3. ÜNİTE

DİZİLER VE SERİLER

3-1 DİZİLER

Araştırmalar

Bölümün Özeti

Değerlendirme Soruları

3-2 SERİLER

Araştırmalar

Bölümün Özeti

Değerlendirme Soruları

BU ÜNİTENİN HEDEFLERİ

Bu üniteyi çalıştığınızda,

- Reel sayı dizilerini kavrayabilecek,
- Reel sayı dizileri ile uygulama yapabilecek,
- Dizilerin yakınsaklığı ve ıraksaklığını kavrayabilecek,
- Dizilerin yakınsaklığı ve ıraksaklığı ile uygulama yapabilecek,
- Sınırlı diziler ve temel özeliklerini kavrayabilecek,
- Sınırlı diziler ile ilgili uygulama yapabilecek,
- Aritmetik ve geometrik dizileri kavrayabilecek,
- Aritmetik ve geometrik diziler ile ilgili uygulama yapabilecek,
- Serileri kavrayabilecek,
- Aritmetik ve geometrik serileri kavrayabilecek,
- Seriler ile ilgili uygulama yapabileceksiniz.

NASIL ÇALIŞMALIYIZ?

- "Matematik 1" kitabından fonksiyonlar konusunu tekrarlayın.
- "Matematik 1" kitabından eğim konusunu tekrarlayın.
- "Matematik 1" kitabından küme ve alt küme konusunu tekrarlayın.
- Problem çözme aşamalarından olan "model oluşturma" stratejisini kullanın.
- Bir model araştırırken listeleme veya tablolama yapmak faydalı olabilir.
- Konular içindeki problemleri ve alıştırmaları yanıtlayın.
- Konu sonunda verilen araştırma ve değerlendirme sorularını yanıtlayın.

BÖLÜM 3-1

DİZİLER

- ***DİZİLER VE FONKSİYONLAR***
- ***SABİT DİZİLER***
- ***DİZİLERİN EŞİTLİĞİ***
- ***DİZİLERDE İŞLEMLER***
- ***MONOTON DİZİLER***
- ***ALT DİZİLER***
- ***BİR SAYININ KOMŞULUĞU***
- ***BİR DİZİNİN HEMEN HEMEN HER TERİMİ***
- ***GENİŞLETİLMİŞ REEL SAYILAR***
- ***YAKINSAK VE IRAKSAK DİZİLER***
- ***SINIRLI DİZİLER***
- ***DİZİNİN LİMİTLERİ İLE İLGİLİ TEOREMLER***
- ***DİZİNİN LİMİTLERİ İLE İLGİLİ ÖZELİKLER***
- ***ARİTMETİK DİZİLER***
- ***GEOMETRİK DİZİLER***

GİRİŞ

Diziler bir çok uygulaması ile matematiğin temel kavramlarından bir tanesidir. Dizi sıralı bir listeyi oluşturan fonksiyondur. Örneğin, bir kişi 1 ay süre ile hergün bir önceki günün iki katı olmak üzere para biriktirmeye karar veriyor ve ilk gün için 10 000 TL biriktiriyor. $f(n)=10000\cdot 2^{n-1}$ olarak tanımlanan fonksiyon $n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ldots$ olduğu zaman dizinin terimlerini verir.

10 000, 20 000, 40 000, 80 000, 160 000, 320 000, 640 000,…

Yani, bu kişinin hergün için biriktirmesi gereken miktarı gösterir.

◆ *DİZİLER VE FONKSİYONLAR*

Şimdi paranın bileşik faizde artış örneğini ele alalım. Varsayalım ki 10 000 000 TL niz var ve bunu yıllık %5 bileşik faizle vadeli hesaba yatırıyorsunuz. $f(n)=10\ 000\ 000\left(1+\dfrac{0{,}05}{1}\right)^n=10\ 000\ 000(1{,}05)^n$ olarak tanımlanan fonksiyon n yıl sonraki hesap bakiyesini vermektedir.

$$f(1), f(2), f(3), f(4), f(5),\ldots$$

olarak bulunan değerler her yıl sonundaki hesap bakiyesini göstermektedir. Terimler yaklaşık olarak

10 500 000, 11 025 000, 11 576 250, 12 155 062,… dir.

Şimdi sonlu ve sonsuz dizinin matematiksel olarak tanımını verelim.

Dizi

Sonsuz dizi tanım kümesi pozitif doğal sayılar kümesi olan bir fonksiyondur.

Sonlu dizi, n sabit bir doğal sayı olmak üzere tanım kümesi $D=\{1,2,3,...,n\}$ olan bir fonksiyondur.

Bazı kaynaklarda sıfır sayısı doğal sayılar kümesine dahil edilmemektedir. Biz burada sıfır sayısını dahil ettik. Yani, $N=\{0,1,\ 2,\ 3,\ ...,\ n,...\}$ olarak alındı.

Her fonksiyon bir dizi midir?

Her dizi bir fonksiyon olduğu için fonksiyonlar konusunda tartışılan her kavram diziler konusuna uygulanabilir. Burada değerler kümesini y olarak gösterme yerine, $a_n = f(n)$ olarak yazmak bu konunun öğretiminde kullanılan ortak bir yaklaşımdır; n dizinin tanım kümesindeki bir pozitif doğal sayıdır. Dizinin terimleri sırasıyla

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5,..., a_n,...$ dır.

f dizisi (fonksiyonu) genel olarak

$$(a_1, a_2, a_3, a_4,..., a_n,...)$$

şeklinde gösterilir ve kısaca

$$(a_n)$$

olarak yazılır.

$f(1), f(2), f(3),.....$ reel sayılarına sırasıyla dizinin birinci, ikinci, üçüncü… terimleri,

$f(n) = a_n$

reel sayısına ise dizinin n. terimi ya da **genel terimi** denir.

Dizilerde terimlerin sırası önemlidir. Neden?

ÖRNEK 1 ⇨ Aşağıda verilen fonksiyonların dizi olup olmadığını bulunuz.

(A) $f(n)=\dfrac{n^2}{n+1}$ (B) $f(n)=\dfrac{n+1}{n-2}$

ÇÖZÜM ⇨ (A) Şimdi dizi tanımını hatırlayalım. Dizi, tanım kümesi pozitif doğal sayılar olan bir fonksiyondur. $f(n)=\dfrac{n^2}{n+1}$ fonksiyonunda her n=1,2,3,… doğal sayılarına bir gerçek sayı karşılık gelmektedir. O halde, $f:N\rightarrow R$ olduğundan bir dizidir.

(B) $f(n)=\dfrac{n+1}{n-2}$ fonksiyonunda her n = 1, 2, 3, 4,… doğal sayılarına bir gerçek sayı karşılık gelmemektedir. Çünkü n = 2 için fonksiyon tanımsızdır. O halde, f fonksiyonu bir dizi değildir.

ALIŞTIRMA 1 ⇨ Verilen fonksiyonların dizi olup olmadığını bulunuz.

(A) $f(n)=\sqrt{n}$ (B) $f(n)=\sqrt{4-n}$

ÖRNEK 2 ⇨ Verilen her dizinin ilk dört terimini yazınız.

(A) $(a_n)=(3n-1)$ (B) $\left(\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$

ÇÖZÜM ⇨ (A) $a_1=3\cdot1-1=2$ (B) $a_1=\dfrac{(-1)^{1+1}}{1}=1$

$a_2=3\cdot2-1=5$ $a_2=\dfrac{(-1)^{2+1}}{2}=-\dfrac{1}{2}$

$a_3=3\cdot3-1=8$ $a_3=\dfrac{(-1)^{3+1}}{3}=\dfrac{1}{3}$

$a_4=3\cdot4-1=11$ $a_4=\dfrac{(-1)^{4+1}}{4}=-\dfrac{1}{4}$

Yukarıdaki ÖRNEK 1 de $(a_n)=(3n-1)$ ve $\left(\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$ neyi ifade etmektedir?

ALIŞTIRMA 2 ➾ Verilen her dizinin ilk beş terimini yazınız.

(A) $(a_n) = ((0,3)(2)^{n-1} + 0,2)$ (B) $\left(\dfrac{1}{2n-1}\right)$

◆ *SABİT DİZİLER*

Varsayalım ki \$400 dolarınız var ve bu parayı bir bankada güvence altına almak istiyorsunuz. Yalnız bankaya gittiğinizde öğreniyorsunuz ki paranızı vadeli hesaba yatıramıyorsunuz. Çünkü vadeli hesap açtırmak için en az \$500 dolarınız olması gerekiyor. Siz de paranızı vadesiz hesaba yatırıyorsunuz. $f(n) = 400$ olarak tanımlanan f fonksiyonu varsayalım ki sizin n gün sonraki hesap bakiyenizi vermektedir. Hergün sonraki hesap bakiyeniz

$$400, 400, 400, 400, \ldots, 400, \ldots \text{ dır.}$$

Dikkat edilirse bu dizinin bütün terimleri birbirine eşittir.

Sabit Dizi

(a_n) gibi bir dizi, her tanım kümesi elemanına (n pozitif doğal sayısına) karşılık aynı değeri alıyorsa bu diziye sabit dizi denir. Kısaca,

$\forall n \in N^+$ *için* $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots. = a_n$ dir.

ÖRNEK 3 ➾ Verilen her dizinin sabit bir dizi olup olmadığını bulunuz.

(A) $(a_n) = (7)$ (B) $(b_n) = ((-1)^{n+1})$

ÇÖZÜM ➾ (A) İlk önce (a_n) dizisinin terimlerini n =1, 2, 3 ,4,… için yazalım.

