}}{\text{Sin}^2u} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{4t} + c' = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\text{Sinu}} + c$$

$$\boxed{\text{Sinu} = t \Rightarrow \text{Cosu du} = dt}$$

$$\frac{-1}{4}\cdot\frac{1}{\text{Sinu}} + c' = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\frac{x}{\sqrt{4x+x^2}}} + c'$$

$$= -\frac{\sqrt{4+x^2}}{4x} + c'$$

17. $\int x\sqrt{16-x^2}\,dx$ ifadesini hesaplayınız.

Çözüm :

$x = 4\,\text{Sint} \Rightarrow dx = 4\,\text{Cost}\,dt$

$$\int x\sqrt{16-x^2}\,dx = \int 4\,\text{Sint}\sqrt{16-16\,\text{Sin}^2t}\,.\,4\,\text{Cost}\,dt =$$

$$\int 4\,\text{sint}\,.\,4\,.\,\text{Cost}\,.\,4\,\text{Cost}\,dt = \int 64\,\text{Sint}\,.\,\text{Cos}^2t\,dt = \int 64u^2\,(-du)$$

$$\boxed{\text{Cost} = u \Rightarrow \text{Sint}\,dt = -du}$$

$$= -64\int u^2\,du = -64\,\frac{u^3}{3} + c' = -\frac{64}{3}\,\text{Cos}^3t + c = -\frac{64}{3}\,\text{Cos}^3\left(\text{arc Sin}\,\frac{x}{4}\right) + c'$$

18. $\int \frac{\text{Sin}2x}{\text{Sin}^2x+5}\,dx$ ifadesini hesaplayınız.

Çözüm :

$$\boxed{\begin{array}{l} u^2+5 = t \\ 2udu = dt \\ \int \frac{dt}{t} = \ell n\,|\,t\,|+c \end{array}}$$

$$\int \frac{\text{Sin}2x}{\text{Sin}^2x+5}\,dx$$

$$= \int \frac{2\text{Sinx}\,.\,\text{Cosx}}{\text{Sin}^2x+5}\,dx$$

$$= \int \frac{2u\,du}{u^2+5}$$

$$= \ell n\,|u^2+5| + c$$

$$= \ell n\,|\text{Sin}^2x+5| + c'$$

$\text{Sinx} = u \Rightarrow \text{Cosx}\,dx = du$

19. $\displaystyle\int \frac{(1-t^2)dt}{t(1+t^2)}$ ifadesini hesaplayınız.

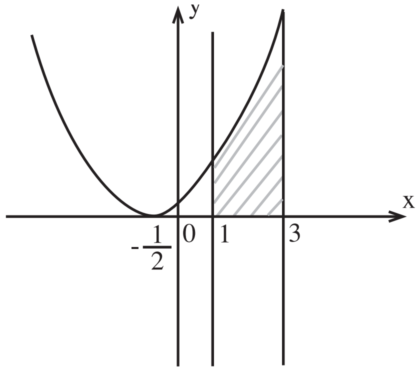
Çözüm : Basit kesirlere ayırma yöntemiyle

$$\int \frac{(1-t^2)dt}{t(1+t^2)} = 2\int \frac{dt}{t} - 2\int \frac{2t\,dt}{t^2+1} = 2\ln|t| - 2\ln|t^2+1| + c' = 2\ln\left|\frac{t}{t^2+1}\right| + c'$$

20. Aşağıda verilen eğri ve doğrularla sınırlanan alanları bulunuz.

a) $y = (2x+1)^2$ eğrisi $x = 1$, $x = 3$ doğruları ve x - ekseni ile sınırlanan alanı bulunuz.

