ÜNİTE II

İNTEGRAL

İntegralin tanımı

İntegral alma yöntemleri

Basit fonksiyonların integralleri

Rasyonel ifadelerin integrali

Trigonometrik değişken değiştirme

Eğri altında kalan bölgenin alanı

Belirli integral

İki eğri ile sınırlanan bölgenin alanı

Örnekler

Dönel cisimlerin hacimlerinin bulunması

BU BÖLÜM NELERİ AMAÇLIYOR?

Bu bölümü çalıştığınızda (bitirdiğinizde)

* İntegral hesabın niçin gerekli olduğunu öğrenecek.
* Sınırlı ve sınırsız fonksiyonları tanıyarak, herhangi bir fonksiyonun sınırlı ya da sınırsız olup olmadığını söyleyecek.
* Değişken değiştirme kuralı ile integral almayı öğrenecek.
* Kısmî integral alma kuralı ile integral almayı öğrenecek.
* Basit fonksiyonların integrallerinin nasıl alınacağını öğrenecek.
* Basit kesirlere ayırma yöntemi ile integral almayı öğrenecek.
* Trigonometrik değişken değiştirme yöntemi ile integral almayı öğrenecek.
* Basit fonksiyonun ilkelini öğrenecek.
* Eğri altındaki alanı hesaplamak için parçalama yöntemini öğrenecek.
* Belirli integral tanımını kavrayacak.
* İntegralin 1. temel teoremini öğrenecek.
* İntegralin 2. temel teoremini öğrenecek.
* Daha basit teknik olan, eğri altındaki kalan bölgenin alanını integral ile çözmeyi öğrenecek.
* İki eğri ile sınırlı bölgenin alanını integral ile çözmeyi öğrenecek.
* Dönel cisimlerin hacimleri için integral kullanma yöntemini öğrenip, dönel cisimlerin hacimlerini hesaplayabileceksiniz.

NASIL ÇALIŞMALIYIZ?

* Türev konusunu öğrenmeden, integral konusunu çalışmaya başlamamalısınız.
* Tanımları çok iyi kavrayıp örnekleri özümseyiniz.
* Teoremleri çok iyi kavramalısınız.
* İntegral formüllerinin tamamını ezberlemelisiniz. Bolca örnek çözün, hangi soruda nasıl bir formül kullanacağınızı belirlemelisiniz.
* İntegral alma kurallarını öğrenmelisiniz.
* Çözülen örnekleri siz de çözün. Eğer çözemiyorsanız hatanızı arayın, hatanızı bulduktan sonra baştan çözmeye çalışın.
* Yazarak çalışmayı unutmayın.

ÜNİTE II.

İNTEGRAL

Türev kavramının bir eğriye üzerindeki bir noktadan çizilen teğetin eğiminin bulunması probleminden ortaya çıktığını, türev bir değişim oranı olduğundan hareket eden cisimlerin hız ve imeleri ya da buna benzer problemlerin çözümünde kullanılır. İntegral kavramına geometrik bir anlam vermek gerekirse bazı düzgün olmayan bölgeler alanlarının bulunması probleminden ortaya çıktığını söyleyebiliriz. İntegral, hareket problemleri, dönel cisimlerin hacimleri, iş, kütle, kütle merkezi ve eylemsizlik momenti bulunması; diğer bilim dalları ile ilgili pek çok problemlerin çözümünde kullanılır.

Türevi f(x) olan bir F(x) fonksiyonuna f(x) in bir ilkel fonksiyonu veya integral denir.

Sınırlı fonksiyonlar :

$E \subset R$ ve $f: E \rightarrow R$ bir fonksiyon olsun. f(E) görüntü kümesi $f(E) \subset R$ dir. f(E) nin sınırlı ya da sınırsız olduğunu inceleyelim.

$E \subset R$ ve $f: E \rightarrow R$ bir fonksiyon olsun.

$\forall x \in E$ için

a) $f(x) \leq M$ olacak şekilde $M \in R$ varsa, f fonksiyonu üstten sınırlı,

b) $f(x) \geq m$ olacak şekilde $m \in R$ varsa, f fonksiyonu alttan sınırlı,

c) $m \leq f(x) \leq M$ olacak şekilde m, $M \in R$ sayıları bulunabilirse, f fonksiyonu hem alttan hem de üstten sınırlı ya da yalnızca sınırlıdır denir.

Örnekler :

Aşağıdaki tanım ve değer kümesi ile verilen fonksiyonların sınırlılık durumlarını inceleyelim.

1. $f: R \rightarrow R$, $f(x) = x^2+3$ fonksiyonu verilsin.

$\forall x \in R$ için $x^2 \geq 0$ ve $x^2+3 \geq 3 \Rightarrow f(x) \geq 3$ olduğundan f fonksiyonu alttan sınırlıdır. En büyük alt sınırı 3'tür.

2. $f: R \rightarrow R$: $f(x) = -3x^2+4$ fonksiyonu verildiğine göre;

$\forall x \in R$ için $x^2 \geq 0 \Rightarrow -3x^2 \leq 0$ ve $-3x^2 + 4 \leq 4 \Rightarrow f(x) \leq 4$ dür. Fonksiyon üstten sınırlıdır. f'nin en küçük üst sınırı 4 olur.

3. $f:[-2, 4] \rightarrow R$, $f(x) = 2x^2 + 1$ ise

$\forall x \in [-2, 4]$ için $-2 \leq x \leq 4 \rightarrow 4 \leq x^2 \leq 16 \Rightarrow 8 \leq 2x^2 \leq 32 \Rightarrow 9 \leq 2x^2 + 1 \leq 33$ dür

$\Rightarrow 9 \leq f(x) \leq 33$ olup f fonksiyonu alttan ve üstten sınırlıdır.

4. $f : (0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow R$, $f(x) = \frac{1}{Sinx}$ ise

$\forall x \in (0, \frac{\pi}{2}]$ için $0 < Sinx \leq 1$ dir. $\Rightarrow$

$Sinx \rightarrow 0$ için $\frac{1}{Sinx}$ her pozitif reel sayıdan daha büyük olur.

$x \in (0, \frac{\pi}{2}]$ için $f(x) = \frac{1}{Sinx} \leq M$ olacak şekilde bir $M \in R$ bulunamaz.

O halde, $f(x) = \frac{1}{Sinx}$ verilen tanım aralığında üstten sınırlı değildir.

5. $f : R \rightarrow R$; $f(x) = |x| -1$ fonksiyonu verilsin.

$\forall x \in R$ için $|x| \geq 0 \Rightarrow |x| -1 \geq -1 \Rightarrow f(x) \geq -1$ dir $\Rightarrow$ f fonksiyonu alttan sınırlıdır.

6. $f : (\frac{5}{8}, \frac{9}{4}] \rightarrow R$; $f(x) = [\, |x| \,]^2 + 2$ fonksiyonu verilsin.

$\forall x \in (\frac{5}{8}, \frac{9}{4}]$ için $0 \leq [\, |x| \,] \leq 2 \Rightarrow 0 \leq [\, |x| \,]^2 \leq 4 \Rightarrow$

$2 \leq [\, |x| \,]^2 + 2 \leq 6 \Rightarrow 2 \leq f(x) \leq 6 \Rightarrow$ f fonksiyonu sınırlıdır.

Örnekler :

1. a) $f:R \rightarrow R$, $f(x) = x^2 + Sinx$ fonksiyonunun alttan sınırlı olduğunu gösteriniz.

Çözüm :

$\forall x \in R$ için $x^2 \geq 0$ ve $\forall x \in R$ için $-1 \leq Sinx \leq 1$

$\Rightarrow -1 \leq x^2 + Sinx \Rightarrow -1 \leq f(x)$ fonksiyon alttan sınırlı ve alt sınırı 1'dir.

1. b) $f:R \rightarrow R$; $f(x)= -3|x| +1$ fonksiyonunun üstten sınırlı olduğunu gösteriniz.

Çözüm :

$\forall x \in R$ için $|x| \geq 0 \Rightarrow -3|x| \leq 0 \Rightarrow -3|x| +1 \leq 1$

$\Rightarrow f(x) \leq 1$ fonksiyon üstten sınırlı ve üst sınırı 1 dir.

2. a) f: [0, 5] → R ; $f(x) = x^2 - 5x + 4$ fonksiyonunun sınırlı olduğunu gösteriniz.

Çözüm :

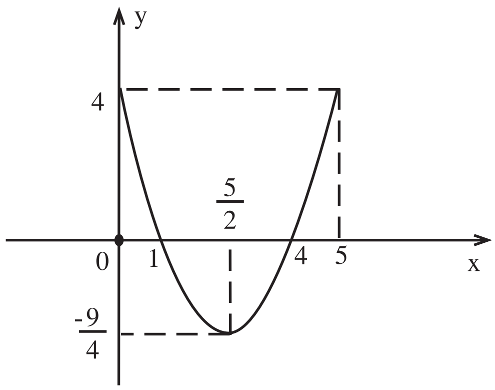
$f:(x) = x^2 - 5x + 4 = (x - \frac{5}{2})^2 - \frac{25}{4} + 4^2 \leq (x - \frac{5}{2})^2 - \frac{9}{4}$

$\forall x \in [0, 5]$ için $f(0) = f(5) = 4$ olduğundan

$f(x) = (x - \frac{5}{2})^2 - \frac{9}{4}$ parabolünün tepe noktası fonksiyonun minumum noktasıdır.

$-9/4 \leq f(x) \leq 4$

$\Rightarrow$ f fonksiyonu sınırlıdır.



2. b) f:R → R ; f(x) = 4+3. Sinx fonksiyonunun sınırlı olduğunu gösteriniz.

Çözüm :

$\forall x \in R$ için $\Rightarrow$ $-1 \leq \text{Sin}x \leq 1 \Rightarrow -3 \leq \text{Sin}x \leq 3$

$\Rightarrow$ $1 \leq 4+3\,\text{Sin}x \leq 7 \Rightarrow 1 \leq f(x) \leq 7 \Rightarrow$ f sınırlıdır.

3. a) f:R → R ; $f(x) = x^2 - 2x + 1$ fonksiyonunun alttan sınırlı olduğunu gösteriniz.

Çözüm :

$f(x) = (x-1)^2$; $\forall x \in R$ için $(x-1)^2 \geq 0$ f fonksiyonu alttan sınırlıdır.

3. b) f: [-1, 3] → R ; $f(x) = e^{2x}$ fonksiyonunun sınırlı olup olmadığını bulunuz.

Çözüm :

$f'(x) = 2e^{2x} > 0$ olduğundan f artan bir fonksiyondur.