$(a_n) = (7) = (7, 7, 7, 7, \ldots, 7, \ldots)$

(a_n) dizisi her tanım kümesi elemanı için aynı değeri aldığından sabit bir dizidir.

(B) $(b_n) = ((-1)^{n+1}) = (1,-1, 1,-1, \ldots, 1,-1, \ldots)$

(b_n) dizisi her tanım kümesi elemanı için –1 veya 1 değerini aldığı için sabit bir dizi değildir.

ALIŞTIRMA 3 ➾ Verilen dizilerin sabit bir dizi olup olmadığını bulunuz.

(A) $(a_n) = \left((-3)^{n+1}\right)$ (B) $\left((-1)^{2n+1}\right)$

◆ *DİZİLERİN EŞİTLİĞİ*

İstanbul, Ankara ve Ankara'nın ilçesi olan Polatlı için güneşin doğuş saati (imsak) 2000 Şubat ayının ilk 5 günü için aşağıda tabloda verilmektedir.

Tablo 1					
Şubat	1	2	3	4	5
Ankara	5:23	5:22	5:21	5:20	5:19
Polatlı	5:23	5:22	5:21	5:20	5:19
İstanbul	5:40	5:39	5:38	5:37	5:36

Dikkat edilirse Ankara ve Polatlı için aynı tanım kümesi elemanına (n pozitif doğal sayısına) karşılık gelen terimlerin eşit olduğu görülüyor. Fakat bu durum İstanbul için geçerli değildir. Yani, $a_1 = b_1 \neq c_1$, $a_2 = b_2 \neq c_2$, $a_3 = b_3 \neq c_3$, $a_4 = b_4 \neq c_4$, $a_5 = b_5 \neq c_5$ tir.
Bu durumu şu şekilde özetleyebiliriz.

İki Dizinin Eşitliği

Aynı tanım kümesi elemanına (n pozitif doğal sayısına) karşılık gelen terimleri eşit olan (a_n) *ve* (b_n) gibi dizilere eşit diziler denir. Kısaca,

$$\forall n \in N^+ \text{ için } \; a_n = b_n \Leftrightarrow (a_n) = (b_n) \text{ dir.}$$

Burada şu unutulmamalıdır ki iki dizinin eşit olması aynı indise (n pozitif doğal sayısına) karşılık gelen terimlerin eşit oluşuyla mümkündür.

ÖRNEK 4 ⇨ Aşağıda verilen dizilerin birbirine eşit olup olmadığını bulunuz.

(A) $(a_n) = ((-1)^{n-1})$ (B) $(a_n) = ((-1)^n)$

$(b_n) = ((-1)^n)$ $(b_n) = (\cos n\pi)$

ÇÖZÜM ⇨ (A) Tanım kümesi olan n=1,2,3,4,…,n,… için dizilerin terimlerini veya değerler kümesini bulalım.

$(a_n) = ((-1)^{n-1})$ = (1,-1, 1,-1, 1,-1,…,1,-1,…)

$(b_n) = ((-1)^n)$ = (-1, 1,-1, 1,-1, 1,…,-1, 1,…)

Görüldüğü gibi bu diziler birbirine eşit değildir. Çünkü $a_1 \neq b_1, a_2 \neq b_2, ..., a_n \neq b_n, ...$ Kısaca, $\forall n \in N^+$ için $a_n \neq b_n$ dir.

(B) $(a_n) = ((-1)^n)$=(-1, 1,-1, 1,-1, 1,…,-1, 1,…)

$(b_n) = (\cos n\pi)$=(-1, 1,-1, 1,-1, 1,…,-1,1,…)

Diziler birbirine eşittir çünkü $\forall n \in N^+$ için $a_n = b_n$ dir.

ALIŞTIRMA 4 ⇨ Aşağıda verilen dizilerin birbirine eşit olup olmadığını bulunuz.

(A) $(a_n) = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)$ (B) $(a_n) = (\sin n\pi)$

$(b_n) = (1 + \dfrac{1}{n+1})$ $(b_n) = (0)$

ÖRNEK 5 ⇨ $(a_n) = (1+3+5+...+(2n-1))$ ve $(b_n) = (n^2)$ olarak verilen dizilerin eşit olup olmadığını bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ $(a_n) = (1+3+5+...+(2n-1))$ dizisi $\forall n \in N^+$ için (n^2) ye eşittir; çünkü

1+3+5+…+$(2n-1) = n^2$ dir.

O zaman, $(a_n) = (n^2)$ ve $(b_n) = (n^2)$ olduğundan dolayı (a_n) ve (b_n) dizileri birbirine eşittir.

◆ DİZİLERDE İŞLEMLER

Varsayalım ki iki sporcu 5 gün sürece antremana başlıyor. Birinci sporcu ilk gün 20 km koşuyor ve her gün bir önceki günden 5 km daha fazla koşmaya karar veriyor. İkinci sporcu ise ilk gün 30 km koşuyor ve hergün bir önceki günden 5 km daha fazla koşmaya karar veriyor.

Birinci sporcunun koşacağı mesafe

$$f(n) = 5n + 15$$

fonksiyonu ile gösterilir. 5 gün boyunca koşacağı mesafe

20, 25, 30, 35, 40 tır.

İkinci sporcunun koşacağı mesafe

$$g(n) = 5n + 25$$

fonksiyonu ile gösterilir. Bu sporcunun beş gün boyunca koşacağı mesafe

30, 35, 40, 45, 50 dir.

Bu iki sporcunun her gün koştuğu toplam mesafe ne kadardır?

1. gün	20+30=50 km
2. gün	25+35=60 km
3. gün	30+40=70 km
4. gün	35+45=80 km
5. gün	40+50=90 km

İkinci sporcu diğer sporcudan her gün ne kadar fazla koşmaktadır?

1. gün	30-20=10 km
2. gün	35-25=10 km
3. gün	40-30=10 km
4. gün	45-35=10 km
5. gün	50-40=10 km

Birinci sporcu her gün ikinci sporcunun koştuğu mesafenin kaçta kaçını koşmuştur?

1. gün $\frac{20}{30}=\frac{2}{3}$ 2. gün $\frac{25}{35}=\frac{5}{7}$

3. gün $\frac{30}{40}=\frac{3}{4}$ 4. gün $\frac{35}{45}=\frac{7}{9}$

5. gün $\frac{40}{50}=\frac{4}{5}$

Birinci sporcu daha önce koştuğu mesafeyi hergün için iki katına çıkarırsa hergün ne kadar koşar?

1. gün $2\cdot 20=40$ km
2. gün $2\cdot 25=50$ km
3. gün $2\cdot 30=60$ km
4. gün $2\cdot 35=70$ km
5. gün $2\cdot 40=80$ km

Öyleyse, (a_n) *ve* (b_n) birer dizi ve $k\in R$ olmak üzere diziler üzerinde işlemler aşağıdaki şekilde özetlenebilir.

Dizilerin Toplamı, Farkı, Çarpımı, Bölümü ve Bir Dizinin Bir Sayı ile Çarpımı

$$(a_n)+(b_n) = (a_n+b_n)$$
$$(a_n)-(b_n) = (a_n-b_n)$$
$$(a_n)\cdot(b_n) = (a_n\cdot b_n)$$
$$(a_n):(b_n) = (a_n:b_n),\ (b_n\neq 0)$$
$$k\cdot(a_n)=(k\cdot a_n)$$

ÖRNEK 6 ⇨ $(a_n)=(1, 2, 3, 4,\ldots,n,\ldots)$

$(b_n)=(1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2},\ldots,\frac{n+1}{2},\ldots)$

dizileri veriliyor. Aşağıda istenen dizileri bulunuz.

(A) $(a_n)+(b_n)$ (B) $(a_n)-(b_n)$

(C) $(a_n)\cdot(b_n)$ (D) $(a_n):(b_n)$

(E) $2\cdot(b_n)$

ÇÖZÜM ⇨ (A) $(a_n)+(b_n)=(1+1,\ 2+\frac{3}{2},\ 3+2,\ 4+\frac{5}{2},...,n+\frac{n+1}{2},...)$

$$=(2,\ \frac{7}{2},\ 5,\ \frac{13}{2},...,\frac{3n+1}{2},...)=\left(\frac{3n+1}{2}\right)$$

(B) $(a_n)-(b_n)=(1-1,\ 2-\frac{3}{2},\ 3-2,\ 4-\frac{5}{2},...,n-\frac{n+1}{2},...)$

$$=(0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ ...,\frac{n-1}{2},...)=\left(\frac{n-1}{2}\right)$$

(C) $(a_n)\cdot(b_n)=(1\cdot 1,\ 2\cdot\frac{3}{2},\ 3\cdot 2,\ 4\cdot\frac{5}{2},...,n\cdot\frac{n+1}{2},...)$

$$=(1,\ 3,\ 6,\ 10,...,\frac{n(n+1)}{2},...)=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

(D) $(a_n):(b_n)=(\frac{1}{1},\frac{2}{\frac{3}{2}},\frac{3}{2},\frac{4}{\frac{5}{2}},...,\frac{n}{\frac{n+1}{2}},...)=(1,\ \frac{4}{3},\ \frac{3}{2},...\frac{2n}{n+1},...)$

$$=\left(\frac{2n}{n+1}\right)$$

(E) $2\cdot(b_n)=2\cdot(1,\ \frac{3}{2},\ 2,\ \frac{5}{2},...,\frac{n+1}{2},...)$

$$=(2,3,4,5,\ldots,\ n+1,\ldots)=(n+1)$$

ALIŞTIRMA 5 ⇨ $(a_n)=(1)$ ve $(b_n)=\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$ dizileri veriliyor. Aşağıda istenen dizileri bulunuz.