Çözüm :



$y = (2x+1)^2 = 4x^2+4x+1$

$= (x^2+x+\frac{1}{4}) = 4\,[(x+\frac{1}{2})^2]$

$y = 4\,(x+\frac{1}{2})^2$ bulunur.

$$S = \int_1^3 (4x^2+4x+1)\,dx = \frac{4}{3}x^3 + 4\frac{x^2}{2} + x \Big|_1^3 =$$

$$36+18+3-\frac{4}{3}-2-1 = 57-\frac{4}{3}-3 = \underset{(3)}{\frac{54}{1}} - \underset{(1)}{\frac{4}{3}} = \frac{162-4}{3} = \frac{158}{3}\ \text{br}^2$$

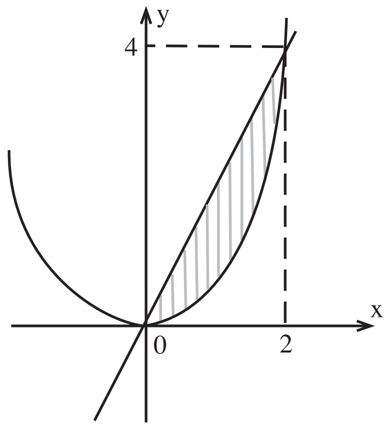
b) $y = x^2$ eğrisi ile $y = 2x$ doğrusu arasındaki alanı bulunuz.

Çözüm :

$x^2 = 2x \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow$

$x\,(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0$ ve

$x_2 = 2$ dir.

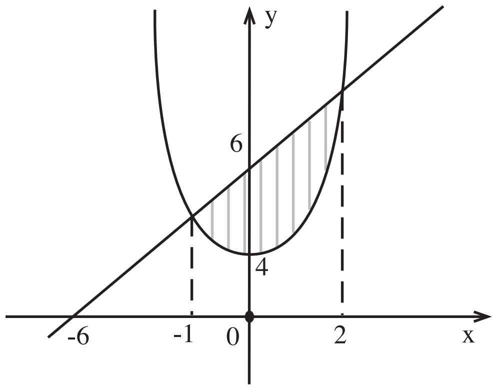


Şekilde, sınırlı bölgenin alanı S ise,

$$S = \int_0^2 (2x-x^2)\,dx = x^2 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}\ \text{br}^2$$

c) $y = x^2+4$ eğrisi ile $y = x+6$ doğrusu arasındaki sınırlı bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm :



$x^2+4 = x+6$

$x^2-x-2 = 0$

$x_1 = -1$, $x_2 = 2$

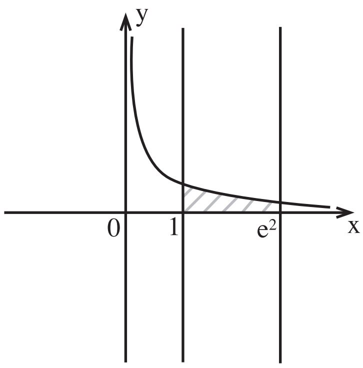
Şekilde, sınırlı bölgenin alanı S ise,

$$S = \int_{-1}^{2} (x+6 - x^2-4)\,dx = \int_{-1}^{2} (x+2 - x^2)\,dx = \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^{2} =$$

$$2+4 - \frac{8}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{3} = 8 - 3 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}\ br^2$$

d) $y = \frac{1}{x}$ eğrisi, $(x>0)$, $x = 1$; $x = e^2$ doğruları ve x - ekseni ile sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

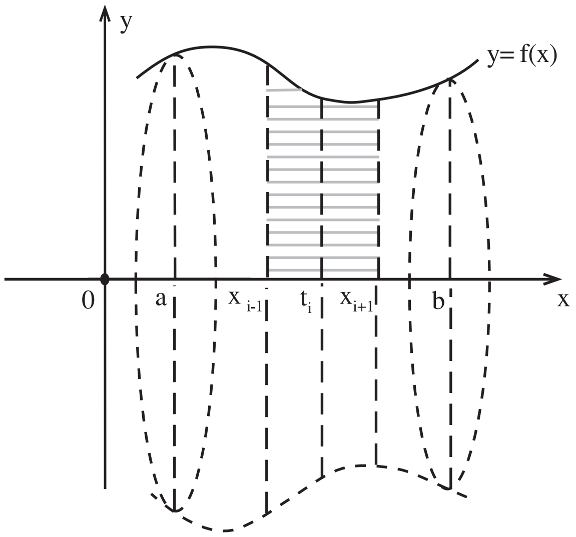
Çözüm :



$$S = \int_{1}^{e^2} \frac{1}{x}\,dx = \ell nx \Big|_{1}^{e^2} = 2\,\ell ne - \ell n1 = 2-0 = 2$$

DÖNEL CİSİMLERİN HACİMLERİNİN BULUNMASI

[a, b] aralığında integrallenebilen bir f fonksiyonunu ele alalım. f nin grafiği; x- ekseni x = a ve x = b doğruları ile sınırlanan bölgeyi x - ekseni etrafında döndürmekle oluşturan cisme dönel cisim denir.