$\forall x \in [-1, 3]$ için $e^{-2} < f(x) < e^{6} \Rightarrow$ f sınırlıdır.

İNTEGRAL ALMA YÖNTEMLERİ

I. Değişken Değiştirme Yöntemi

Örnekler :

1. $\int (5x^2+3x+8)^{15}.(10x+3)dx$ integralini bulunuz.

$5x^2+3x+8 = u$ diyelim.

$(10x+3)\ dx = du$

$$\int \underbrace{(5x^2+3x+8)}_{u}{}^{15}\ \underbrace{(10x+3)\ dx}_{du} = \int u^{15}\ du = \frac{u^{16}}{16} + c'$$

$$= \frac{(5x^2+3x+8)^{16}}{16} + c'$$

2. $\int Sin^5x.\ Cosx\ dx = ?$

$Sinx = u$ diyelim. $\Rightarrow Cosx\ dx = du$

$$\int Sin^5 x.\ Cosx\ dx = \int u^5\ du = \frac{u^6}{6} + c' =$$

$\frac{1}{6} Sin^6 x+c'$

3. $\int \frac{2x}{x^2 -1} dx = ?$

$-1 +x^2 = u$ diyelim. $2x\ dx = du$

$$\int \frac{2x}{x^2-1} dx = \int \frac{du}{u} = \ln |u|+c = \ln |x^2-1|+c$$

4. $\int e^{x^3+1}\ .\ 3x^2\ dx = ?$

$x^3+1 = u$ diyelim. $\Rightarrow 3x^2\ dx = du$

$$\int e^{x^3+1}.3x^2 dx = \int e^u du = e^u +c= e^{x^3+1}+c'$$

5. $\displaystyle\int \frac{8x\,dx}{\sqrt{1-16x^4}} = ?$

$4x^2 = u$ diyelim. $8x\,dx = du$

$$\int \frac{8x\,dx}{\sqrt{1-(4x^2)^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \text{Arc sinu} + c'$$

$$= \text{Arc sin}\,(4x^2) + c'$$

6. $\displaystyle\int \frac{6xdx}{9x^4+4} = ?$

$3x^2 = u$ diyelim. $6x\,dx = du$

$$\int \frac{du}{u^2+1} = \text{Arctg}\ u + c' = \text{Arctg}\,(3x^2) + c^1$$

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+1} = ?$

$x+2 = u$ diyelim. $dx = du$

$$\int \frac{dx}{(x+2)^2+1} = \int \frac{du}{u^2+1} = \text{Arctg}\ u + c'$$

$$= \text{Arctg}\,(x+2) + c'$$

8. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = ?$

$u = a \sin t$ diyelim.

$du = a \cos t\,dt$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \int \frac{a \cos t\,dt}{\sqrt{a^2-a^2 \text{Sin}^2 t}} = \int \frac{a\ \text{Cos}\ dt}{a\ \text{Cost}} = t + c'$$

$$= \text{Arc Sin}\,\frac{u}{a} + c' \quad \text{dir.}$$

$u = a \sin t \Rightarrow \sin t = \frac{u}{a} \Rightarrow t = \text{Arc sin}\,\frac{u}{a}$

9 $\int 4x.\sqrt{2x^2+5}\ dx = ?$

$2x^2+5=u\ ,\ du = 4x\ dx$

$$\int 4x\ \sqrt{2x^2+5}\ dx = \int \sqrt{u}\ du = \int u^{1/2}\ du$$

$$= \frac{2}{3}\ \sqrt{u^3} + c = \frac{2}{3}\sqrt{(2x^2+5)^3} + c'$$

10. $\int Sin^2x\ dx = ?\ ,\ \int cos^2x\ dx = ?$

$$Sin^2\ x = \frac{1\text{-}Cos2x}{2}$$

$$Cos^2x = \frac{1+Cos2x}{2}$$

$$\int Sin^2 x\ dx = \int \frac{1\text{-}Cos\ 2x}{2}\ dx = \frac{1}{2}\int (1\text{-}\ Cos2x)\ dx$$

$2x = u$

$2dx = du$

$dx = \frac{du}{2}$

$$\frac{1}{2}\int Cosu\ du = \frac{1}{2}\ Sin\ 2x$$

$$= \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int Cos2x\ dx = \frac{1}{2}\ x - \frac{1}{4}\ Sin2x + c'$$

$$\int Cos^2 x\ dx = \int \frac{Cos2x\ +1}{2}\ dx = \frac{1}{2}\int Cos2x\ dx\ + \frac{1}{2}\int dx$$

$$= \frac{1}{4}\ Sin2x + \frac{1}{2}\ x + c'$$

11. $\int \text{Sin}^4 x \, \text{Cos}^3 x \, dx = ?$

$$\int \text{Sin}^4 x \, \text{Cos}^3 x \, dx = \int \text{Sin}^4 x \, . \, \text{Cos}^2 x . \, \text{Cos} \, x \, dx =$$

$$\int \text{Sin}^4 x \, (1-\text{Sin}^2 x) \, \text{Cos} \, x \, dx = \int \text{Sin}^4 x \, \text{Cos} \, dx - \int \text{Sin}^6 x \, \text{Cosx} \, dx$$

Sinx = u diyelim $\Rightarrow$ Cosx dx = du

$$= \int u^4 \, du - \int u^6 \, du = \frac{u^5}{u} + \frac{u^7}{7} + c' =$$

$$\frac{1}{5} \text{Sin}^5 x + \frac{1}{7} \text{Sin}^7 x + c'$$

12. $\int \text{tgx} \, dx = \int \frac{\text{Sinx}}{\text{Cosx}} \, dx = ?$

Cosx = u $\Rightarrow$

- sinx dx = du

$$\int \frac{\text{Sinx}}{\text{Cosx}} \, dx = - \int \frac{du}{u} = - \ln |u| + c' = - \ln |\text{Cosx}| + c'$$

13. $\int \text{Cotgx} \, dx = \int \frac{\text{Cosx}}{\text{Sinx}} \, dx$; Sinx = u $\Rightarrow$

Cosx dx = du

$$\int \frac{\text{Cosx}}{\text{Sinx}} \, dx = \int \frac{du}{u} = \ell n \, |u| + c' = \ell n \, |\text{Sinx}| + c'$$

14. $\int \frac{Arctgx}{1+x^2}\,dx = ?$ $\quad Arctg\,x = u \Rightarrow du = \frac{dx}{1+x^2}$

$$\int \frac{Arctgx}{1+x^2}\,dx = \int udu = \frac{u^2}{2} + c' = \frac{(Arctgx)^2}{2} + c$$

15. $\int \frac{Arc\,Sinx}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = ?$ $\quad arcsinx = u$

$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = du$;

$$\int \frac{ArcSinx}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int udu = \frac{1}{2}\,u^2 + c'$$

$$= \frac{1}{2}\,(ArcSinx)^2 + c'$$

16. $\int (2x+3).Sin\,(2x^2+6x+1)dx = \int \frac{1}{2}(4x+6)\,Sin\,(2x^2+6x+2)\,dx$

$2x^2 + 6x+1 = u \Rightarrow (4x+6)\,dx = du \Rightarrow (2x+3)\,dx = \frac{du}{2}$

$$= \frac{1}{2}\int Sinu.du = -\frac{-1}{2}\,.\,Cos\,u + c' = -\frac{1}{2}\,Cos\,(2x^2+6x+1) + c'$$

17. $\int e^{Sinx}.\,Cosx\,dx = ?$

$Sinx = u \Rightarrow Cosx\,dx = du$

$$\int e^{Sinx}.Cosx\,dx = \int e^u\,du = e^u + c = e^{sinx} + c'$$

18. $\int \frac{(\ell nx)^2}{x}\,dx = \int u^2\,du = \frac{u^3}{3} + c' = \frac{(\ell nx)^3}{3} + c'$

$\ell nx = u \Rightarrow \frac{1}{x}\,dx = du$

19. $\int \text{Sin}^4x \, dx = ?$

⇨

$$Cos^2x = \frac{1+Cos2x}{2}$$

$$(\text{Sin}^2x)^2 = \left(\frac{1-\text{Cos}2x}{2}\right)^2 = \frac{1-2\text{Cos}2x + \text{Cos}^2 2x}{4}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{\text{Cos}2x}{2} + \frac{1}{4}\text{Cos}^2 2x = \frac{1}{4} - \frac{\text{Cos}2x}{2} + \frac{1}{8}(1+\text{Cos}4x)$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{\text{Cos}2x}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\text{Cos}4x = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\text{Cos}2x + \frac{1}{8}\text{Cos}4x$$

$$\int \text{Sin}^4x \, dx = \int \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\text{Cos}2x + \frac{1}{8}\text{Cos}4x\right) dx$$

$$= \frac{1}{4}\int dx - \int \frac{1}{2}\text{Cos } 2x \, dx + \frac{1}{8}\int \text{Cos } 4x \, dx$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\text{Sin}2x + \frac{1}{32}\text{Sin } 4x + c'$$

20. $\int 6x \, .e^{3x^2+2} \, dx = ?$

$3x^2+2 = u \Rightarrow 6xdx = du$

$$\int 6x \, . \, e^{3x^2+2} \, dx = \int e^u \, du = e^u + c' = e^{3x^2+2} + c'$$

21. $\int \frac{\text{Cos}x+e^x}{\text{Sin}x+e^x} \, dx = ?$

$\text{Sin}x + e^x = u \Rightarrow$

$(\text{Cos}x + e^x) \, dx = du$

$$\int \frac{\text{Cos}x+e^x}{\text{Sin}x+e^x} \, dx = \ell n \, |\text{Sin}x+e^x| + c$$

22. $\displaystyle\int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}} = ?$

$u = e^x \Rightarrow du = e^x\, dx$

$$\int \frac{e^x dx}{1+(e^x)^2} = \int \frac{du}{1+u^2} = \text{Arctgu} + c = \text{Arctg } e^x + c'$$

23. $\displaystyle\int \text{Cos}^4x \,.\, \text{Sin}^3x\, dx = \int \text{Cos}^4x \,.\, (1-\text{Cos}^2x)\ \text{Sinx}\, dx$

$$= \int \text{Cos}^4x\ \text{Sinx}\, dx - \int \text{Cos}^6x\text{Sinx}\, dx = -\int u^4 du + \int u^6 du$$

$\text{Cosx} = u \Rightarrow -\text{Sinx}\, dx = du$

$$= -\frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7} + c'$$

$$= -\frac{\text{Cos}^5x}{5} + \frac{\text{Cos}^7x}{7} + c'$$

24. $\displaystyle\int \text{Sin}^6x \,.\, \text{Cos}^5x\, dx = \int \text{Sin}^6x \left[(1-\text{Sin}^2x)^2\right] . \text{Cosx}\, dx$

$$= \int \text{Sin}^6x \,.\, (1-2\text{Sin}^2x + \text{Sin}^4x)\ \text{Cosx}\, dx$$

$\text{Sinx} = u \Rightarrow \text{Cosx}\, dx = du$

$$= \int u^6 du - 2\int u^8 du + \int u^{10} du = \frac{u^7}{7} - \frac{2}{9}u^9 + \frac{u^{11}}{11} + c'$$

$$\frac{\text{Sin}^7x}{7} - \frac{2}{9}\text{Sin}^9x + \frac{1}{11}\text{Sin}^{11}x + c'$$

25. $\int \text{tg}3x\,dx = \int \frac{\text{Sin}3x}{\text{Cos}3x}\,dx = \frac{-1}{3}\int \frac{du}{u} = -\frac{1}{3}\,\ell n\,|u|$

$\text{Cos}3x = u \Rightarrow -3\text{Sin}3x\,dx = du \quad = -\frac{1}{3}\,\ell n\,|\text{Cos}3x| + c'$

26. $\int \frac{dx}{x^2+6x+10} = \int \frac{dx}{(x+3)^2+1} = \int \frac{du}{u^2+1}$ $\qquad \begin{pmatrix} 4 = x+3 \\ du = dx \end{pmatrix}$

$= \text{Arctg}\,u + c' = \text{Arctg}\,(x+3) + c'$

27. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-(x+2)^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-u^2}} = \text{Arc Sin}\,u + c = \text{Arc Sin}(x+2) + c'$ dir.