(A) $(a_n)+(b_n)$ (B) $(a_n)-(b_n)$ (C) $(a_n)\cdot(b_n)$

(D) $3\cdot(b_n)$ (E) $(b_n):(a_n)$

◆ *MONOTON DİZİLER*

4 firmanın 1990 ve 2000 yılları arasındaki çalışanları sayısı aşağıda verilmektedir.

Tablo 2											
Yıllar	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
1. firma	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23
2. firma	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20
3. firma	7	9	13	12	13	15	12	18	20	19	21
4. firma	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10

Yukarıdaki tablodan görüldüğü üzere 1. firmanın her yıl eleman sayısı artmakta, 2. firmanın azalmakta, 3. firmanın eleman sayısı yıllara göre değişmekte ve son olarak 4. firmanın eleman sayısı 10 yıl boyunca sabit kalmaktadır.

1. firmada

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < \ldots < a_{10}$$

2. firmada

$$b_1 > b_2 > b_3 > b_4 > b_5 > \ldots > b_{10}$$

3. firmada

$c_1 < c_2 < c_3 \quad c_3 > c_4 \quad c_4 < c_5, \ldots$ ve

4. firmada

$d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = \ldots = d_{10}$ dur.

Şimdi yukarıdaki sonucu şu şekilde özetleyebiliriz.

Artan, Azalan ve Monoton Diziler

Bir (a_n) dizisinde her a_n terimi için $a_n < a_{n+1}$ koşulu gerçekleşiyorsa bu diziye monoton artan; her a_n terimi için $a_n > a_{n+1}$ koşulu gerçekleşiyorsa bu diziye monoton azalan dizisi denir.

Artan ya da azalan dizilere de kısaca monoton diziler denir.

Yukarıdaki firmalardan hangisi artan, azalan ve monoton dizileri göstermektedir?

ÖRNEK 7 ⇨ Aşağıda genel terimleri verilen dizilerin monoton dizi olup olmadığını bulunuz.

(A) $a_n = 2n+1$ (B) $b_n = \dfrac{1}{2n-1}$ (C) $c_n = (-1)^{n+1}$

ÇÖZÜM ⇨ Dizilerin terimlerini n = 1, 2, 3, 4, … için bulalım.

$$(a_n) = (2n+1) = (3,5,7,\ 9,\ldots,2n+1,\ldots)$$

$$(b_n) = (\frac{1}{2n-1}) = (1,\frac{1}{3},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{7},\ldots,\frac{1}{2n-1},\ldots)$$

$$(c_n) = \left((-1)^{n+1}\right) = (1,-1,\ 1,-1,\ldots,-1\ldots)$$

Burada görüldüğü üzere (a_n) dizisinde $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n < a_{n+1} < \ldots$, (b_n) dizisinde $b_1 > b_2 > b_3 > \ldots > b_n > b_{n+1} > \ldots$ ve (c_n) dizisinde $c_1 > c_2$, $c_2 < c_3$, $c_3 > c_4, \ldots$ koşulları gerçekleşmektedir. Bu örneklerde $\forall n \in N^+$ için (a_n) dizisi sürekli artmakta, (b_n) dizisi sürekli azalmakta ve (c_n) dizisi ise azalan, artan, azalan, artan,… bir eğilim göstermektedir. Bu yüzden (c_n) dizisinin azalan veya artan olduğunu söylemek mümkün değildir. Öyleyse, sadece (a_n) ve (b_n) dizileri monoton dizilerdir.

ALIŞTIRMA 6 ⇨ Genel terimleri aşağıda verilen dizilerin monoton dizi olup olmadığını bulunuz.

(A) $a_n = \dfrac{n^2-2}{n+1}$ (B) $b_n = (-1)^n \cdot n$

a, b, c, d $\in$ R olmak üzere, genel terimi $a_n = \dfrac{a \cdot n + b}{c \cdot n + d}$ olan dizi için

a) $c \cdot n + d = 0$ ve $n = \dfrac{-d}{c} > 1$ ise dizi monoton değildir.

b) $\dfrac{-d}{c} < 1$ ve $ad - bc > 0$ ise dizi monoton artandır.

c) $\dfrac{-d}{c} < 1$ ve $ad - bc < 0$ ise dizi monoton azalandır.

d) $ad - bc = 0$ ise dizi sabit dizidir.

ÖRNEK 8 ⇨ Aşağıda genel terimleri verilen dizilerin monoton dizi olup olmadığını bulunuz.

(A) $a_n = \dfrac{3n-2}{3n-7}$ (B) $b_n = \dfrac{2n+3}{5n-3}$ (C) $c_n = \dfrac{5n-2}{3n+5}$

ÇÖZÜM ⇨ (A) $a_n = \dfrac{3n-2}{3n-7}$ genel terimi $a_n = \dfrac{an+b}{cn+d}$ formunda olduğundan dolayı $a=3$, $b=-2$, $c=3$ ve $d=-7$ dir.

$$-\frac{d}{c} = -\frac{-7}{3} = \frac{7}{3} > 1$$

olduğundan dizi monoton değildir; çünkü $a_1 = -\dfrac{1}{4}$, $a_2 = -4$, $a_3 = \dfrac{7}{2}$,…dır. Yani, $a_1 > a_2, a_2 < a_3,....$ dır.

(B) $b_n = \dfrac{2n+3}{5n-3}$ genel teriminde $a=2$, $b=3$, $c=5$ ve $d=-3$ tür.

$-\dfrac{d}{c} = -\dfrac{-3}{5} = \dfrac{3}{5} < 1$ ve $ad-bc = -6-15 = -21 < 0$ olduğundan dizi monoton azalandır.

(C) $c_n = \dfrac{5n-2}{3n+5}$ genel teriminde $a=5$, $b=-2$, $c=3$ ve $d=5$ tir.

$-\dfrac{d}{c} = -\dfrac{5}{3} < 1$ ve $ad-bc = 25+6 > 0$ olduğundan dizi monoton

artandır.

ALIŞTIRMA 7 ⇨ Aşağıda genel terimleri verilen dizilerin monoton dizi olup olmadığını bulunuz.

(A) $b_n = \dfrac{n+5}{n}$ (B) $a_n = \dfrac{2n-5}{n+2}$ (C) $c_n = \dfrac{n+2}{2n-5}$

◆ *ALT DİZİLER*

Şimdi "Diziler ve Fonksiyonlar" bölümünde verdiğimiz, paranın bileşik faizde artış örneğine geri dönelim. Biliyoruz ki $f(n) = a_n = 10\,000\,000(1{,}05)^n$ olarak tanımlanan fonksiyon, n yıl sonraki hesap bakiyesini vermektedir. Dizinin terimleri

10 500 000, 11 025 000, 11 576 000, 12 155 062,… dır.

Tek aylardaki hesap bakiyesi

10 500 000, 11 576 000,…

ve çift aylardaki hesap bakiyesi

11 025 000, 12 155 062,… dır.

Görüldüğü üzere tek aylardaki hesap bakiyesi $f(n) = a_{2n-1} = 10\ 000\ 000(1{,}05)^{2n-1}$ ve çift aylardaki hesap bakiyesi $f(n) = a_{2n} = 10\ 000\ 000(1{,}05)^{2n}$ fonksiyonları ile tanımlanır. Dikkat edilirse (a_{2n-1}) ve (a_{2n}) dizisinin terimleri (a_n) dizisinin terimlerinden bazılarını içermektedir. Buna göre (a_{2n-1}) ve (a_{2n}) dizileri (a_n) dizisinin bir alt kümesidir.

Alt Dizi

(a_n) bir dizi olsun. (a_n) dizisinin terimlerinden bazıları, yeni bir kurala göre seçilerek yeni bir dizi oluşturulabiliyorsa bu yeni diziye (a_n) dizisinin bir alt dizisi denir.

ÖRNEK 9 ⇨ Genel terimi $a_n = 2n-1$ olan bir dizi veriliyor. Genel terimleri $b_n = 2n+1$ ve $c_n = 2n-7$ olarak verilen dizilerin (a_n) dizisinin birer alt dizisi olup olmadığını bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ (a_n), (b_n) ve (c_n) dizilerinin terimlerini yazalım.

$$(a_n) = (1, 3, 5, 7, ..., 2n-1, ...)$$
$$(b_n) = (3, 5, 7, ..., 2n+1, ...)$$
$$(c_n) = (-5, -3, -1, 1, 3, ..., 2n-7, ...)$$

Bir dizinin diğer bir dizinin alt dizisi olabilmesi için, alt dizinin verilen dizinin bazı terimlerini yeni belirli bir kurala göre içermesi gerekir. Şimdi (b_n) dizisini ele alalım. Dikkat edilirse $b_n = 2n+1$ genel terimi $a_n = 2n-1$ genel teriminde n yerine $n+1$ konulmasından elde edilmiştir. Kısaca,

$(b_n) = (a_{n+1}) = (2(n+1)-1) = (2n+1) = (3, 5, 7, ..., 2n+1, ...)$ dır.

Benzer biçimde $c_n = 2n-7$ de $a_n = 2n-1$ genel teriminde n yerine $n-3$ konulmasından elde edilmiştir.