[a, b] aralığını $a = x_0, x_1, x_2, ..., x_n = b$ noktaları ile n - tane alt aralığa ayıralım. $[x_{i-1}, x_i]$ alt aralığında bir t_i noktası seçelim. Tabanı $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, yüksekliği $|f(t_i)|$ olan bir dikdörtgen oluşturur. Bu dikdörtgen x - ekseni etrafında döndürülünce, yarıçapı $|f(t_i)|$ ve yüksekliği Δx_i olan bir silindir elde edilir. Böylece [a, b] aralığına ait n – tane dikdörtgenin x - ekseni etrafında döndürülmesi ile elde edilen n - tane silindirin hacimleri toplamı :

$$V' = \sum_{i=1}^{n} \pi \left[f(ti)\right]^2 . \Delta xi \text{ dir.} \qquad n \to \infty \text{ için}$$

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \pi \left[f(t_i) \right]^2 . \Delta xi = \int_a^b \pi \left[f(x)\right]^2 dx =$$

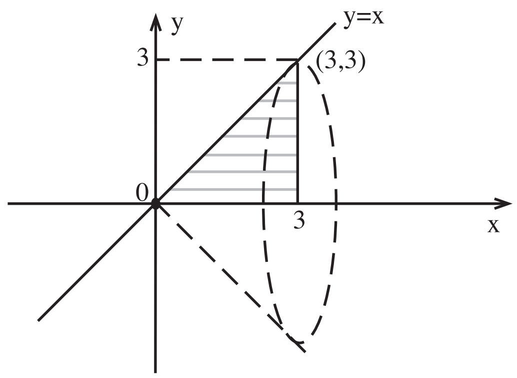
$$\pi \int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx \Rightarrow V = \pi \int_a^b y^2 dx \quad \text{bulunur.}$$

[a, b] aralığında integrallenebilen bir x=g (y) fonksiyonu y ekseni y=a ve y=b doğruları ile sınırlanan bölgeyi y ekseni etrafında döndürmekle oluşturan cismin hacmi,

$$V = \pi \int_a^b \left[g(y)\right]^2 dy \Rightarrow V = \int_a^b x^2 dy \quad \text{bulunur.}$$

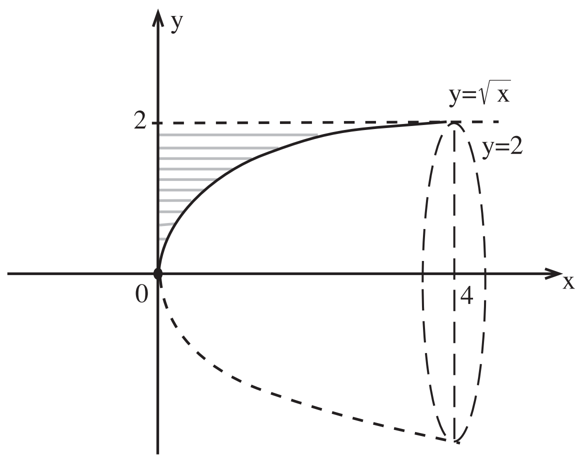
Örnekler :

1. $y = x$ doğrusu, $x = 3$ doğrusu ve x - ekseni ile sınırlanan bölgenin x - ekseni etrafında döndürülmesi ile elde edilen dönel hacmini bulunuz.