$x+2 = u \Rightarrow dx = du$

28. $\int \frac{\text{tg}x}{\text{Cos}^2x}\,dx = \int u\,du = \frac{u^2}{2} + c = \frac{1}{2}\,\text{tg}^2\,x + c'$

$\text{tg}x = u \Rightarrow \frac{1}{\text{Cos}^2x}\,dx = du$

29. $\int e^x\,.\,\text{Sin}e^x\,.\,\text{Cos}e^x\,dx = \int u\,du = \frac{u^2}{2} + c$

$\text{Sin}e^x = u \Rightarrow e^x\,.\,\text{Cos}e^x\,dx = du$

$\int e^x\ \text{Sin}e^x\ \text{Cos}\,^x e\ \ dx = \frac{(\text{Sin}e^x)^2}{2} + c'$

30. $\int \text{Sin}^3x\,dx = \int \text{Sin}^2x \,.\, \text{Sinx}\,dx = \int (1-\text{Cos}^2x)\,\text{Sinx}\,dx$

$\text{Cosx} = u$ ise $\quad -\text{Sinx}\,dx = du$

$= \int \text{Sinx}\,dx - \int \text{Cos}^2x\,\text{Sinx}\,dx = -\text{Cosx} + \dfrac{\text{Cos}^3x}{3} + c' = -\text{Cosx} + \dfrac{\text{Cos}^2x.\text{Cosx}}{3} + c'$

$= -\text{Cosx} + \dfrac{(1-\text{Sin}^2x)\,\text{Cosx}}{3} + c' = \dfrac{-\text{Sin}^2x\,\text{Cosx} - 2\text{Cosx} + c'}{3}$

31. $\int (x+1)\,.\,\sqrt{x^2+2x+5}\,dx = \int (x+1)\sqrt{(x+1)^2+4}\,dx$

$(x+1)^2+4 = u \Rightarrow 2(x+1)\,dx = du$

$= \dfrac{1}{2}\int \sqrt{u}\,du = \dfrac{1}{2}\int u^{1/2}\,du$

$= \dfrac{1}{2}\,\dfrac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c' = \dfrac{1}{3}\sqrt{u^3} + c' = \dfrac{1}{3}\sqrt{(x+1)^2+4} + c'$

32. $\int \dfrac{e^{2x}+1}{e^x}\,dx = \int e^x\,dx + \int e^{-x}\,dx$

$e^x - e^{-x} + c' = e^x - \dfrac{1}{e^x} + c'$

$-x = u$ $-dx = du$ ise $\int e^{-x}\,dx = -\int e^u\,du$ $= -e^u + c'$ $= -e^{-x} + c'$

2. Kısmi İntegralleme Yöntemi

f, g bir [a, b] aralığında türevli iki fonksiyon olsun.

$(f.g)' = f'.g + g'.f$

$f.g' = (f.g)' - f'.g$

$$\int f(x).\,g'(x)\,dx = f(x)\,.\,g(x) - \int g(x)\,.\,f'(x)\,dx$$

f(x) = u, g(x) = V dersek

$$\boxed{\int u\,dv = u.v - \int v\,du}$$ *

Örnekler :

1. $\int x\, e^{x} dx$ **ifadesini hesaplayınız.**

Çözüm : $\int x.e^{x}\, dx = x.e^{x} - \int e^{x}\, dx = xe^{x} - e^{x} + c'$

$u = x \qquad e^{x}.\, dx = dv$

$du = dx \qquad e^{x} = v$

* formülünde yerine koyalım.

$\int x\, e^{x}\, dx = x.\, e^{x} - \int e^{x} dx = xe^{x} - e^{x} + c'$

2. $\int x.\mathrm{Sinx}\ dx$ **ifadesini hesaplayınız.**

Çözüm : $\int x.\mathrm{Sinx}\ dx = -x.\mathrm{Cosx} + \int \mathrm{Cosx}\ dx = -x\ \mathrm{Cosx} + \mathrm{Sinx} + c'$

$u = x \quad ; \quad \mathrm{Sinx}\ dx = dv$

$du = dx \quad ; \quad -\mathrm{Cosx} = v$

3. $\int x.\ln x\ dx$ **ifadesini hesaplayınız.**

Çözüm : $\int x.\ln x\ dx = \frac{1}{2}x^{2}\ln x - \int \frac{1}{2}x^{2}.\frac{1}{x}\ dx = \frac{1}{2}x^{2}\ln x - \frac{1}{4}x^{2} + c'$

$u = \ln x \quad ; \quad dv = x\ dx$

$du = \frac{1}{x}dx \quad ; \quad v = \frac{x^{2}}{2}$

4. $\int e^x.\text{Cosx}\ dx$ **ifadesini hesaplayınız.**

Çözüm : $u = e^x \quad ; \quad dv = \text{Cosx}\ dx$

$du = e^x\, dx \quad ; \quad v = \text{Sinx}$

$$\int e^x . \text{Cosx}\ dx = e^x . \text{Sinx} - \int e^x . \text{Sinx}\ dx$$

$$= e^x . \text{Sinx} - e^x . \text{Cosx} + \int e^x . \text{Cosx}\ dx$$

$$\Rightarrow 2\int e^x . \text{Cosx}\ dx = e^x (\text{Sinx} - \text{Cosx}) + c'$$

$$\Rightarrow \int e^x . \text{Cosx}\ dx = \frac{1}{2} e^x (\text{Sinx} - \text{Cosx}) + c'$$

5. $\int \ell n\ x\ dx$ **ifadesini hesaplayınız.**

Çözüm : $\int \ell n\ x\ dx = x.\ \ell n\ x - \int .x.\frac{1}{x}\, dx = x\ .\ \ell nx - \int dx = x\ \ell n\ x - x + c'$

$u = \ell nx \ ; \ dv = 1dx$

$\frac{1}{x}\, dx = du \ ; \ v = x$

6. $\int$ **Arctgx dx ifadesini hesaplayınız.**

Çözüm : $\int \text{Arctgx}\ dx = x.\text{Arctg}\ x - \int x.\frac{1}{1+x^2}\, dx$

$u = \text{Arctg}\ x \quad ; \quad dv = 1dx$
$du = \frac{dx}{1+x^2} \quad ; \quad v = x$

$$= x.\text{Arctgx} - \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{x^2+1}$$

$$= x.\text{Arctgx} - \frac{1}{2}\ell n\ |x^2+1|+c'$$

$$= x.\text{Arctgx} - \frac{1}{2}\ \ell n(x^2+1)+c'$$

7. $\int$ **Sinx . Cosx dx ifadesini hesaplayınız.**

Çözüm : $u = \text{Sinx}$ $\quad dv = \text{Cosx}\,dx$

$du = \text{Cosx}\,dx \quad v = \text{Sinx}$

$$\int u\,.\,dv = u.v - \int vdu$$

$$\int \text{Sinx Cosx}\,dx = \text{Sin}^2x - \int \text{Sinx Cosx}\,dx \Rightarrow 2\int \text{Sinx Cosx}\,dx = \text{Sin}^2x$$

$$\int \text{Sinx Cosx}\,dx = \frac{1}{2}\text{Sin}^2 x + c'$$

8. $\int$ **x^2 Cosxdx ifadesini hesaplayınız.**

Çözüm : $u = x^2$ $\quad dv = \text{Cosxdx}$

$du = 2xdx \quad v = \text{Sinx}$

$$x^2\text{Sinx} - \int \text{Sinx}\,.\,2xdx$$

$$x^2\text{Sinx} - 2\int x\,\text{Sinxdx} = x^2\,\text{Sinx} - x\,\text{Cosx} + \text{Sinx} + c'$$

9. $\int x^2 e^x \, dx$ **ifadesini hesaplayınız.**

Çözüm : $u = x^2 \qquad dv = e^x\,dx$

$du = 2x\,dx \qquad v = e^x$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$ kısmi integrasyondan,

$\int x^2e^x\,dx = x^2e^x - \int e^x.2x\,dx$

$= x^2e^x - 2\int e^x.x\,dx$

$\int xe^x\,dx$ integrali için yine kısmi integrasyon uygulayalım.

$u = x \qquad dv = e^x\,dx$

$du = dx \qquad v = e^x$

$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx$

$= xe^x - e^x + c$

Şimdi yerine yazalım.

$\int x^2e^x\,dx = x^2e^x - 2\,(xe^x - e^x + c')$

$= x^2e^x - 2x\,e^x + 2e^x + c'$ olarak bulunur.