$(c_n) = (a_{n-3}) = (2(n-3)-1) = (2n-7) = (-5,-3,-1,1,3,...,2n-7,...)$
(b_n) ve (c_n) dizisinin terimlerine dikkat edilirse (b_n) dizisi (a_n) dizisinin bir alt dizisi iken (c_n) dizisi (a_n) dizisinin bir alt dizisi değildir. Neden? Çünkü (b_n) dizisinin oluşumunda (a_n) dizisinde n yerine gelen $k_n = n+1$ artan bir pozitif doğal sayı dizisi iken (c_n) dizisinin oluşumunda (a_n) dizisinde n yerine gelen $k_n = n-3$ bir pozitif doğal sayı dizisi değildir. O zaman bir alt dizi olma tanımına şunu da eklememiz gerekiyor.

Alt Dizi Oluşturma Kuralı

Alt dizi oluşturmak için kural bulunurken n yerine n nin bir $g: N^+ \to N^+$ ve artan, $k_n = g(n)$ fonksiyonu konacaktır. Kısaca,

$g: N^+ \to N^+$ ve $k_n = g(n) < k_{n+1} = g(n+1)$ koşulu sağlanmalıdır.

ALIŞTIRMA 8 ⇒ $(a_n) = \left(\dfrac{1}{n}\right)$ dizisi veriliyor. Genel terimleri $b_n = \dfrac{1}{n} + 1$ ve $c_n = \dfrac{1}{2n}$ olan dizilerin (a_n) dizisinin birer alt dizisi olup olmadığını bulunuz.

ÖRNEK 10 ⇒ $(a_n) = (n^2)$ dizisinin bazı alt dizilerini bulunuz

ÇÖZÜM ⇒ (a_n) dizisinin terimlerini yazalım.

$$(a_n) = (1, 4, 9, 16, ..., n^2, ...)$$

Şimdi de $(a_n) = (n^2)$ dizisinin bazı alt dizilerini bulalım.

$a_n = n^2$ genel teriminde n yerine $k_n = n^2$ koyalım. O zaman,

$(a_{n^2}) = (b_n) = (n^4) = (1, 16, 81, ..., n^4, ...)$ olur.

$a_n = n^2$ genel teriminde n yerine $k_n = 2n+1$ koyalım. O zaman

$(a_{2n+1}) = (c_n) = ((2n+1)^2) = (9, 25, ..., (2n+1)^2, ...)$ olur.

Görüldüğü üzere k_n olarak seçilen n^2 ve $2n+1$, alt dizi oluşturma kuralını sağlamaktadır. Yani, $k_n = g(n) = n^2$ ve $k_n = g(n) = 2n+1$ fonksiyonları $N^+ \to N^+$ artan bir fonksiyondur.

ÖRNEK 11⇨ $(a_n) = \left(\dfrac{1}{n}\right)$ dizisi veriliyor. Aşağıdaki dizilerin (a_n) dizisinin birer alt dizisi olup olmadığını bulunuz.

(A) $(a_{2n+1}) + (a_{2n-1})$
(B) $(a_{2n+1}) \cdot (a_{2n-1})$
(C) $(a_{2n+1}) : (a_{2n-1})$

ÇÖZÜM ⇨ (A) $(a_{2n+1}) = \left(\dfrac{1}{2n+1}\right)$ ve $(a_{2n-1}) = \left(\dfrac{1}{2n-1}\right)$dir. Görüldüğü üzere (a_{2n+1}) ve (a_{2n-1}) dizileri (a_n) dizisinin birer alt dizisidir.

$$(a_{2n+1}) + (a_{2n-1}) = (a_{2n+1} + a_{2n-1}) = \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n-1}\right) = \left(\frac{4n}{4n^2-1}\right)$$

bulunur.

$(a_{k_n}) = \left(\dfrac{1}{k_n}\right) = \left(\dfrac{4n}{4n^2-1}\right)$ eşitliğinden $k_n = \dfrac{4n^2-1}{4n}$ dir.

$n \in N^+$ için $k_n = \dfrac{4n^2-1}{4n} \notin N^+$ olduğundan $(a_{2n+1} + a_{2n-1}) = \dfrac{4n^2-1}{4n}$ dizisi (a_n) dizisinin bir alt dizisi değildir.

(B) $(a_{2n+1}) \cdot (a_{2n-1}) = (a_{2n+1} \cdot a_{2n-1}) = \left(\dfrac{1}{2n+1} \cdot \dfrac{1}{2n-1}\right) = \left(\dfrac{1}{4n^2-1}\right)$

bulunur.

$(a_{k_n}) = \left(\dfrac{1}{k_n}\right) = \left(\dfrac{1}{4n^2-1}\right)$ eşitliğinden $k_n = 4n^2-1$ dir.

$\forall n \in N^+$ için $k_n = 4n^2-1 \in N^+$ olduğundan
$(a_{2n+1}) \cdot (a_{2n-1}) = \left(\dfrac{1}{4n^2-1}\right)$ dizisi (a_n) dizisinin bir alt dizisidir.

(C) $(a_{2n+1}) : (a_{2n-1}) = \dfrac{\dfrac{1}{2n+1}}{\dfrac{1}{2n-1}} = \left(\dfrac{2n-1}{2n+1}\right)$ bulunur.

$(a_{k_n}) = \left(\dfrac{1}{k_n}\right) = \left(\dfrac{2n-1}{2n+1}\right)$ eşitliğinden $k_n = \dfrac{2n+1}{2n-1}$ dir.

$\exists n \in N^{+}$ için $k_n = \dfrac{2n+1}{2n-1} \notin N^{+}$ olduğundan

$(a_{2n+1}) : (a_{2n-1}) = \left(\dfrac{2n+1}{2n-1}\right)$ dizisi (a_n) dizisinin bir alt dizisi değildir.

ALIŞTIRMA 9 ⇨ $(a_n) = (2n-1)$ dizisi veriliyor. Aşağıdaki dizilerin (a_n) dizisinin birer alt dizisi olup olmadığını bulunuz.

(A) $(a_{n+1}) + (a_{n+3})$ (B) $(a_{n+1}) \cdot (a_{n+3})$ (C) $(a_{n+1}) : (a_{n+3})$

◆ *BİR SAYININ KOMŞULUĞU*

Bir Sayının Komşuluğu

Bir $a \in R$ ve $\varepsilon > 0$ sayıları verilsin. $(a-\varepsilon,\, a+\varepsilon)$ açık aralığındaki tüm noktaların kümesine a nın ε (epsilon) komşuluğu denir.

Bu kümeyi M ile gösterirsek

$$M = \{x : |x-a| < \varepsilon,\ x \in R\} = (a-\varepsilon,\, a+\varepsilon) \text{ olur.}$$

ÖRNEK12 ⇨ $b = 2$ sayısının $\varepsilon = \dfrac{1}{10}$ komşuluğunu bulunuz ve sayı doğrusu üzerinde gösteriniz.

ÇÖZÜM ⇨ $b - \varepsilon = 2 - \dfrac{1}{10} = \dfrac{19}{10}$

$b + \varepsilon = 2 + \dfrac{1}{10} = \dfrac{21}{10}$

O halde 2 nin $\dfrac{1}{10}$ komşuluğu $\left(\dfrac{19}{10}, \dfrac{21}{10}\right) = (1{,}9\ ,\ 2{,}1)$ aralığıdır.

ALIŞTIRMA 10⇨ 3 sayısının $\dfrac{1}{100}$ komşuluğunu bulunuz ve sayı doğrusu üzerinde gösteriniz.

ÖRNEK 13 ⇨ $\left(\frac{17}{4}, \frac{23}{4}\right)$ aralığı hangi sayının hangi komşuluğudur bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ Bir sayının ε komşuluğu $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ olduğundan

$$a-\varepsilon=\frac{17}{4} \text{ ve } a+\varepsilon=\frac{23}{4} \text{ tür.}$$

Buradan $2a=\frac{40}{4}=10 \Rightarrow a=5$ ve $\varepsilon=\frac{23}{4}-5=\frac{3}{4}$ olur.

O halde, $\left(\frac{17}{4}, \frac{23}{4}\right)$ aralığı 5 in $\frac{3}{4}$ komşuluğudur.

ALIŞTIRMA 11⇨ $(-1,7)$ aralığı hangi sayının hangi komşuluğudur bulunuz.

◆ *BİR DİZİNİN HEMEN HEMEN HER TERİMİ*

Bir Dizinin Hemen Hemen Her Terimi

Bir dizinin sonlu sayıda terimi hariç, kalan terimlerine bu dizinin hemen hemen her terimi denir.

Bu tanımdaki "sonlu sayıda terimi hariç" ifadesine dikkat edilmelidir. Örneğin, $\left(\frac{1}{n}\right)=(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},...,\frac{1}{n},...)$ dizisini göz önüne alalım.

Dizinin ilk 99 terimi hariç geriye kalan

$$\frac{1}{100},\frac{1}{101},\frac{1}{102},...,\frac{1}{n},...$$

terimleri dizinin hemen hemen her terimidir.

Dizinin 5. terimi ile 10. terimi arasındaki terimler alınmazsa geriye kalan

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{10},\frac{1}{11},\frac{1}{12},...$$

terimleri dizinin hemen hemen her terimidir.

Dizinin paydası çift olan terimleri $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, ..., \frac{1}{2n}, ...$ alınmazsa geriye kalan

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, ...$$

terimleri hemen hemen her terim değildir; çünkü sonsuz çoklukta terim alınmamıştır.

ÖRNEK 14 ⇨ $(a_n) = \left(\frac{2n+1}{n+1}\right)$ dizisinin kaç tane terimi 2 nin $\frac{1}{3}$ komşuluğunun dışında kalır?

ÇÖZÜM ⇨ 2 nin $\frac{1}{3}$ komşuluğu

$(2 - \frac{1}{3}, 2 + \frac{1}{3}) = \left(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right)$ dır.