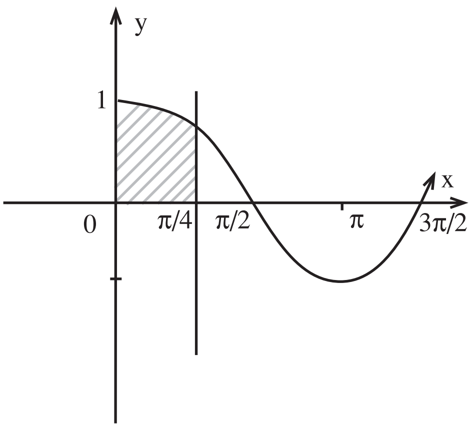
$$V = \pi \int_a^b y^2 \, dx \qquad V = \pi \int_0^3 x^2 \, dx = \frac{\pi x^3}{3}\Big|_0^3 = 9\pi \text{ br}^3$$

2. $y = \sqrt{x}$ eğrisi $y=2$ doğrusu ve y - ekseni ile sınırlanan bölgenin y - eksen etrafından döndürülmesi ile oluşan cismin hacmini bulunuz.



$$V = \pi \int_0^2 x^2 dy = \int_0^2 y^4 dy = \pi \frac{y^5}{5}\Big|_0^2 = \frac{32}{5}\pi \text{ br}^3$$

3. $y = \text{Cosx}$ fonksiyonunun eğrisi $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{4}$ doğruları ve x - ekseni ile sınırlanan bölgenin x - eksen etrafında döndürülmesi ile elde edilen cismin hacmini bulunuz.



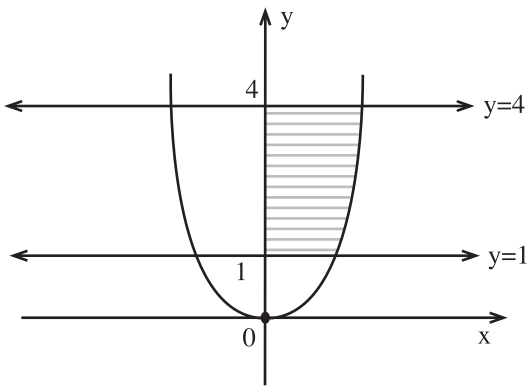
$$V = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{Cos}^2 x \, dx = \pi \int_0^{\pi/4} \frac{1+\text{Cos}2x}{2}$$

$$= \pi \left[\frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \text{Sin}2x\right]\Bigg|_0^{\pi/4} =$$

$$\pi . \left[\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} . \text{Sin} \frac{2\pi}{4}\right] = \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\pi}{4} \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \text{br}^3$$

4. $y = x^2$ nin eğrisi, $y = 1$, $y = 4$ doğrusu ve y - ekseni ile sınırlanan bölge y - ekseni etrafında döndürülüyor. Elde edilen cismin hacmini bulunuz.

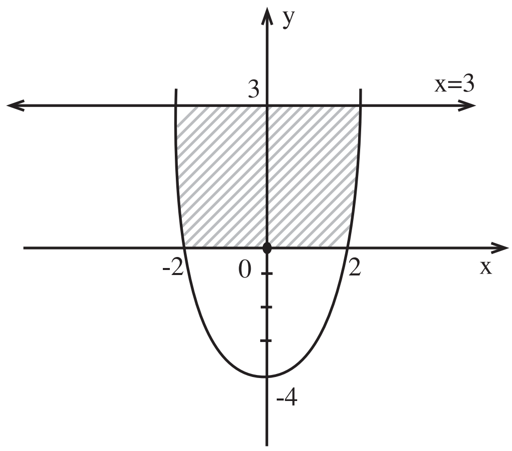


$$V = \pi \int_1^4 x^2 \, dy = \pi \int_1^4 y \, dy$$

$$= \pi \left.\frac{y^2}{2}\right|_1^4 \quad = \pi . \left(8 - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \pi . \frac{15}{2} = \frac{15}{2} \pi \text{ br}^3$$

5. $y = x^2 - 4$ fonksiyonunun grafiği, $y = 0$, $y = 3$ doğruları ve x - ekseni ile sınırlanan bölgenin, x-ekseni etrafından döndürülmesi ile elde edilen cismin hacmini bulunuz.