BASİT FONKSİYONLARIN İNTEGRALLERİ VE ÖRNEKLER

1. $\int a\, dx = ax+c \quad (a \in R)$

a) $\int 2\, dx = 2x+c'$

2. $\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c' \quad (n \neq -1)$

a) $\int 3x^2\, dx = 3.\ \frac{x^{2+1}}{2+1} + c = \frac{3x^3}{3} + c = x^3 + c'$

b) $\int 4x^2\, dx = 4\ \frac{x^3}{3} + c'$

3. $\int \frac{1}{x}\, dx = \ln |x| + c'$; $\int \frac{1}{u}\, du = \ln |u| + c'$

a) $\int \frac{Cosx}{Sinx}\, dx = \int \frac{du}{u} = \ln |Sinx| + c'$

$u = Sinx$

$du = Cosx\ dx$

4. $\int e^x\,dx = e^x + c'$; $\int e^u\,du = e^u + c'$

a) $\int x\,e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int e^u\,du = \frac{1}{2}e^{x^2} + c'$

$u = x^2$

$du = 2x\,dx$

$\frac{du}{2} = x\,dx$

b) $\int \mathrm{Sinx}\,e^{\mathrm{Cosx}}\,dx = -\int e^u\,du = -e^{\mathrm{Cosx}} + c'$

$u = \mathrm{Cosx}$

$du = -\,\mathrm{Sinx}\,dx$

$-\,du = \mathrm{Sinx}\,dx$

5. $\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a}a^x + c'$; $\int a^u\,du = \frac{1}{\ln|u|}a^u + c'$

a) $\int 2^x\,dx = \frac{1}{\ln 2}2^x + c'$

$\int 3^{x^2+2}\,.\,2x\,dx = \int a^u\,du = \frac{1}{\ln|x^2+2|}3^{x^2+2} + c'$

$u = x^2 + 2$

$du = 2x\,dx$

6. $\int \mathrm{Sinx}\,dx = -\,\mathrm{Cosx} + c$; $\int \mathrm{Sin}\,u\,du = -\,\mathrm{Cos}\,u + c'$

a) $\int x\,\mathrm{Sin}x^2\,dx = \int \mathrm{Sin}\,u\,.\left(\frac{du}{2}\right) = \frac{1}{2}\int \mathrm{Sin}\,u\,du$

$u = x^2$ $\qquad = \frac{-1}{2}\mathrm{Cos}\,x^2 + c'$

$du = 2x\,dx$

$\frac{du}{2} = x\,dx$

b) $\int \text{Sin}3x\ dx = \frac{1}{3} \int \text{Sin}\ u\ du = -\frac{1}{3}\ \text{Cos}\ 3x + c'$

$u = 3x$
$du = 3\ dx$
$\frac{du}{3} = dx$

7. $\int \textbf{Cosx dx} = \textbf{Sinx} + c'$; $\int \textbf{Cos u du} = \textbf{Sin u} + c'$

a) $\int \text{Cos}\ 2x\ dx = \int \text{Cos}\ u.\left(\frac{du}{2}\right) = \frac{1}{2} \int \text{Cos}\ u\ du$

$u = 2x$ $= \frac{1}{2}\ \text{Sin}\ 2x + c'$
$du = 2\ dx$
$\frac{du}{2} = dx$

b) $\int x^2 \text{Cos}\ x^3\ dx = \int \text{Cos}\ u.\left(\frac{du}{3}\right) = \frac{1}{3} \int \text{Cos}\ u\ du$

$u = x^3$ $= \frac{1}{3}\ \text{Sin}\ x^3 + c'$
$du = 3x^2\ dx$
$\frac{du}{3} = x^2\ dx$

8. $\int \frac{\textbf{dx}}{\textbf{Cos}^2\textbf{x}} = \int \textbf{Sec}^2\ \textbf{x dx} = \textbf{tanx} + c'$; $\int \textbf{Sec}^2\ \textbf{u du} = \textbf{tan u} + c'$

a) $\int \text{Sec}^2\ 2x\ dx = \int \text{Sec}^2 u\ .\left(\frac{du}{2}\right) = \frac{1}{2} \int \text{Sec}^2 u\ du$

$u = 2x$ $= \frac{1}{2}\ \tan 2x + c'$
$du = 2\ dx$
$\frac{du}{2} = dx$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{Sin^2x} = \int Cosec^2 x\, dx = -Cotx+c' \quad ; \quad \int Cosecudu = -Cot\ u+c'$

a) $\displaystyle\int Cosec^2 3x\, dx = \int Cosec^2 u.\left(\frac{du}{3}\right) = \frac{1}{3}\int Cosec^2 u\, du.$

$u = 3x$

$du = 3\, dx$

$\dfrac{du}{3} = dx$

$= \dfrac{-1}{3} Cot\ 3x + c'$

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = Arc\ tanx + c' \quad ; \quad \int \frac{du}{1+u^2}\ Arc\ tan\ u+c'$

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+9x^2} = \int \frac{dx}{1+(3x)^2} = \int \frac{du/3}{1+u^2} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{1+u^2}$

$u = 3x$

$du = 3\, dx$

$\dfrac{du}{3} = dx$

$= \dfrac{1}{3}\ arc\ tan3x+c'$

11. $\displaystyle\int tanx\ dx = -ln\ |Cosx|+c' \quad ; \quad \int tan\ u\ du = -ln\ |Cosu|+c'$

a) $\displaystyle\int tan2x\ dx = \frac{1}{2}\int tan\ u\ du. = -\frac{1}{2}\ ln\ |Cos2x|+c$

$u = 2x\ dx$

$\dfrac{du}{2} = dx$

12. $\displaystyle\int \mathbf{Cotx\ dx = ln\ |Sinx| + c'}$; $\displaystyle\int \mathbf{Cot\ u\ du = ln\ |Sinu| + c'}$

a) $\displaystyle\int \text{Cot } 3x \, dx = \frac{1}{3}\int \text{Cot } u \, du = \frac{1}{3} \ln |\text{Sin}3x| + c'$

$u = 3x$

$\dfrac{du}{3} = dx$

13. $\displaystyle\int \frac{\mathbf{dx}}{\sqrt{\mathbf{1-x^2}}} = \mathbf{arc\ Sinx + c'}$; $\displaystyle\int \frac{\mathbf{du}}{\sqrt{\mathbf{1-u^2}}} = \mathbf{arc\ Sinu + c'}$

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}} = \int \frac{du/2}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{2} \text{arc Sin}2x + c'$

$u^2 = 4x^2 = (2x)^2$

$u = 2x$

$du = 2dx$

$\dfrac{du}{2} = dx$

14. $\displaystyle\int \frac{\mathbf{du}}{\mathbf{u^2 + a^2}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{a}} \mathbf{arc\ tan} \frac{\mathbf{u}}{\mathbf{a}} \mathbf{+c'}$

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+9} = \frac{1}{3} \text{arc tan} \frac{x}{3} + c'$

$u^2 = x^2$

$u = x$

$a^2 = 9$

$a = 3$

15. $$\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a} \log \frac{u-a}{u+a} + c \quad (\text{Eğer } u^2 > a^2)$$

$$\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a} \log \frac{a-u}{a+u} + c \quad (\text{Eğer } u^2 < a^2)$$

a) $$\int \frac{2x}{4x^2-9} dx = \frac{1}{2.3} \log \frac{3-2x}{3+2x} + c'$$

$$\left.\begin{array}{l} u^2 = 4x^2 \\ u = 2x \\ a^2 = 9 \\ a = 3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} u^2 < a^2 \\ 4 < 9 \end{array}$$

16. $$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \text{arc Sin} \frac{u}{a} + c'$$

a) $$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc Sin} x + c'$$

$u^2 = x^2$ ise $u = x$

$du = dx$

$a^2 = 1$

$a = 1$

b) $$\int \frac{2}{\sqrt{9-4x^2}} = \text{arc Sin} \frac{2x}{3} + c'$$

$u^2 = 4x^2$ ise $u = 2x$

$du = 2dx$

$a^2 = 9$

$a = 3$

RASYONEL İFADELERİN İNTEGRALİ

Basit Kesirlere Ayırma Yöntemi

$P(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$

$Q(x) = b_0 x^0 + b_1 x^1 + b_2 x^2 + ... + b_m x^m$ olmak üzere $\frac{P(x)}{Q(x)}$ biçimindeki fonksiyonlara rasyonel fonksiyon denir.

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ şeklindeki fonksiyona rasyonel fonksiyon denir. Rasyonel fonksiyonda paydaki polinomun derecesi paydadaki polinomun derecesinden küçük ise bu kesir basit kesirdir. Eğer paydaki polinomun derecesi paydadaki polinomun derecesinden büyük veya eşit ise, verilen kesrin payındaki polinom paydasındaki polinoma bölünerek verilen fonksiyon bir polinom ile basit kesrin toplamı şeklinde ifade edilir.

Yani, $d\,p(x) \geq d\,Q(x)$ ise,

$\frac{P(x)}{Q(x)} = B(x) + \frac{K(x)}{Q(x)}$ şeklinde yazılır.

Örnek :

$$\frac{x^3-4x^2+x+3}{x^2-x-2} = x-3+\frac{-3}{x^2-x-2}$$

$$\frac{x^4+5x^3+8x^2+5x+1}{x^2+3x+2} = x^2+2x+\frac{x}{x^2+3x+2}$$

$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int B(x)\,dx + \int \frac{K(x)}{Q(x)}dx$ integralinde $B(x)$ in integrali kolayca alınabilir.

$\frac{K(x)}{Q(x)}$ in integralini almak için bir takım basit kesirlerin toplamı biçiminde yazmamız gerekir. Bu toplamı $T(x)$ ile gösterirsek $Q(x)$ in çarpanlarının durumuna göre :

I. Durum :

Q(x) in çarpanları arasında (ax+b) gibi birinci dereceden çarpanlar varsa

$\dfrac{K(x)}{Q(x)}$ kesri $\dfrac{A}{ax+b}$ terimlerinin dağılımı şeklinde yazılır.

Örnek : $\dfrac{2x}{(x-1)\ (x+1)}$ ifadesini basit kesirlerine ayıralım.

Çözüm :

$$\frac{2x}{(x-1)\ (x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{(A+B)\ x + A-B}{(x-1)\ (x+1)}$$

$(x+1)$ $\quad$ $(x-1)$

2x= (A+B) x+ A-B $\Rightarrow$ Belirsiz katsayılar teoremine göre (Belirsiz katsayılar teoremi iki polinomun eşit olabilmesi için $\Leftrightarrow$ aynı dereceli terimlerinin katsayıları eşit olmalıdır.

$$\left.\begin{array}{l} A+B = 2 \\ A-B = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{rl} A+B = & 2 \\ + \ A-B = & +\ 0 \\ \hline 2A = & 2 \end{array} \Rightarrow A = 1 \quad \text{ve} \quad B = 1 \quad \text{dir.}$$

$\dfrac{2x}{(x-1)\ (x+1)} = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1}$ bulunur.

II. Durum :

Q(x) in çarpanları arasında $(ax+b)^m$ biçiminde olanlar varsa bunların her biri için

T(x) toplamında $\dfrac{A_1}{ax+b} + \dfrac{A_2}{(ax+b)^2} + \ldots + \dfrac{A_m}{(ax+b)^m}$ olarak ifade edebileceğimiz

m - terim toplamı bulunur.