$\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)$ dizisinin $\left(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right)$ aralığının dışındaki terimlerin sayısı

$\left|\frac{2n+1}{n+1} - 2\right| \geq \frac{1}{3}$ eşitsizliği çözülerek bulunabilir.

$\left|\frac{2n+1-2n-2}{n+1}\right| = \left|\frac{-1}{n+1}\right| \geq \frac{1}{3} \Leftrightarrow n \leq 2$ dir.

Şu halde verilen aralık dışında 2 terim vardır.

$(a_n) = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}, \frac{11}{6}, \frac{13}{7}, ...\right) \Rightarrow a_1 = \frac{3}{2}$ ve $a_2 = \frac{5}{3}$ bu aralığın dışında kalır.

ALIŞTIRMA 12 ⇨ $(a_n) = \left(\frac{n}{n+1}\right)$ dizisinin kaç terimi $\left(\frac{9}{10}, \frac{11}{10}\right)$ aralığının dışındadır?

$|a_n - a| < \varepsilon$ dizinin a sayısının ε komşuluğundaki terim sayısını verir.

$|a_n - a| \geq \varepsilon$ dizinin a sayısının ε komşuluğu dışındaki terim sayısını verir.

◆ GENİŞLETİLMİŞ REEL SAYILAR

Genişletilmiş Reel Sayılar

Reel sayılar kümesine $+\infty$ ile $-\infty$ da alınırsa yeni kümeye genişletilmiş reel sayılar kümesi denir ve $\overline{R} = R \cup \{-\infty, +\infty\} = [-\infty, +\infty]$ şeklinde gösterilir.

$\overline{R}$ kümesinde işlemler

1) $\forall a \in R$ için $a + (+\infty) = +\infty$

2) $\forall a \in R$ için $a + (-\infty) = -\infty$

3) $\forall a \in R^+$ için $a \cdot (+\infty) = +\infty$

$a \cdot (-\infty) = -\infty$

4) $\forall a \in R^-$ için $a \cdot (+\infty) = -\infty$

$a \cdot (-\infty) = +\infty$

5) $\forall a \in R^+$ için $\dfrac{+\infty}{a} = +\infty$ $\qquad -\dfrac{\infty}{a} = -\infty$

6) $\forall a \in R^-$ için $\dfrac{+\infty}{a} = -\infty$ $\qquad -\dfrac{\infty}{a} = +\infty$

7) $\forall a \in R$ için $\dfrac{a}{+\infty} = 0$ *ve* $\dfrac{a}{-\infty} = 0$

8) $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$

9) $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$

10) $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$

11) $(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$

12) $(-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$

13) $\forall n \in N^+$ için $(+\infty)^n = +\infty$

14) n tek ve $n \in N^+ \Rightarrow (-\infty)^n = -\infty$

15) n çift ve $n \in N^+ \Rightarrow (-\infty)^n = +\infty$

16) $\forall n \in N^+$ için $\sqrt[n]{+\infty} = +\infty$

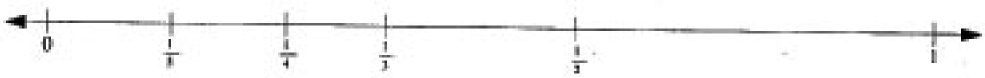
17) n tek ve $n \in N^+ \Rightarrow \sqrt[n]{-\infty} = -\infty$ dur.

◆ YAKINSAK VE IRAKSAK DİZİLER

$(a_n)=\left(\frac{1}{n}\right)$ dizisinin terimlerini sayı ekseni üzerinde işaretlemeye başlayalım. Dizinin bazı terimleri,

$a_1=1,\ a_2=\frac{1}{2},\ a_3=\frac{1}{3},\ a_4=\frac{1}{4},\ a_5=\frac{1}{5}...$ dır.

Terimleri sayı ekseni üzerinde işaretlemek için $[0,1]$ aralığını oldukça geniş alalım; çünkü dizinin terimleri bu aralıkta bulunmaktadır.



Buradan görülüyor ki n büyüdükçe $\frac{1}{n}$ sayısı bu oranda küçülüyor ve sıfır ile $\frac{1}{n}$ arasındaki uzaklık gözle farkedilemez duruma geliyor. Söz gelimi, dizinin yüzüncü terimi ve sonraki terimleri için $0<a_n\leq\frac{1}{100}$ dür ve ilk yüz terim hariç, kalan bütün terimleri $(0,\ \frac{1}{100})$ aralığında kalır.

Görüldüğü gibi $\forall\varepsilon>0$ için (a_n) dizisinin sonlu sayıdaki terimleri dışındaki bütün terimleri (yani dizinin hemen hemen her terimi) sıfırın ε komşuluğu içinde, yani $(0-\varepsilon,\ 0+\varepsilon)=(-\varepsilon,\ \varepsilon)$ aralığının elemanıdır. Öyleyse (a_n) dizisinin limiti 0 dır veya (a_n) dizisi 0 a yakınsıyordur.

Bir Dizinin Limiti

(a_n) bir dizi ve yeteri kadar büyük seçilen bir n değeri için dizinin genel terimi olan a_n L gibi bir sayıya yaklaşıyorsa, o zaman (a_n) dizisinin limiti L dir veya (a_n) dizisi L ye yakınsıyor denir. Kısaca,

$\lim a_n=L$ veya $(a_n)\to L$ şeklinde gösterilir.

Yakınsak Dizi

(a_n) bir dizi ve $L\in R$ olsun.
$\forall\varepsilon>0$ için, $n>n_0$ olduğunda $|a_n-L|<\varepsilon$ kalacak şekilde ε a bağlı bir n_0 sayısı bulunabiliyorsa (a_n) dizisi L ye yakınsar denir.

$$\lim\ a_n=L \text{ veya } (a_n)\to L$$

şeklinde gösterilir.

ÖRNEK 15 ⇨ $(a_n)=\left(\frac{3n+1}{n+2}\right)$ dizisinin hangi sayıya yakınsadığını bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ Bu dizinin genel teriminin $n\to\infty$ için hangi sayıya gittiğini bulmakla dizinin limitini bulmuş oluruz.

$\left(\frac{3n+1}{n+2}\right)$ de pay ve paydayı n ile bölelim.

O zaman $\frac{3n+1}{n+2}=\frac{3+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}$ olur. Söz gelimi $n=10000$ için

$\frac{1}{n}=\frac{1}{10000}=0{,}0001$, $\frac{2}{n}=\frac{2}{10000}=0{,}0002$ olup $\left(\frac{1}{n}\right)\to 0$,

$\left(\frac{2}{n}\right)\to 0$ *ve* $\left(\frac{3+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}\right)\to 3$ sonucuna ulaşılır.

ÖRNEK 16 ⇨ $(b_n)=(n+1)$ dizisinin hangi sayıya yakınsadığını bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ (b_n) dizinin terimleri

$(b_n)=(2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,\ldots, n+1,\ldots)$ dır.

Görüldüğü gibi (b_n) dizisi herhangi bir gerçek sayıya yaklaşmamaktadır. Ancak, $n\to\infty$ için $b_n\to\infty$ oluyor. Öyleyse, (b_n) dizisi yakınsak değildir.

Iraksak Dizi

Limiti olmayan dizilere ıraksak dizi denir.

ÖRNEK 17 ⇨ $(a_n) = \left(\dfrac{3n+1}{n+2}\right)$ dizisinin a=3 sayısına yakınsadığını gösteriniz.

ÇÖZÜM ⇨ (a_n) dizisinin a=3 sayısına yakınsadığını göstermek için verilen e>0 sayısına karşılık

$$n > n_0 \Rightarrow \left|\frac{3n+1}{n+2} - 3\right| < e$$

olacak biçimde bir n_0 (doğal) sayısının bulunabileceğini göstermeliyiz.

$$\left|\frac{3n+1}{n+2} - 3\right| < e \Leftrightarrow \left|\frac{3n+1-3n-6}{n+2}\right| < e \Leftrightarrow \left|\frac{-5}{n+2}\right| < e$$

$$\frac{5}{n+2} < e \Leftrightarrow \frac{5}{\varepsilon} < n+2 \Leftrightarrow \frac{5}{\varepsilon} - 2 < n$$

olduğundan, n_0 olarak $\dfrac{5}{\varepsilon} - 2$ den büyük bir doğal sayı seçilebilir.

Söz gelimi, $\varepsilon = \dfrac{1}{10}$ ise,

$$\frac{5}{\varepsilon} - 2 = \frac{5}{\frac{1}{10}} - 2 = 50 - 2 = 48$$

olup, $n_0 = 48$ olarak alınır. Yani, dizinin 48. teriminden sonraki bütün terimleri 3 ün $\dfrac{1}{10}$ komşuluğundadır.

ALIŞTIRMA 13 ⇨ $(a_n) = \left(\dfrac{2n-1}{3n+2}\right)$ dizisinin $a = \dfrac{2}{3}$ sayısına yakınsadığını gösteriniz.