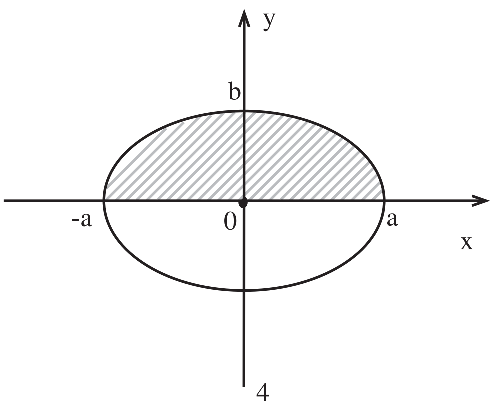


$$V = \pi \int_0^3 (x^2 - 4)^2\,dx = \pi \int_0^3 (x^4 - 8x^2 + 16)\,dx$$

$$= \left(\frac{x^5}{5} - \frac{8}{3}x^3 + 16x\right)\Bigg|_0^3 = \frac{243}{5} - 72 + 48$$

$$= \frac{243-360+240}{5} = \frac{483-360}{5} = \frac{123}{5}\ \text{br}^3$$

6. $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ eğrisi ile x - ekseninin sınırladığı bölge, x - ekseni etrafında döndürülüyor. Elde edilen cisim hacmini bulunuz.



$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

$$a^2y^2 = a^2b^2 - b^2x^2$$

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{elipsdir.}$$

$$V = \pi \int_{-a}^{a} y^2\,dx = \pi \int_{-a}^{a} \left(b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2\right) dx = \pi \,.\, \left(b^2x - \frac{b^2x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_{-a}^{a}$$

$$= \pi\left(ab^2 - \frac{a^3b^2}{3a^2} + ab^2 - \frac{a^3b^2}{3a^2}\right) = \frac{4}{3}ab^2\pi$$

ÖZET

Bu bölümde, aşağıdaki durumlar öğrencilere verilmeye çalışılmıştır :

1. İntegral hesabı niçin gerekli olduğu öğrencilere tanıtıldı.

2. Sınırlı fonksiyonların tanımı yapılarak örnekler üzerinde duruldu.

3. Sınırlı ya da sınırsız fonksiyonlarda integral alınıp alınmayacağı açıklandı.

4. Riemann toplamı ile eğri altındaki alan üzerinde duruldu.

5. Değişken değiştirme kuralı öğrencilere tanıtıldı.

6. Kısmî integral alma kuralı öğrencilere tanıtıldı.

7. Basit fonksiyonların integralleri tanıtıldı.

8. Basit kesirlere ayırma kuralı öğrencilere tanıtıldı.

9. Trigonometrik değişken değiştirme öğrencilere tanıtıldı.

10. Eğri altında kalan bölgenin alanını hesaplamak için parçalama yöntemi kullanıldı.

11. Belirli integral tanımı yapıldı.

12. Belirli integral formülleri öğrencilere tanıtıldı.

13. İntegralin 1. temel teoremi öğrencilere tanıtıldı.

14. Bir fonksiyonun ilkeli öğrencilere tanıtıldı.

15. İntegralin 2. temel teoremi öğrencilere tanıtıldı.

16. Daha basit teknik olan, eğri altındaki kalan bölgenin alanları için integral ile çözüldü.

17. İki eğri ile sınırlanan bölgenin alanı integral ile çözüldü.

18. Dönel cisimlerin hacimleri integral ile çözüldü.

DEĞERLENDİRME TESTİ (2)

1. $\int xe^x\,dx$ ifadesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $e^x(x-1)+c$ B) $e^x(x+1)+c$ C) $e^x+xe^{x^2}$ D) e^x+1+c

2. $\int \frac{dx}{x^2+x}$ ifadesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\ell n\,|x| + x+1$ B) $\ell n\,|x| + |x+1|$ C) $\ell n\,|x| - |x+1| +c$ D) $\ell n\,|x| - |x+1|$

3. $\int \frac{dx}{x(x-3)}$ ifadesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{1}{3}\ell n\,|x| + \frac{1}{3}\ell n\,|x+3| +c$ B) $\frac{1}{3}\ell n\,|x| - \frac{1}{3}\ell n\,|x-3| +c$

C) $-\frac{1}{3}\ell n\,|x| + \frac{1}{3}\ell n\,|x-3| +c$ D) $\frac{1}{3}\ell n\,|x| + |x+3| +c$

4. $f(x) = x^2 - 4$ fonksiyonu Ox ekseni ile sıralanan bölgenin alanı kaç br^2 dir?