Örnek : $\dfrac{x+1}{(x-1)^3}$ ifadesini basit kesirlerine ayır.

Çözüm : $\dfrac{x+1}{(x-1)^3} = \dfrac{A_1}{x-1} + \dfrac{A_2}{(x-1)^2} + \dfrac{A_3}{(x-1)^3} =$

$(x-1)^2$ $\quad$ $(x-1)$ $\quad$ (1)

$$x+1 = (x^2-2x+1)\ A_1 + A_2x - A_2 + A_3$$

$$x+1 = A_1x^2 - 2A_1\,x + A_1 + A_2x - A_2 + A_3$$

$$x+1 = A_1x^2 + (-2A_1+A_2)x + A_1 - A_2 + A_3$$

$$A_1 = 0,\ A_2 - 2A_1 = 1 \quad ; \quad A_1 - A_2 + A_3 = 1$$

$$A_1 = 0,\ A_2 = 1,\ A_3 = 2$$

$\dfrac{x+1}{(x-1)^3} = \dfrac{0}{x-1} + \dfrac{1}{(x-1)^2} + \dfrac{2}{(x-1)^3}$ olarak basit kesirlere ayrılır.

III. Durum :

Q(x) in çarpanları arasında diskriminantı negatif olan her bir (ax^2+bx+c) çarpanı için T(x) toplamında bir tane $\dfrac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ terimi bulunur.

Örnek : $\dfrac{x+2}{(x+1)\,(x^2+x+5)}$ ifadesini basit kesirlerine ayır.

Çözüm :

$$\frac{x+2}{(x+1)\,(x^2+x+5)} = \frac{A}{\underset{(x^2+x+5)}{x+1}} + \frac{Bx+c}{\underset{(x+1)}{x^2+x+5}} = \frac{\frac{1}{5}}{x+1} + \frac{-\frac{1}{5}x+1}{x^2+x+5}$$

$$x+2 = Ax^2+Ax+5A+Bx^2+Bx+Cx+C$$

$$x+2 = (A+B)\,x^2+(A+B+C)\,x+5A+C$$

$$\left.\begin{array}{l} A+B = O \\ A+B+C = 1 \\ 5A+C = 2 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} C = 1 \\ A = \frac{1}{5} \\ B = -\frac{1}{5} \end{array}$$

IV. Durum :

Q(x) in çarpanları arasında bulan her bir $(ax^2+bx+c)^n$ çarpanı için T(x) de,

$\dfrac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \dfrac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \ldots + \dfrac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$ toplamı bulunur.

Örnek : $\dfrac{2x^2+3}{(x^2+x+2)^2}$ ifadesini basit kesirlerine ayır.

Çözüm : $\dfrac{2x^2+3}{(x^2+x+2)^2} = \dfrac{Ax+B}{\underset{(x^2+x+2)}{x^2+x+2}} + \dfrac{Cx+D}{\underset{1}{(x^2+x+2)^2}}$

$$2x^2+3 = Ax^3+Ax^2+2Ax+Bx^2+Bx+2B+Cx+D$$

$$2x^2+3 = Ax^3+(A+B)x^2+(2A+B+C)x+(2B+D)$$

$$\left.\begin{array}{l} A = O \\ A+B = 2 \\ 2A+B+C = O \\ 2B+D = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A = O \\ B = 2 \\ C = -2 \\ D = -1 \end{array}$$

$\dfrac{2x^2+3}{(x^2+x+2)^2} = \dfrac{2}{x^2+x+2} + \dfrac{-2x-1}{(x^2+x+2)^2}$ olarak basit kesirlerine ayrılır.

K(x) in derecesi Q(x) in derecesinden küçük olmak üzere $\int \frac{K(x)}{Q(x)}dx$ integraline örnekler verelim.

Örnek : $\int \frac{dx}{x^3-x}$ ifadesini hesaplayınız.

Çözüm :

$$\int \frac{dx}{x^3-x} = \int \frac{dx}{x(x^2-1)} = \int \frac{dx}{x(x-1)\ (x+1)}$$

$$\frac{1}{x(x-1)\ (x+1)} = \frac{A}{\underset{(x^2-1)}{x}} + \frac{B}{\underset{x(x+1)}{x-1}} + \frac{C}{\underset{x(x-1)}{x+1}}$$

$$1 = Ax^2-A+Bx^2+Bx+Cx^2-Cx$$

$$1 = (A+B+C)\ x^2+(B-C)x-A$$

$$\left.\begin{array}{l} A+B+C = O \\ B-C\ = O \\ -A = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} A = -1 \\ B = \frac{1}{2} \\ C = \frac{1}{2} \end{array}$$

$$\int \frac{dx}{x^3-x} = -\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1}$$

$$= \ln x+\frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| +c' = \ln x+\ln\left|(x-1)^{\frac{1}{2}}.(x+1)^{\frac{1}{2}}\right|+c'$$

Örnek :

$\int \frac{2xdx}{(x+1)\ (x-2)^2}$ ifadesini hesaplayınız.

Çözüm :

$$\frac{2x}{(x+1)\ (x-2)^2} = \frac{A}{\underset{(x-2)^2}{x+1}} + \frac{B}{\underset{(x+1)\ (x-2)}{x-2}} + \frac{C}{\underset{(x+1)}{(x-2)^2}}$$

$$2x = Ax^2 - 4Ax+4A+Bx^2-2Bx+Bx-2B+Cx+C$$

$$2x = (A+B)x^2+ (-B-4A+C)\ x+ (4A-2B+C)$$

$$\left.\begin{array}{l} A+B = O \\ -4A-B+C = 2 \\ 4A-2B+C = O \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} A = -\dfrac{2}{9} \\ B = \dfrac{2}{9} \\ C = \dfrac{4}{3} \end{array}$$

$$\int \frac{2x\,dx}{(x+1)\,(x-2)^2} = -\frac{2}{9}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{2}{9}\int \frac{dx}{x-2} + \frac{4}{3}\int \frac{dx}{(x-2)^2}$$

$$= -\frac{2}{9}\ln|x+1| + \frac{2}{9}\ln|x-2| - \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{x-2} + c'$$

$$= \frac{2}{9}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right| - \frac{4}{3}\cdot\frac{-1}{x-2} + c'$$

TRİGONOMETRİK DEĞİŞKEN DEĞİŞTİRME KURALI

A) İntegradında $\sqrt{a^2-x^2}$ Bulunan İntegalleri Bulma :

İçinde $\sqrt{a^2-x^2}$ den başka köklü ifade bulundurmayan fonksiyonların integrallerini hesaplamak için

$x = a.\,Sinu$ ya da $x = a.\,Cosu$

değişken değiştirmesi yapılır. $(O^0 < u < 90^0)$

Örnek : $\int \sqrt{9-x^2}\,dx = ?$

$a^2 = 9$ ise $a = 3$ o halde, $x = 3\,Sinu$ buradan,

$dx = 3\,Cosu\,du$ olur.

$$\int \sqrt{9-x^2}\,dx = \int \sqrt{9-(3\,Sinu)^2}\,3\,Cosu\,du = \int 3.\sqrt{1-Sin^2u}.\,3\,Cosu\,du.$$

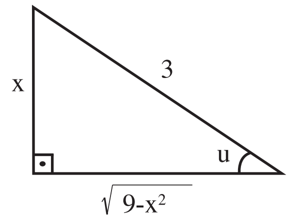
$$= 9\int \sqrt{Cos^2u}.\,Cosu\,du = 9\int Cos^2u\,du.$$

Çözüm :

$$= 9 \int \frac{1+ \text{Cos } 2u}{2} \, du = 9 . \frac{1}{2} \int (1+ \text{Cos}2u) \, du.$$

$$= \frac{9}{2} (u + \frac{1}{2} \text{ Sin2 } u) + c' = \frac{9u}{2} + \frac{9}{4} \text{ Sin2u} + c'$$

Şimdi u ve Sin 2u değerlerini bulalım.



Sin2u = 2Sinu. Cosu olduğundan

x = 3Sinu

Sinu = $\frac{x}{3}$ buna uygun dik üçgen çizersek

$$\text{Sin2u} = 2\text{Sinu} . \text{Cosu} = 2 . \frac{x}{3} . \frac{\sqrt{9-x^2}}{3}$$

$$= \frac{2x \sqrt{9-x^2}}{9}$$

Sinu = $\frac{x}{3}$ ise u = Arc Sin $\frac{x}{3}$, u ve Sin2u da yerine yazarsak,

$$\int \sqrt{9-x^2} \, dx = \frac{9}{2} u + \frac{9}{4} \text{Sin2u} + c'$$

$$= \frac{9}{2} (\text{ArcSin } \frac{x}{3}) + \frac{9}{4} \frac{2x \sqrt{9-x^2}}{9}) + c'$$

olarak bulunur.

B) İntegradında $\sqrt{x^2-a^2}$ Bulunan İntegalleri Bulma :

İçinde $\sqrt{x^2-a^2}$ den başka köklü ifade bulunmayan fonksiyonların integralleri için x = a. Secu ya da x = a.Cosecu deşiken değiştirmesi yapılır.

Örnek : $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} dx = ?$

$a^2 = 4$ ise $a = 2$

$x = 2\,\mathrm{Sec}u \Rightarrow x = \dfrac{2}{\mathrm{Cos}u}$

$dx = \dfrac{2\mathrm{Sin}u}{\mathrm{Cos}^2u}\,du$ olur.

Buna göre verilen ifadede yerine yazalım.

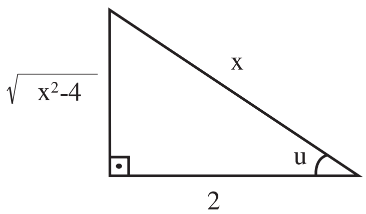
$$\int \sqrt{\frac{\dfrac{4}{\mathrm{Cos}^2u}-4}{\dfrac{4}{\mathrm{Cos}^2u}}}\cdot\frac{2\,\mathrm{Sin}u}{\mathrm{Cos}^2u}\,du = \int \sqrt{\frac{4-4\,\mathrm{Cos}^2u}{\mathrm{Cos}^2u}}\cdot\frac{\mathrm{Cos}u}{2}\,\frac{2\mathrm{Sin}u}{\mathrm{Cos}^2u}\,du.$$

$$\int \frac{2\sqrt{1-\mathrm{Cos}^2u}}{\mathrm{Cos}u}\cdot\frac{\mathrm{Cos}u}{2}\,\frac{2\mathrm{Sin}u}{\mathrm{Cos}^2u}\,du = 2\int \frac{\mathrm{Sin}u}{\mathrm{Cos}u}\cdot\frac{\mathrm{Sin}u}{\mathrm{Cos}u}\,du.$$

$$= 2\int \tan^2u.\,du = 2\int (\tan^2 u+1-1)\,du = 2\,(\tan u - u) + c' \text{ bulunur.}$$

Şimdi u ve tanu değerlerini bulalım.