1. $$\lim_{n\to\infty}(a_r n^r + a_{r-1}n^{r-1} + \ldots + a_0) = \begin{cases} +\infty, & a_r > 0 \\ -\infty, & a_r < 0 \end{cases}$$

2. $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_r n^r + a_{r-1}n^{r-1} + \ldots + a_0}{b_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \ldots + b_0} = \begin{cases} 0, & r < k \\ \dfrac{a_r}{b_k}, & r = k \\ \mp\infty, & r > k \end{cases}$$

ÖRNEK 18 ⇨Aşağıdaki verilen dizilerin limitlerini bulunuz.

$$\text{(A) } (a_n)=\left(\frac{6n^2-n+2}{3n^2+1}\right) \quad \text{(B) } (b_n)=\left(\frac{n-2}{n^2+1}\right) \quad \text{(C) } (c_n)=\left(\frac{n^2+1}{n+2}\right)$$

ÇÖZÜM ⇨(A) $(a_n)=\left(\frac{6n^2-n+2}{3n^2+1}\right)$ dizisinde $r=k=2$ dir. Öyleyse,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{6n^2-n+2}{3n^2+1}\right)=\frac{6}{3}=2 \text{ dir.}$$

$$\left(\frac{6n^2-n+2}{3n^2+1}\right)=\frac{n^2\left(6-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(3+\frac{1}{n^2}\right)}=\left(\frac{6-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{3+\frac{1}{n^2}}\right)\to\frac{6}{3}=2 \text{ olur;}$$

çünkü $\left(\frac{1}{n}\right)\to 0,\quad \left(\frac{1}{n^2}\right)\to 0,$ ve $\left(\frac{2}{n^2}\right)\to 0$ dır.

(B) $(b_n)=\left(\frac{n-2}{n^2+1}\right)$ dizisinde $r=1$ ve $k=2$ dir. Öyleyse $r<k$ dır

ve $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-2}{n^2+1}\right)=0$ olur.

$$\left(\frac{n-2}{n^2+1}\right)=\frac{n\left(1-\frac{2}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}=\frac{\left(1-\frac{2}{n}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}=\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\left(\frac{1-\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}\right)\to 0\cdot\frac{1}{1}=0 \text{ olur;}$$

çünkü $\left(\frac{1}{n}\right)\to 0,\ \left(\frac{2}{n}\right)\to 0$ ve $\left(\frac{1}{n^2}\right)\to 0$ dır.

(C) $(c_n)=\left(\frac{n^2+1}{n+2}\right)$ dizisinde $r=2$ ve $k=1$ dir. Öyleyse $r>k$ dır ve

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n+2}\right)=\infty \text{ olur.}$$

$$\left(\frac{n^2+1}{n+2}\right)=\frac{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}=n\cdot\frac{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\left(1+\frac{2}{n}\right)}\to\infty\cdot\frac{1}{1}=\infty \text{ olur.}$$

ALIŞTIRMA 14⇨ Aşağıda verilen dizilerin limitlerini bulunuz.

$$\text{(A)}\ \left(\frac{n\cdot(n+2)}{(3n-1)(n+3)}\right)\quad \text{(B)}\ \left(\frac{n}{n+1}\right)-\left(\frac{n+1}{n}\right)\quad \text{(C)}\ (n+1)-\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

◆ *SINIRLI DİZİLER*

Bir (a_n) dizisinde her a_n terimi için, $a_n \leq k$ olacak biçimde bir $k \in R$ sayısı varsa bu diziye üstten sınırlı, k ve k dan büyük her sayıya da dizinin bir üst sınırı denir. Üst sınırlar içinde en küçük olanına ise en küçük üst sınır (EKÜS) denir. EKÜS dizinin elemanı ise bu dizinin en büyük elemanıdır.

Bir (a_n) dizisinde her a_n terimi için $a_n \geq k$ olacak şekilde bir $k \in R$ varsa bu diziye alttan sınırlı, k ve k dan küçük her sayıya da dizinin bir alt sınırı denir. Alt sınırlar içinde en büyük olanına ise en büyük alt sınır (EBAS) denir. EBAS dizinin elemanı ise bu dizinin en küçük elemanıdır.

Sınırlı Dizi

Bir (a_n) dizisi hem üstten hem de alttan sınırlı ise ya da daha genel bir ifadeyle a_n terimi için $|a_n| \leq k$ olacak biçimde bir $k \in R^+$ sayısı bulunabilirse, bu diziye sınırlı dizi denir.

ÖRNEK 19 ⇨ $(a_n)=(2+\frac{1}{n})$ dizisinin EBAS ve EKÜS ünü bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ $(a_n)=(2+\frac{1}{n})=(3,\ 2+\frac{1}{2},\ 2+\frac{1}{3},\ldots,2+\frac{1}{n},\ldots)$

dizisinde her a_n terimi için $2<a_n \leq 3$ olduğundan (a_n) dizisi sınırlı bir dizidir. Dizide EKÜS=3, EBAS=2 dir. 3 dizinin en büyük elemanıdır. 2 dizinin elemanı olmadığından bu dizinin en küçük elemanı yoktur.

ALIŞTIRMA 15⇨ $(b_n)=\left(\frac{3+n}{n^2+1}\right)$ dizisinin EBAS ve EKÜS ünü bulunuz.

ÖRNEK 20 ⇨Aşağıda verilen dizilerin EBAS ve EKÜS ünü bulunuz.

(A) $(a_n)=\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$ (B) $(b_n)=\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$

ÇÖZÜM ⇨ (A) $(a_n)=\left(\dfrac{n}{n+1}\right)=\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)$

$1-\dfrac{1}{n+1}\leq 1$ dir; çünkü $(a_n)=\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5},...$

$\forall n\in N^+$ için $\dfrac{1}{2}\leq a_n\leq 1$ dir. Öyleyse, bu dizinin

EBAS= $\dfrac{1}{2}$ ve EKÜS=1 olur.

(B) $(b_n)=\left(\dfrac{n+1}{n}\right)=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=2,\ 2+\dfrac{1}{2},\ 3+\dfrac{1}{3},\ 4+\dfrac{1}{4},...$

$\forall n\in N^+$ için $2\leq b_n$ dir; yani EBAS= 2 dir.

$\forall n\in N^+$ için $b_n\leq k$, $(k\in R)$ olacak şekilde k reel sayısı bulunamaz.

O halde, (b_n) dizisi üstten sınırsızdır, EKÜS ü yoktur.

ALIŞTIRMA 16 ⇨Aşağıda verilen dizilerin EBAS ve EKÜS ünü bulunuz.

(A) $(a_n)=\left(\dfrac{n^2+2}{2n^2}\right)$ (B) $(b_n)=(-2n)$

Teorem: Yakınsak her dizi sınırlıdır.

İspat: $(a_n)\to a$ olsun. $\forall\varepsilon>0$ için $\exists n_0\in N^+$ vardır öyle ki $\forall n>n_0$ için

$$|a_n-a|<\varepsilon \text{ dur.}$$

Yani,

$$a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon \quad \text{olur.}$$

Dizinin en çok n_0 tane terimi $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ aralığının dışında bulunabileceğinden bunların en küçük ve en büyüklerini seçmek mümkündür.

$$k_1=\min\{a_1,a_2,...,a_{n_0},a-\varepsilon\}$$
$$k_2=\max\{a_1,a_2,...,a_{n_0},a+\varepsilon\}$$

denirse $\forall n\in N^+$ için $k_1\leq a_n\leq k_2$ olur. O halde (a_n) dizisi alttan ve üstten sınırlı olduğundan sınırlıdır.

ÖRNEK 21 ⇨ $(a_n)=\left(\frac{1}{n}\right)$ ve $(b_n)=(n)$ olarak verilen dizilerin sınırlı olup olmadığını bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ $(a_n)=\left(\frac{1}{n}\right)$ dizisi sınırlıdır; çünkü

$$\left(\frac{1}{n}\right)=(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},...,\frac{1}{n},...)$$

dizisinin bütün terimleri (0, 1] aralığındadır. Yani, her $n\in N^+$ için $|a_n|\leq 1$ dir.

$(b_n)=(n)$ dizisi sınırlı değildir; çünkü

$$(n)=(1,2,3,4,...,n,...)$$

dizisinin bütün terimlerini hiç bir sınırlı aralık kapsamaz.

ÖRNEK 22 ⇨ $\left(\frac{n+1}{n+3}\right)$ dizisinin sınırlı olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM ⇨ $\left(\frac{n+1}{n+3}\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{5}{7},...\frac{n+1}{n+3},....\right)$ dizisi hem alttan hem de üstten sınırlıdır.

Her $n\in N^+$ için, $n+1<n+3$ veya $\frac{n+1}{n+3}<1$ olduğundan, dizinin her terimi 1 sayısından küçüktür. Böylece dizinin bir üst sınırı vardır ve dizi üstten sınırlıdır. Öte yandan, $\forall\ n\in N^+$ için

$$1\leq n\Rightarrow n+1\leq 2n\Rightarrow n+3\leq 2n+2=2(n+1)\Rightarrow\frac{1}{2}\leq\frac{n+1}{n+3}$$

olduğundan, $\frac{1}{2}$ sayısı dizinin bir alt sınırıdır.

ÖRNEK 23 ⇨ $\left(\frac{n+1}{n+3}\right)$ dizisinin EBAS ve EKÜS ünü bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ Bir önceki örnekte gösterdiğimiz üzere $\left(\frac{n+1}{n+3}\right)$ dizisinin terimlerinin

$$\frac{1}{2}\leq\frac{n+1}{n+3}<1$$

aralığında olduğunu hatırlayalım. Bu dizide EKÜS = 1 ve EBAS = $\frac{1}{2}$ dir. 1 bu dizinin elemanı olmadığından bu dizinin en büyük elemanı yoktur.

◆ DİZİNİN LİMİTLERİ İLE İLGİLİ TEOREMLER

Teorem: Yakınsak olan bir (a_n) dizisi a gibi bir reel sayıya yakınsıyorsa, bunun bütün (a_{k_n}) alt dizileri de yakınsaktır ve bunlar (a_n) dizisinin limitine (yani a ya) yakınsar. Bunun karşıtı doğru değildir.