A) $\frac{32}{3}$ B) 10 C) $\frac{20}{3}$ D) $\frac{19}{3}$

5. $f(x) = x(x^2-9)$ fonksiyonunun $x = -3$, $x = 5$, $y = 0$ doğrularıyla sınırlanan bölgenin alanı kaç br^2 dir?

A) 100 B) 102 C) $\frac{208}{3}$ D) $\frac{209}{2}$

6. $\int \frac{3x-5}{x^2+9}\,dx$ integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{3}{2}\ln(x^2+9) - \frac{5}{3}\arctan\frac{x}{3} + c$

B) $\frac{3}{2}\arctan\frac{x}{3} + \ln(x^2+9)$

C) $\arctan x + \ln(x^2+9)$

D) $\frac{5}{3}\arctan x - \ln(x^2+9)$

7. $\int \frac{x-1}{x(x+1)}\,dx$ integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2\ln|x+1| - \ln|x-1| + c$

B) $-\ln|x| + 2\ln|x+1| + c$

C) $\ln|x+1| + \ln|x-1| + c$

D) $\ln|x| + 1 + c$

8. $y = x^3 - x$ eğrisi ile Ox ekseni arasındaki bölgenin Ox ekseni etrafında dönmesiyle oluşan cismin hacimi kaç br^3 dür?

A) $\frac{16\pi}{103}$ B) $\frac{15\pi}{104}$ C) $\frac{16\pi}{108}$ D) $\frac{16\pi}{109}$

9. $y^2 = 4x$, $x = 0$, $y = 6$ ile sınırlanıp Oy ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacimi kaç br^3 dür?

A) $\frac{481\pi}{5}$ B) $\frac{483\pi}{6}$ C) $\frac{486\pi}{5}$ D) $\frac{489\pi}{5}$

10. $\int e^x . \text{Sin}x\,dx$ integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $e^x(\text{Sin}x + \text{Cos}x)$

B) $e^x\frac{(\text{Sin}x + \text{Cos}x)}{2}$

C) $e^x\frac{(\text{Cos}x - \text{Sin}x)}{2}$

D) $\frac{e^x(\text{Sin}x - \text{Cos}x)}{2}$

DEĞERLENDİRME TESTİNİN ÇÖZÜMLERİ (2)

1. $\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + c$

$u = x \qquad dv = e^x\,cdx$

$du = dx \qquad v = e^x$

Doğru Cevap A

2. $\dfrac{1}{x(x+1)} = \underset{(x+1)}{\dfrac{A}{x}} + \underset{(x)}{\dfrac{B}{x+1}}$

$\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{Ax+A+bx}{x(x+1)}$

$1 = (A+B)\,x + A$

$A = 1, \; A+B = 0$

$\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$

$B = -1$

$$\int \frac{dx}{x^2+x} \int \left(\frac{1}{x} + \frac{-1}{x+1}\right) dx = \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= \ell n\,|x| - \ell n\,|x+1| + c$$

Doğru Cevap C

3. $\dfrac{1}{x(x-3)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x-3}$

$\dfrac{1}{x(x-3)} = \dfrac{A(x-3)+Bx}{x(x-3)} = \dfrac{(A+B)\,x - 3A}{x(x-3)}$

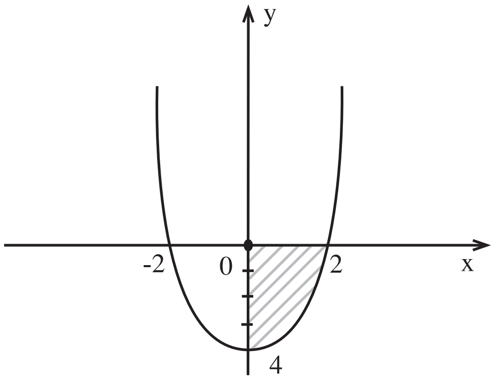
$A+B = 0$

$-3A = 1 \Rightarrow A = -1/3$ o halde, $\dfrac{1}{x(x-3)} = \dfrac{-\frac{1}{3}}{x} + \dfrac{\frac{1}{3}}{x-3}$

$$\int \frac{dx}{x(x-3)} = \int \left(\frac{\frac{-1}{3}}{x} + \frac{\frac{1}{3}}{x-3}\right) dx = -\frac{1}{3}\,\ell n\,|x| + \frac{1}{3}\,\ell n\,|x-3| + c$$