$x = \dfrac{2}{\mathrm{Cos}u}$ ise $\mathrm{Cos}u = \dfrac{2}{x}$ Bunu yapan dik üçgen çizilirse



$\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{2} = \tan u$

$\tan u = \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{2}$, $\mathrm{Cos}u = \dfrac{2}{x}$ ise

$u = \mathrm{Arc\,Cos}\,\dfrac{2}{x}$

Şimdi yerlerine yazalım.

$$\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,dx = 2\,(\tan u - u) + c' = 2\,\frac{\sqrt{x^2-4}}{2} - 2\mathrm{Arc\,Cos}\,\frac{2}{x} + c'$$

C) İntegradında $\sqrt{a^2+x^2}$ Bulunan İntegalleri Bulma :

İçinde $\sqrt{a^2+x^2}$ den başka köklü ifade bulunmayan fonksiyonların integralleri için $x = a.\tan u$ ya da $x = a.\cot u$ değişken değiştirmesi yapılır.

Örnek : $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2.\sqrt{x^2+9}} = ?$

Çözüm :

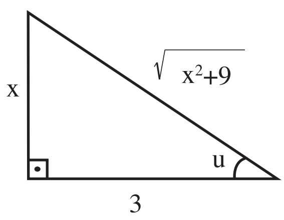
$x = a.\tan u$ olduğuna göre $x = 3 \tan u$

$\tan u = \dfrac{x}{3}$ ve $dx = \dfrac{3}{\cos^2 u} du$ olur.

$$\int \frac{dx}{x^2.\sqrt{x^2+9}} = \int \frac{\frac{3du}{\text{Cos}^2 u}}{(3\tan u)^2.\sqrt{(3\tan u)^2+9}} = \int \frac{\frac{3\,du}{\text{Cos}^2 u}}{9\tan^2 u\sqrt{9\underbrace{(\tan^2 u+1)}_{\frac{1}{\text{Cos}^2 u}}}}$$

$$= \int \frac{\frac{3\,du}{\text{Cos}^2 u}}{9.\frac{\text{Sin}^2 u}{\text{Cos}^2 u}.3\frac{1}{\text{Cos}\,u}} = \int \frac{3\,du}{\text{Cos}^2 u}.\frac{\text{Cos}^3 u}{27\,\text{Sin}^2 u}$$

$$= \int \frac{1}{9}\frac{\text{Cos}u}{\text{Sin}^2 u}du = \frac{1}{9}\int \frac{dt}{t^2} = \frac{-1}{9t} + c' = -\frac{1}{9\sin u} + c'$$



$\text{Sin}\,u = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}$ yerine yazalım.

$\displaystyle\int \frac{dx}{x^2.\sqrt{x^2+9}} = -\frac{\sqrt{x^2+9}}{9x} + c'$ olarak bulunur.

İntegradında Sin x ve Cosx'in Rasyonel İfadeleri Bulunan İntegralleri Bulma:

$\tan\frac{x}{2} = u$ değişken değiştirmesi yapılır. Daha sonra Sinx, Cosx ve dx in de u cinsinden değerlerini hesaplayınız.

Dik üçgen yardımıyla, $\sin\frac{x}{2} = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$ ve $\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$ olur.

$\boxed{\sin x = \frac{2u}{1+u^2}}$ $\boxed{\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}}$ olur. (Yarım açı formülünden)

$$u = \tan\frac{x}{2} \text{ ise } du = \frac{\frac{1}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}dx$$

$$\boxed{dx = \frac{2\,du}{1+u^2} \text{ olur.}}$$

Örnek : $\int \frac{1}{1+\sin x}dx = ?$

Çözüm :

$u = \tan\frac{x}{2}$ ise $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$ $dx = \frac{2du}{1+u^2}$

integralinde yerine yazarsak,

$$\int \frac{1+u^2}{1+u^2+2u} \cdot \frac{2\,du}{1+u^2} = \int \frac{2\,du}{(u+1)^2} = -\frac{2}{u+1} + c' \quad \text{olur.}$$

$u = \tan\frac{x}{2}$ olduğundan

$$= -\frac{2}{\tan\frac{x}{2} + 1} + c' \quad \text{olur.}$$

İlkel Fonksiyon :

[a,b] aralığında tanımlı iki fonksiyon f ve F olsun. [a,b] nin her noktasında F nin türevi varsa $F'(x) = f(x)$ ise F fonksiyonuna, f nin ilkeli denir.

Örnekler :

Türevi f(x) ile verilen fonksiyonların ilkeli olan F(x) fonksiyonlarını hesaplayınız.

$$\int f(x) = F(x)+c'$$

1. $f(x) = 4x^3$ ise $F(x) = ?$

$$\int 4x^3\,dx = 4.\frac{x^4}{3+1} + c' = x^4+c'$$

2. $f(x) = \text{Cos}x$ ise $F(x) = \text{Sin}x+c'$

3. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ise $F(x) = \text{Arc Sin}x + c'$

4. $f(x) = a^x \Rightarrow F(x) = \frac{1}{\ell na}.\ a^x + c'$ yani $\int a^x\,dx = \frac{1}{\ell na}.\ a^x+c'$

5. $f(x) = 2x\,e^{x^2} - x^2$ $F(x) = e^{x^2} - \frac{x^2}{3} + c'$ yani, $\int 2xe^{x^2}\,dx = e^{x^2} - \frac{x^2}{3} + c'$

6. $f(x) = \frac{-1}{x^2} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{x} + c'$, yani $\int \frac{-1}{x^2}\,dx = -\int \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{x} + c'$

7. $f(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow F(x) = -\text{arc Sin}x+c'$ yani $\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\text{Arc Sin}x+c'$

8. $f(x) = \frac{1}{\text{Cos}^2x} \Rightarrow F(x) = \tan x + c'$ yani $\int \frac{1}{\text{Cos}^2x}\,dx = \tan x + c'$

9. $f(x)=\text{Sin}x\ \text{Cos}x \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}\text{Sin}^2x + c'$ yani $\int \text{Sin}x.\text{Cos}x\,dx = \frac{1}{2}\text{Sin}^2x + c'$

10. $f(x) = 5\ \text{Cos}(5x+1) \Rightarrow F(x) = \text{Sin}(5x+1)+c'$ yani $\int 5.\text{Cos}(5x+1)dx = \text{Sin}(5x+1)+c'$

11. $f(x) = -\frac{1}{\text{Sin}^2x} \Rightarrow F(x) = \text{Cot}x + c'$ yani $\int -\frac{1}{\text{Sin}^2x}\,dx = \text{Cot}x + c'$

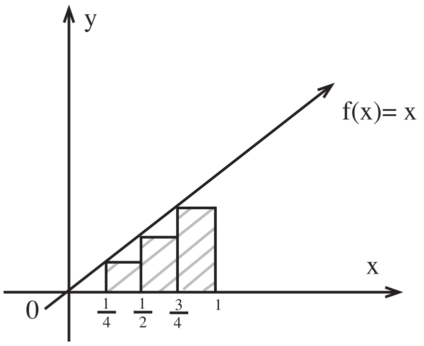
EĞRİ ALTINDA KALAN BÖLGENİN ALANI

Örnekler :

1. f:R $\rightarrow$ R ; f(x) = x doğrusu x = 0, x=1 doğruları ve x-ekseni ile sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

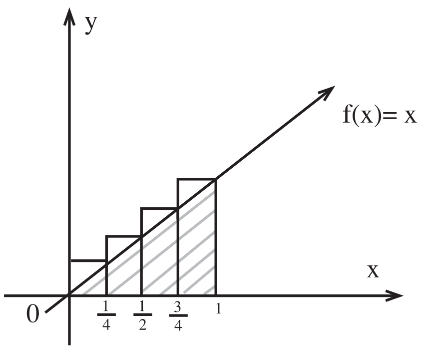
I. Adım :

[0, 1] aralığını 4 eşit parçaya bölelim.



Şekildeki dikdörtgenlerin alanları toplamı A_1 (T) ile gösterelim.

$$A_1(T) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8} \text{ dir.}$$

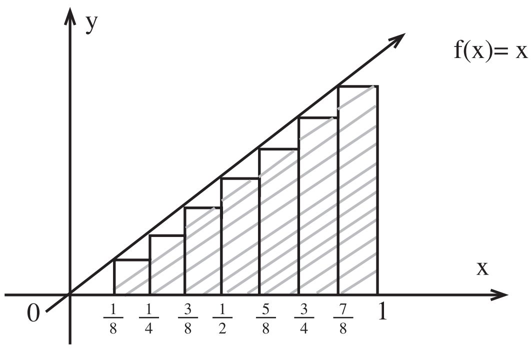


Şekildeki dikdörtgenlerin alanları toplamını U_1 (T) ile gösterelim.

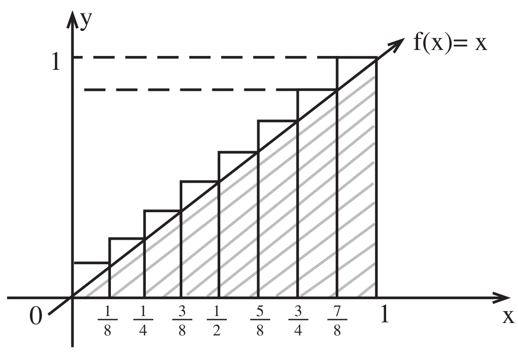
$$U_1(T) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{5}{8} \text{ dir.}$$

$A_1(T) \leq U_1(T)$ dir.

II. Adım : [0,1] aralığını 8 eşit parçaya bölelim.



$$A_2(T) = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{5}{8} + \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{8} \cdot \frac{7}{8} = \frac{7}{16}$$



$$U_2(T) = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{5}{8} + \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{8} \cdot \frac{7}{8} + \frac{1}{8} \cdot 1 = \frac{9}{16}$$

$A_1(T) \leq A_2(T)$ ve $U_1(T) \geq U_2(T)$

Her iki adımda da $A_1(T)$, $A_2(T)$ aradığımız bölgenin alanından daha küçük, $U_1(T)$, $U_2(T)$ den daha büyük olduğu görülür.