İspat: $(a_n) \to a$

olduğundan (a_n) dizisinin sonlu sayıdaki terimleri $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ aralığının dışındadır. (a_{k_n}) dizisinin terimleri (a_n) dizisinin de terimleri olduğundan (a_{k_n}) dizisinin sonlu sayıdaki terimleri bu aralığın dışında, sonsuz sayıdaki terimler bu aralığın içindedir. Öyleyse (a_{k_n}) dizisi de a reel sayısına yakınsar.

ÖRNEK 24⇒ $(a_n)=\left(\dfrac{3n+1}{n+2}\right)$ dizisinin limitinin 3 olduğunu biraz evvel gösterdik. Bunun bir alt dizisi olan $(a_{2n})=\left(\dfrac{3(2n)+1}{2n+2}\right)=\left(\dfrac{6n+1}{2n+2}\right)$ dizisinin de 3 e yakınsadığını gösteriniz.

ÇÖZÜM ⇒ $(a_{2n})=\left(\dfrac{6n+1}{2n+2}\right)$ dizisinin a=3 sayısına yakınsadığını göstermek için verilen $\varepsilon>0$ sayısına karşılık

$$n>n_0 \Rightarrow \left|\frac{6n+1}{2n+2}-3\right|<\varepsilon$$

olacak biçimde bir n_0 (pozitif doğal) sayısının bulunabileceğini göstermeliyiz.

$$\left|\frac{6n+1}{2n+2}-3\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{6n+1-6n-6}{2n+2}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{-5}{2n+2}\right|<\varepsilon$$

$$\frac{5}{2n+2}<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{5}{\varepsilon}<2n+2 \Leftrightarrow \frac{5}{\varepsilon}-2<2n \Leftrightarrow \frac{5}{2\varepsilon}-1<n$$

olduğundan, n_0 olarak $\dfrac{5}{2\varepsilon}-1$ den büyük bir doğal sayı seçilebilir.

Söz gelimi,

$$\varepsilon = \frac{1}{10} \text{ ise, } \frac{5}{2\varepsilon} - 1 = \frac{5}{2 \cdot \frac{1}{10}} - 1 = 5 \cdot \frac{10}{2} - 1 = 24$$

olup, n_0 =24 olarak alınır. Yani, dizinin 24. teriminden sonraki bütün terimleri 3 ün $\frac{1}{10}$ komşuluğundadır.

Teorem: Yakınsak iki dizinin toplamı yakınsaktır. Toplam dizinin limiti, dizilerin limitlerinin toplamına eşittir.

Bu teoremin karşıtı doğru değildir. Yani, iki dizinin toplamı yakınsak ise bu diziler yakınsak olmayabilir.

İspat: (a_n) ve (b_n) yakınsak diziler ve $(a_n) \to a, \quad (b_n) \to b$ ise

$(a_n) + (b_n) \to a + b$ olduğunu gösterelim.

$(a_n) \to a$ olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_1 \in N^+$ vardır öyle ki $\forall n > n_1$ için $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ dir.

$(b_n) \to b$ olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_2 \in N^+$ vardır öyle ki $\forall n > n_2$ için

$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ dir.

$|a_n + b_n - (a + b)| \le |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ olduğundan

$(a_n + b_n) \to a + b$ dir.

ÖRNEK 25 ⇨ $\left(\frac{1+n}{n}\right)$ dizisinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM ⇨ $\frac{1+n}{n} = \frac{1}{n} + 1$ olduğundan, verilen dizi $\left(\frac{1+n}{n}\right) = \left(\frac{1}{n}\right) + (1)$ biçiminde yakınsak iki dizinin toplamı olarak yazılabilir. $\left(\frac{1}{n}\right) \to 0$ ve $(1) \to 1$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+n}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{n}\right) + (1)\right] = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) + \lim_{n\to\infty}(1) = 0 + 1 = 1$$

ÖRNEK 26 ⇒ $(a_n + b_n) = (n - n) = (0)$ dizisinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM ⇒ $(a_n + b_n) = (n - n) = (0)$ dizisi $(a_n) = n$ ve $(b_n) = (-n)$ dizilerinin toplamıdır.

$(a_n) = (1,\ 2,\ 3, \ldots, n, \ldots)$ ve $(b_n) = (-1,\ -2,\ -3,\ -4,\ -5, \ldots -n, \ldots)$ dizileri yakınsak değildir. Fakat $(a_n + b_n) = (0)$ olup, sıfıra yakınsar.

Teorem: Yakınsak iki dizinin çarpımı yakınsaktır. Çarpımın limiti, dizilerin limitlerinin çarpımına eşittir.

İspat: (a_n) ve (b_n) yakınsak diziler ve $(a_n) \to a$, $(b_n) \to b$ ise $(a_n b_n) \to ab$ olduğunu gösterelim.

(a_n) dizisi yakınsak olduğundan sınırlıdır.
$\forall n \in N^+$ için $|a_n| < M$ olacak biçimde bir M sayısı vardır.

$(a_n) \to a$ ve $(b_n) \to b$ olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için

$$n > n_1 \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{|b| + M}$$

$$n > n_2 \Rightarrow |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{|b| + M}$$

olacak biçimde n_1 *ve* n_2 sayıları vardır.

$n_0 = \max\{n_1,\ n_2\}$ dersek $\forall n > n_0$ için

$$|a_n b_n - a \cdot b| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \le |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - ab|$$

$$= |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| < M \frac{\varepsilon}{|b| + M} + |b| \frac{\varepsilon}{|b| + M} = \varepsilon$$

olduğundan $(a_n \cdot b_n) \to a \cdot b$ olur.

Teorem: Yakınsak bir dizinin bir sabitle çarpımı yakınsaktır. Çarpımın limiti, dizinin limitinin bu sabitle çarpımına eşittir.

İspat: (a_n) yakınsak bir dizi, $(a_n) \to a$ ve $k \in R$ olsun.
$k \cdot (a_n) = (k \cdot a_n) \to k \cdot a$ olduğunu göstereceğiz.

Eğer k= 0 ise, $k(a_n) = (0 \cdot a_n) = (0)$ olup, $0 \cdot a = 0$ a yakınsar.

$k \neq 0$ ise, $(a_n) \to a$ olduğundan, $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0 \in N^+$ vardır öyle ki

her $n > n_0$ için

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{|k|} \text{ olur.}$$

Buna göre $\forall n > n_0$ için

$$|ka_n - k \cdot a| = |k||a_n - a| < |k|\frac{\varepsilon}{|k|} = \varepsilon \text{ olur.}$$

Demek ki $(k \cdot a_n) \to k \cdot a$ dır.

Teorem: Yakınsak bir dizinin, terimleri ve limiti sıfırdan farklı bir yakınsak diziye bölümü, yakınsak bir dizidir. Bölümün limiti, dizilerin limitlerinin bölümüne eşittir. Yani, $(a_n) \to a$, $(b_n) \to b$; $b \neq 0$ *ve* $b_n \neq 0$ *ise* $\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \to \frac{a}{b}$ dir.

Teorem: Bir (a_n) dizisi verilsin, $\lim a_n = a \Leftrightarrow \lim(a_n - a) = 0$ dır.

İspat: $(a_n - a) = (a_n) - (a)$ dır.

$(a_n) \to a \Rightarrow (a_n) - (a) \to a - a = 0$ olur.

◆ *DİZİNİN LİMİTLERİ İLE İLGİLİ ÖZELİKLER*

1) Pozitif terimli bir (a_n) dizisi için

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = r \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = r \text{ dir.}$$

2) Bir (a_n) dizisi için $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ ise $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n} = a$ dır.

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ dir. e sayısı doğal logaritmada taban olup $e \approx 2,71$ dir.

4) Bir (a_n) dizisi verilsin, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(a_n - a) = 0$ dır.

5) Bir (a_n) dizisi verilsin. $x \in \boldsymbol{R}^+$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x^{a_n} = x^{\lim\limits_{n\to\infty} a_n} = x^a \text{ dır.}$$

6) $|a| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$

7) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0,\ \lim\limits_{n\to\infty} v_n = \infty$ *ve* $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n \cdot v_n) = \alpha$ ise

$$\lim(1+u_n)^{v_n} = e^{\alpha} \text{ dır.}$$

ÖRNEK 27 ⇨ $(a_n) = \left((3)^{\frac{1}{n}}\right)$ dizisinin $n \to \infty$ limitini bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ $\lim\limits_{n\to\infty}(3)^{\frac{1}{n}} = 3^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}} = 3^0 = 1$ dir; çünkü $\left(\frac{1}{n}\right) \to 0$ dır.

ÖRNEK 28 ⇨ $(a_n) = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$ dizisinin $n \to \infty$ limitini bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ $(a_n) = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots \left(\frac{1}{2}\right)^n, \ldots\right) \to 0$

Burada görüldüğü üzere $a = \frac{1}{2} < 1$ dir. Yani, dizinin limitleri ile ilgili 5. özelikten dolayı $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 0$ dır.