Doğru Cevap C

4. $f(x) = x^2 - 4$ fonksiyonunu 0x ekseni ile sınırlanan bölgenin alanını,



$$A = \int_{-2}^{2} (x^2-4)\, dx = \frac{x^3}{3} - 4x \Big|_{-2}^{2} = \frac{32}{3} \text{ br}^2$$

Doğru Cevap A

5. $f(x) = x\,(x^2 - 9)$ fonksiyonunun $x = -3$, $x=5$, $y=0$ doğrularıyla sınırlanan bölgenin alanı

$$x\,(x^2 - 9) = 0$$

$$x = 0 \quad x^2 = 9$$

$$A = \int_{-3}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{3} f(x)\, dx + \int_{3}^{5} f(x)\, dx$$

$$A = \frac{x^4}{4} - \frac{9x^2}{2}\Big]_{-3}^{0} + \frac{x^4}{4} - \frac{9x^2}{2}\Big]_{0}^{3} + \frac{x^4}{4} - \frac{9x^2}{2}\Big]_{3}^{5}$$

$$A = \frac{81}{4} + \frac{81}{4} + \frac{256}{4} = \frac{418}{4} = \frac{209}{2} \text{ br}^2$$

Doğru Cevap D

6. $$\int \frac{3x-5}{x^2+9}\, dx = \int \frac{3x\, dx}{x^2+9} - \int \frac{5dx}{x^2+9}$$

$$= \frac{3}{2} \int \frac{2x\, dx}{x^2+9} - 5 \int \frac{dx}{x^2+9}$$

$$= \frac{3}{2} \ln (x^2+9) - \frac{5}{3} \text{Arc} \tan \frac{x}{3} + c$$

Doğru Cevap A

7. $\displaystyle\int \frac{x-1}{x(x+1)}\,dx = \int \left(-\frac{1}{x} + \frac{2}{x+1}\right) dx$

$$= -\int \frac{1}{x}\,dx + 2\int \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= -\ln|x| + 2\ln|x+1| + c$$

Doğru Cevap B

8. $y = x^3 - x$, 0x ekseni etrafında sınırlanıp 0x etrafında dönmesiyle oluşan cismin hacimi,

$x.(x^2-1)$

$x = 0 \quad x = \pm 1$

-1 ile 0 arası bölge, 0 ile +1 arasındaki bölge ile simetrik olduğundan hacim formülünde 2 çarpanı alınmalıdır.

$$V = 2\pi \int_0^1 y^2\,dx = 2\pi \int_0^1 (x^3 - x)^2\,dx$$

$$V = 2\pi \int_0^1 (x^6 - 2x^4 + x^2)\,dx = 2\pi \, . \, \frac{x^7}{7} - \frac{2x^5}{5} + \frac{x^3}{3} \int_0^1$$

$$V = 2\pi \left(\frac{1}{7} - \frac{2}{5} + \frac{1}{3}\right) = 2\pi \left(\frac{8}{105}\right) = \frac{16\pi}{108}\ br^3$$

Doğru Cevap C

9. $y^2 = 4x$, $x = 0$, $y = 6$ ile sınırlanıp 0y ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacimi.

$$V = \pi \int_0^6 x^2\,dy = \pi \int_0^6 \left(\frac{y^2}{4}\right)^2 dy = \pi \int_0^6 \frac{1}{16}\,y^4\,dy$$

$$V = \frac{\pi}{16}\int_0^6 y^4\,dy = \frac{\pi}{16}\,\frac{y^5}{5}\Bigg|_0^6 = \frac{\pi}{80}\,(6^5 - 0)$$

$$= \frac{486\pi}{5}\ br^3$$

Doğru Cevap C

10. $A = \int e^x \, Sinx \, dx = e^x \, Sinx - \int e^x \, Cosx \, dx$

$A = e^x \, Sinx - e^x \, Cosx - \int e^x \, Sinx \, dx$

$2A = e^x \, Sinx - e^x \, Cosx$

$A = \dfrac{e^x \, (Sinx - Cosx)}{2}$

Doğru Cevap B