III. Adımda :

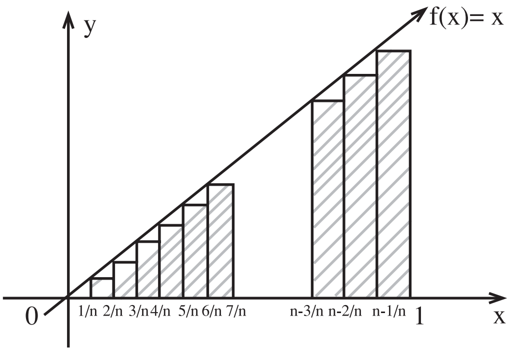
$A_1(T) \leq A_2(T) \leq A_3(T)$

$U_1(T) \geq U_2(T) \geq U_3(T)$ olacaktır.

n. Adım :

[0, 1] aralığını n eşit parçaya bölelim.

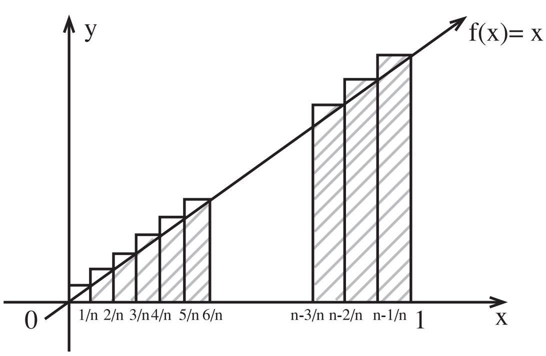
$U_n(T)$ ve $A_n(T)$ yi bulalım.



$$A_n(T) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} + \frac{1}{n} \cdot \frac{3}{n} + \ldots + \frac{1}{n} \cdot \frac{(n-3)}{n} + \frac{1}{n} \cdot \frac{(n-1)}{n}$$

$$\frac{1}{n^2}\,[1+2+3+\ldots+(n-3)+(n-2)+(n-1)] = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{(n-1).n}{2} = \frac{n-1}{2n}$$

$$A_n(T) = \frac{n-1}{2n}$$



$$U_n(T) = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n} + \frac{1}{n}\cdot\frac{3}{n} + \ldots + \frac{1}{n}\ \frac{(n-3)}{n} + \frac{1}{n}\cdot\frac{(n-2)}{n} + \frac{1}{n}\ \frac{(n-1)}{n} + \frac{1}{n}\cdot 1 =$$

$$\frac{1}{n^2}\left[1+2+3+\ldots+(n-3)+(n-2)+(n-1)+n\right] = \frac{1}{n^2}\cdot\frac{(n+1).n}{2}$$

$$= \frac{n+1}{2n} \quad \Rightarrow \quad U_n(T) = \frac{n+1}{2n}$$

Böylece $A_1(T) \leq A_2(T) \leq A_3(T) \leq \ldots \leq A_n(T)$, n büyüdükçe artan bir alanlar dizisi.

$U_1(T) \geq U_2(T) \geq U_3(T) \geq \ldots \geq U_n(T)$, n büyüdükçe azalan bir alanlar dizisi elde edilir.

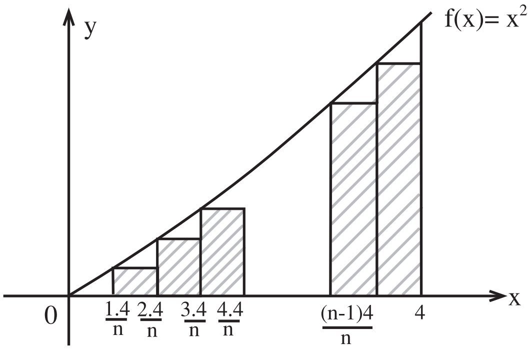
$$\lim_{n\to\infty} A_n(T) = \lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} U_n(T) = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} \text{ bulunur.}$$

$A_n(T)$ alt toplamları ile $U_n(T)$ üst toplamlarının yaklaştığı ortak limit olan 1/2 sayısı, aradığımız alanı verir.

2. $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ eğrisi , $x = 0$, $x = 4$ doğruları ve x-ekseni ile sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

[0, 4] aralığını n - eşit parçaya bölelim.



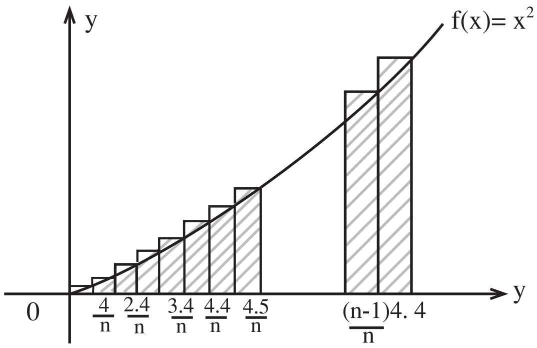
$$A_n(T) = \frac{4}{n}\cdot f\left(\frac{4}{n}\right) + \frac{4}{n}\cdot f\left(\frac{2.4}{n}\right) + \frac{4}{n} f\left(\frac{3.4}{n}\right) + \ldots + \frac{4}{n} f\left(\frac{(n-1}{n}\ 4\right)$$

$$= \frac{4}{n}\left(\frac{4}{n}\right)^2 + \frac{4}{n}\left(\frac{8}{n}\right)^2 + \frac{4}{n}\left(\frac{12}{n}\right)^2 + \ldots + \frac{4}{n}\left[\frac{4.(n-1)}{n}\right]^2$$

$$= \frac{4^3}{n^3}\left[1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2\right] = \frac{64}{6}\ \frac{(n-1)\ .\ n\ (2n-1)}{n^3} = \frac{64}{6}\cdot\frac{2n^3-3n^2+n}{n^3}$$

Hatırlatma :

$$1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1).(2n+1)}{6}$$



$$U_n\ (T) = \frac{4}{n} \cdot f\left(\frac{4}{n}\right) + \frac{4}{n} \cdot f\left(\frac{2.4}{n}\right) + \frac{4}{n}\ f\left(\frac{3.4}{n}\right) + \ldots \frac{4}{n}\ f\left(\frac{n.4}{n}\right)$$

$$= \frac{4}{n} \cdot \left(\frac{4}{n}\right)^2 + \frac{4}{n}\ \left(\frac{2.4}{n}\right)^2 + \frac{4}{n}\left(\frac{3.4}{n}\right)^2 + \ldots + \frac{4}{n}\left(\frac{n.4}{n}\right)^2 =$$

$$\frac{4^3}{n^3}\left[1^2 + 2^2 + \ldots + n^2\right] = \frac{64}{6} \cdot \frac{2n^3 + 3n^2 + 4}{n^3}$$

[0, 4] aralığını n eşit parçaya bölerek alt toplam ve üst toplamı bulduk.

$$\lim_{n\to\infty} A_n\ (T) = \lim_{n\to\infty} \frac{64}{6} \cdot \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{n^3} = \frac{64}{6} \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{n^3} =$$

$$\frac{64}{6} \cdot 2 = \frac{128}{6} = \frac{64}{3}$$

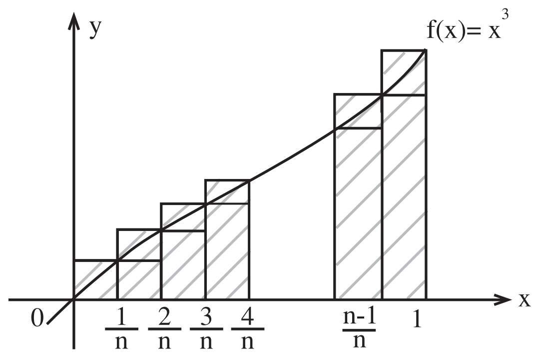
$$\lim_{n\to\infty} U_n\ (T) = \lim_{n\to\infty} \frac{64}{6} \cdot \frac{2n^3 + 3n^2 + 4}{n^3} = \frac{64}{6} \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 + 3n^2 + 4}{n^3}$$

$$\frac{64}{6} \cdot 2 = \frac{64}{3}$$

$S = \lim\limits_{n\to\infty} A_n\,(T) = \lim\limits_{n\to\infty} U_n\ (T) = \frac{64}{3}$ birim^2 bulunur.

3. $f : R \rightarrow$; $f(x) = x^3$ eğrisinin $x = 0$ dan $x = 1$'e kadar, altında kalan bölgenin alanını bulalım.

[0, 1] aralığını n- eşit alt aralığa bölelim.



$$A_n\ (T) = \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{2}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{3}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{n-1}{n}\right) =$$

$$\frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^3 + \frac{1}{n} \left(\frac{2}{n}\right)^3 + \frac{1}{n} \left(\frac{3}{n}\right)^3 + \ldots + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^3 = \frac{1}{n^4} \left[1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (n-1)^2\right]$$

$$= \frac{1}{n^4} \left[1+2+3+\ldots+(n-1)\right]^2 = \frac{1}{n^4} \left[\frac{(n-1).n}{2}\right]^2 = \frac{n^4-2n^3+n^2}{4n^4}$$

$A_n\ (T) = \dfrac{n^4 - 2n^3 + n^2}{4n^4}$ bulunur.

$$U_n\ (T) = \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{2}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{3}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n} f\left(\frac{n}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n}\right)^3 + \frac{1}{n} f\left(\frac{2}{n}\right)^3 + \frac{1}{n} f\left(\frac{3}{n}\right)^3 + \ldots + \frac{1}{n} \left(\frac{n}{n}\right)^3$$

$$= \frac{1}{n^4} \left[1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3\right] = \frac{1}{n^4} \left[1+2+3+\ldots+n\right]^2 = \frac{1}{n^4} \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4n^4} = \frac{n^4+2n^3+n^2}{4n^4}$$

$$U_n\ (T) = \frac{n^4+2n^3+n^2}{4n^4}$$

$$\lim_{n\to\infty} A_n(T) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4 - 2n^3 + n^2}{4n^4} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{n\to\infty} U_n(T) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4n^4} = \frac{1}{4}$$

O hâlde verilen bölgenin alanı $S = \frac{1}{4}$ br^2 dir.

Genel olarak :

f(x) fonksiyonunun x=a dan x=b'ye kadar eğri altında kalan alanını bulmak için [a, b] aralığını $a = x_0, x_1, x_2, ..., x_n = b$ noktaları ile n tane alt aralığa ayırıyoruz. Tabanları bu alt aralıklar olan alt ve üst dikdörtgenlerin alanları toplamlarını

$$A_n(T) = f(x_0) . (x_1 - x_0) + f(x_1) . (x_2 - x_1) + ... + f(x_i)(x_{i+1} - x_i) + ...$$

$$f(x_{n-1}) . (x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) . (x_{i+1} - x_i)$$

$$U_n(T) = f(x_1) . (x_1 - x_0) + f(x_2) . (x_2 - x_1) + ... + f(x_i)(x_{i+1} - x_i) + ...$$

$$+ f(x_n)(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) . (x_i - x_{i-1})$$ olarak yazarız.

$A_n(T)$, $U_n(T)$) nin $n \to \infty$ limitleri varsa ve birbirlerine eşitse bu ortak limit, fonksiyonunun eğri altında kalan alanına eşittir.

$m_i = E.B.A.S. \{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

E.B.A.S : en büyük alt sınır.

E.K.Ü.S : En küçük üst sınır.

$M_i = E.K.Ü.S \{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

$D x_i = |x_i - x_{i-1}|$ denirse alt ve üst toplamları.

$$A_n(T) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i , \quad U_n(T) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$ dir.

f : [a,b] → R sınırlı bir fonksiyon olsun. Alt ve üst toplamların dizisi aynı bir S limitine yakınsarlarsa yani $\lim_{n\to\infty}(A_n(T)) = \lim_{n\to\infty}(U_n(T)) = S$ ise f, fonksiyonunun integrali alınabilir denir. S'ye f'nin, [a,b] arılığında a' dan b'ye belirli integrali adı verilir.

$S = \int_a^b f dx$ veya $S = \int_a^b f(x)\, dx$ biçiminde gösterilir.

Eğer $\lim\limits_{n\to\infty} A_n\ (T) \neq \lim\limits_{n\to\infty} U_n\ (T)$ ise fonksiyonunun [a,b] de integrali alınamaz.

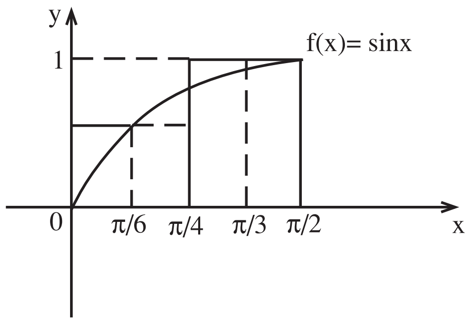
Yani, fonksiyonunun bu aralıkta integrali yoktur.

Örnekler :

1. $f : R \rightarrow [0, 1]$; $f(x) = \text{Sin}x$ fonksiyonunun $x = 0$ dan

$x = \frac{\pi}{2}$ ye kadar eğri altında kalan alanın yaklaşık değerini bulunuz.

Çözüm :



$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığını iki eşit alt aralığa ayıralım.

$$R\ (T) = \frac{\pi}{4} . f(\frac{\pi}{6}) + \frac{\pi}{4} . f(\frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{4}\ . \text{Sin}\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} . \text{Sin}\frac{\pi}{3}$$

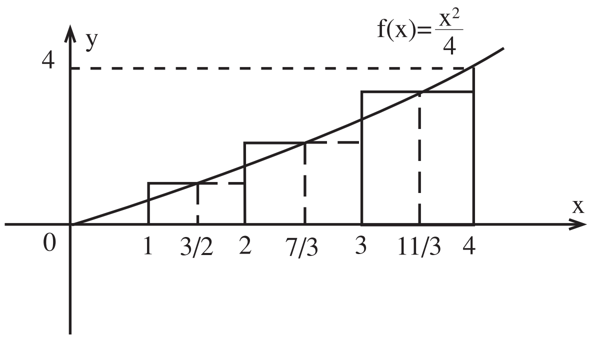
$$= \frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right] = \frac{(1+\sqrt{3}\ )\pi}{8}$$ bulunur.

Aralık sayısını arttırdığınız zaman bulduğumuz toplam aradığımız alana daha çok yaklaşır.

2. $f : R \rightarrow R$; $f(x) = \frac{x^2}{4}$ fonksiyonunun eğrisi, $x = 1$, $x = 4$ doğruları ve

x- ekseni ile sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm :



[1, 4] aralığını [1, 2] , [2, 3] , [3, 4] alt aralıklarına ayrılan ve bu aralıklarda

3/2, 7/3, 11/3 sayılarını gelişi güzel seçelim.

$R(T) = f(3/2) \, . \, (2-1) + f(\frac{7}{3}) \, . \, (3-2) + f(\frac{11}{3}) \, (4-3)$

$= \frac{9}{16} + \frac{49}{36} + \frac{121}{36} = \frac{761}{144} \cong 5{,}2$ bulunur.

f fonksiyonu [a, b] aralığında integrali alınabilen bir fonksiyon olsun. [a, b] aralığını $a = x_0, x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n = b$ noktaları ile n tane alt aralığa ayıralım.

alt aralık $[x_{i-1}, x_i]$ ve $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ olduğuna göre

$$R_n(T) = f(t_1).(x_1-x_0) + f(t_2)\,(x_2-x_1)+...+f(t_i)\,(x_i-x_{i-1})+...+f(t_n)\,(x_n-x_{n-1})=$$

$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,(x_i-x_{i-1})$ **toplamına f' nin [a,b] aralığına ait bir Riemann toplamı denir.**

Riemann toplamının U_n (T) ve A_n(T) üst ve alt toplamlar dizisi ile ilgisi:

$A_n(T) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$, $A_n(T) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$ idi.

fonksiyonun $[x_{i-1}, x_1]$ aralığındaki EBAS ve EKÜS sırasıyla m_i ve M_i olduğundan

$m_i \le f(t_i) \le M_i$ bağıntısı sağlanır.

$|x_i - x_{i-1}| = \Delta x_i > 0$ olduğundan

$m_i \Delta x_i \le f(t_i) \Delta x_i \le M_i \, . \, \Delta x_i$ ve

$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta xi \le \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$ elde edilir.

$A_n(T) \le R_n(T) \le U_n(T) \Rightarrow 0 \le R_n(T) - A_n(T) \le U_n(T) - A_n(T)$

biçiminde yazılabilir.

$\lim_{n\to\infty} (R_n(T) - A_n(T)) \le \lim_{n\to\infty} (U_n(T) - A_n(T))$

f nin [a,b] aralığında integrali alınabiliyorsa $\lim_{n\to\infty} (U_n(T) - A_n(T)) = 0$ dır.

$$\lim_{n\to\infty} R_n(T) = \lim_{n\to\infty} A_n(T) = \lim_{n\to\infty} U_n(T) \int_a^b f(x)\,dx \text{ dir.}$$

BELİRLİ İNTEGRAL

f : [a, b] → R sınırlı bir fonksiyon olsun. [a, b] yi $a = x_0, x_1, x_2, ..., x_n = b$ noktaları ile n tane alt aralığa bölelim.

R_n (T)Riemann toplamı S gibi bir limite yakınısıyorsa yani

$$\lim_{n\to\infty} R_n(T) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i).\Delta xi = S$$

ise f fonksiyonunun [a, b] aralığında integrali alınabilir, ve S'ye f nin [a, b] aralığında a dan b'y belirli integrali denir. $\int_a^b f(x)\,dx$ ile gösterilir.

1. f fonksiyonu [a,b] aralığında sınırlı değilse bu aralıkta integrali alınamaz.

2. f fonksiyonu [a, b] aralığında sınırlı ve bu aralıkta süreksiz olduğu noktaların sayısı sonlu ise f fonksuyonu [a, b] aralığında integrallenebilirdir.

3. f fonksiyonu [a, b] aralığında sınırlı ve bu aralıkta süreksiz olduğu noktaların sayısı sonlu değil ise f fonksiyonu [a, b] aralığında integrallenemez.

Örnekler :

1. $\int_0^{\pi} \text{Cosx}\,dx$; Cosx fonksiyonu [0, π] aralığında sürekli olduğundan integrallenebilir.

2. $\int_0^{2} \frac{1}{x}\,dx$; $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonu [0, 2] aralığında $\lim_{n\to\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x}$ = tanımsız

olduğundan [0, 1] de sınırlı değildir. Fonksiyonun bu aralıkta integrali yoktur.

3. $\int_{-2\pi}^{2\pi} \frac{\text{Sinx}}{x}\,dx$; $f(x) = \frac{\text{Sinx}}{x}$ fonksiyonu [-2π, 2π] aralığında

f(x) fonksiyonunun [-2π, 2π] aralığında süreksiz olduğu noktaların sayısı sonlu olduğundan integrali alınabilir.

4. $\int_{-5}^{4} [|x|]\, dx$; $f(x) = [|x|]$ fonksiyonunu [-5, 4] aralığında -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 noktalarında (9 -tane) sürekli değildir. Fakat bu aralıkta sınırlı olduğundan integrali vardır.

Örnekler :

Aşağıdaki integrallerin var olup olmadıklarını araştıralım.

1. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \text{Cotg } x\, dx$; $f(x) = \text{Cotg}x$ fonksiyonunu $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ aralığında sınırlı olmadığından integrali yoktur. $\left(\lim\limits_{x \to \pi} \text{Cotg}x = \text{tanımsızdır.}\right)$

2. $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan x}{x}\, dx$; $f(x) = \frac{\tan x}{x}$ fonksiyonu $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$ aralığında sınırlı ve sürekli olduğundan integrali vardır.

3. $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\, dx$; $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonu [-1, 1] $x = 0$ noktasında süreksizdir. Süreksiz olduğu nokta sayısı sonlu olduğundan integrallenebilir.

4. $\int_{0}^{2} (x^2 - 2x+5)\, dx$; $f(x) = x^2 - 2x+5 = (x-1)^2 +3$ fonksiyonu [0, 2] da sürekli ve sınırlı olduğundan integrallenebilir.

Teorem : f ve g fonksiyonları [a, b] aralığında integrallenebilir iki fonksiyon ve $k \in R$ verilsin.

a) $\displaystyle\int_a^b \left[(f(x) + g(x)\right] dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

b) $\displaystyle\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx \qquad (k \in R)$

c) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx, \quad c \in [a, b]$

d) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

e) $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$

f) $x \in [a, b]$ için

$$f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

I. Temel Teorem :

f, [a, b] de sürekli ve F, [a, b] de $F(x) = \int_a^b F(t)\,dt$ ile tanımlanmış ise,

[a,b] de F'nin türevi vardır ve $x \in [a, b]$ için $F'(x) = f(x)$ dir.

$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ integrali, türevi f(x)'e eşit olan bir F(x) fonksiyonudur.

F fonksiyonuna f'nin ilkel fonksiyonu; F'yi bulmak için yapılan işleme f'nin belirsiz integralini alma işlemi denir.

2. Temel Teorem :

f, $\{a, b\}$ de sürekli bir fonksiyon, F(x), f(x) in bir ilkeli yani $F' = f(x)$ ise

$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ dir.