ÖRNEK 29 ⇨ $\left(\dfrac{3\cdot e^n + 3^n}{e\cdot 2^n - 3^n}\right)$ dizisinin limitini bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ İlk önce pay ve paydayı 3^n parantezine alalım.

$$\frac{3^n\left(3\cdot\left(\frac{e}{3}\right)^n + 1\right)}{3^n\left(e\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1\right)} = \frac{3\cdot\left(\frac{e}{3}\right)^n + (1)}{e\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n - (1)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot\left(\frac{e}{3}\right)^n + (1)}{e\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n - (1)} = \frac{3\cdot 0 + 1}{e\cdot 0 - 1} = -1 \qquad \left(\frac{e}{3}\right)^n \to 0,\ \left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$$

ALIŞTIRMA 17 ⇨ Aşağıdaki dizilerin limitlerini bulunuz.

$$\text{(A)}\ \left(\frac{n^2-3n+1}{n^2+n+2}\right) \qquad \text{(B)}\ \left(\frac{n^2+3n}{n^2-2}\right) \qquad \text{(C)}\ \left((6)^{\frac{1}{2n}}\right)$$

ÖRNEK 30 ⇨ $\left(\frac{n^7+1}{n^2}\right)$ dizisinin limitini bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^7+1}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^7\left(1+\frac{1}{n^7}\right)}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}(n^{7-2})$ $\qquad \left(\frac{1}{n^7}\right)\to 0$

$$=\lim_{n\to\infty}(n^5)=+\infty$$

◆ *ARİTMETİK DİZİLER*

Varsayalım ki bir kişinin başlangıç maaşı yıllık 1 000 000 000 TL dir. Daha sonra bu kişi her yıl için 300 000 000 TL artış alıyor. Bu kişinin n yıl sonraki maaşı şöyle gösterilir:

$$f(n)=300000000n+1000000000$$

Görüldüğü üzere f bir lineer fonksiyondur. 10 yıl sonra, yıllık maaş

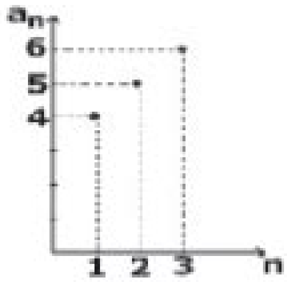
$$f(10)=300000000(10)+1000000000=4000000000 \text{ dır.}$$

Eğer bir dizi lineer bir fonksiyon tarafından tanımlanabilirse bu dizi aritmetik bir dizidir.

Sonsuz Aritmetik Dizi

Sonsuz aritmetik dizi tanım kümesi pozitif doğal sayılar kümesi olan lineer bir fonksiyondur. Yani, aritmetik dizi herhangi ardışık iki terimi arasındaki fark sabit olan bir dizidir.

Aritmetik bir dizinin, d sabit olmak üzere genel terimi ardışık olarak $a_n=a_{n-1}+d$ bağıntısı ile tanımlanır. Her geçerli n değeri için $d=a_n-a_{n-1}$ olduğu için d ortak fark olarak tanımlanır. Dikkat edilirse bu dizinin ardışık iki terimi arasında her zaman $a_{n+1}-a_n=d$ bağıntısı vardır. Eğen $d=0$ ise, dizi sabit bir dizidir. Sonlu bir aritmetik dizi sonsuz bir aritmetik diziye benzemektedir. Sonlu aritmetik dizide tanım kümesi sabit bir n doğal sayısı için $\boldsymbol{D}=\{1,2,3,\ldots,n\}$ dir.



(A) $f(n) = n^2 + 2$

(B) f fonksiyonunun grafiği şekil 6.1 de gösterilmektedir.

(C) f fonksiyonu sayısal olarak aşağıdaki tabloda gösterilmektedir.

Şekil 6.1

Tablo 3						
n	1	2	3	4	5	6
$f(n)$	-1,5	-0,5	0,5	1,5	2,5	3,5

ÇÖZÜM ➪ (A) $f(n) = n^2 + 2$ fonksiyonu ile tanımlanan dizi aritmetik dizi değildir; çünkü $f(n) = n^2 + 2$ lineer değildir. Yani, ardışık terimler arasındaki farklar sabit değildir.

(B) Şekildeki dizi aritmetik dizi göstermektedir. Çünkü noktalar bir doğru üzerinde bulunmaktadır. Dikkat edilirse noktalar arasında eğim her zaman 1 dir. Eğim dizinin ortak farkı olan d yi göstermektedir.

(C)Sıralı terimler (ardışık)

-1,5 , -0,5 , 0,5 , 1,5 , 2,5 , 3,5

tam olarak 1 kadar artmaktadır. Sonuç olarak, ortak fark $d = 1$ dir. Her geçerli n için $a_n = a_{n-1} + 1$ olduğu için dizi aritmetiktir.

Aritmetik Dizinin Genel Terim Formülü

d ortak fark ve c sabit olmak üzere aritmetik dizi lineer bir fonksiyon olduğu için her zaman $f(n) = dn + c$ ile gösterilebilir.

ÖRNEK 32 ➪ Aşağıdaki her aritmetik dizi için genel terim $a_n = f(n)$ yi bulunuz.

(A) $a_1 = -2$ *ve* $d = -2$ (B) $a_3 = 4$ *ve* $a_9 = 16$

ÇÖZÜM ➪(A) $f(n) = dn + c$

$d = -2$ *ise* $f(n) = -2n + c$

$a_1 = f(1) = -2(1) + c = -2 \Rightarrow c = 0$

Böylece $a_n = -2n + 0 = -2n$

Bu genel terimi a_1 terimine bağlı olarak nasıl gösterebiliriz?

$a_n = -2n$ genel terimini a_1 terimine bağlı olarak şu şekilde yazabiliriz.

$$-2n = -2 + (n-1)(-2) = a_1 + (n-1) \cdot d$$

(B) $a_3 = 4$ *ve* $a_9 = 16$ olduğu için $f(3) = 4$ *ve* $f(9) = 16$ denklemlerini sağlayacak bir lineer fonksiyon $f(n) = dn + c$ buluyoruz.

Ortak fark, (3,4) ve (9,16) noktaları arasındaki eğime eşittir.

$$d = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{16-4}{9-3} = \frac{12}{6} = 2$$

$f(n) = 2n + c$

$$a_3 = f(3) = 2(3) + c = 4 \Rightarrow c = -2$$

Böylece, $a_n = 2n - 2$ dir.

Bu bulduğumuz genel terimi a_1 terimi cinsinden şimdi de siz gösterin.

ALIŞTIRMA 18 ⇨ Aşağıdaki her aritmetik dizi için genel terimi, $a_n = f(n)$ yi bulunuz.

(A) $a_4 = 12,\ d = -10$ (B) $a_3 = 22,\ d = -20$

Aritmetik Dizinin Genel Terim Formülü

Ortak farkı d ve ilk terimi a_1 olan bir aritmetik dizinin genel terimi olan a_n yi her zaman $a_n = a_1 + (n-1)d$ formülü ile gösterebiliriz.

ÖRNEK 33 ⇨ Her aritmetik dizi için genel terim $a_n = f(n)$ yi bulunuz.

(A) $a_1 = 10,\ d = -6$ (B) $a_1 = -3,\ d = 5$

ÇÖZÜM ⇨ (A) $a_1 = 10,\ d = -6$ olduğu için $a_n = a_1 + (n-1)d$ formülünü kullanabiliriz.

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = 10 + (n-1)(-6)$$
$$a_n = 16 - 6n$$

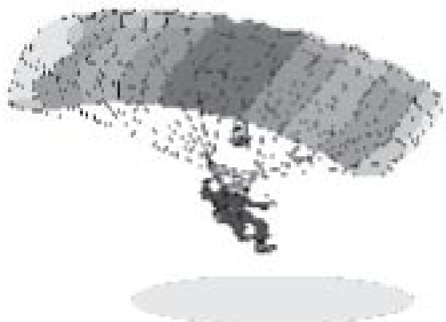
(B) $a_1 = -3$ *ve* $d = 5$ olduğundan $a_n = a_1 + (n-1)d$ formülünden

$a_n = -3 + (n-1)5 = -3 + 5n - 5 = 5n - 8$ olarak bulunur.

ALIŞTIRMA 19 ➡ Aşağıdaki her aritmetik dizi için genel terim $a_n = f(n)$ yi bulunuz.

(A) $a_1 = 4,\ d = -1$ (B) $a_1 = 5,\ d = \frac{1}{2}$

ÖRNEK 34 ➡ Bir paraşütçü bir uçaktan atlamaktadır. Eğer hava direnci ve hava akımı dikkate alınmazsa, paraşütçü birinci saniyede 20 feet, ikinci saniyede 42 feet, üçüncü saniyede 64 feet ve n. saniyede $22n - 2$ feet düşmektedir. Paraşütçü 11 inci saniyede kaç feet düşecektir?



ÇÖZÜM ➡ Aritmetik dizinin terimleri 20, 42, 64,… dır.

$$d = a_2 - a_1$$
$$d = 42 - 20 = 22$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = 20 + (n-1)22$$

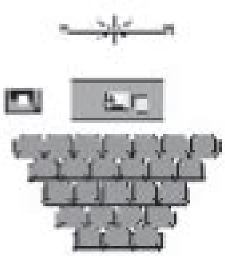
11. terim $a_{11} = 20 + (11-1)22$

$a_{11} = 20 + 220 = 240$ feet

Atlayıcı 11. saniyede 240 feet düşecektir.

ALIŞTIRMA 20 ➡ 10 uncu terimi 20 ve ortak farkı –0,5 olan aritmetik dizinin ilk terimini bulunuz.

ÖRNEK 35 ➡ Bir tiyatro salonunda ilk sırada 5 oturma yeri ve en son sırada ise 21 oturma yeri bulunmaktadır. Her sırada oturma yeri bir önceki sıranın iki fazlasıdır. Bu tiyatroda toplam kaç sıra vardır? Her sıradaki oturma sayısını gösteriniz.



ÇÖZÜM ➡ $a_1 = 5$ ilk sıradaki oturma yeri sayısı

$a_n = 21$ en son sıradaki oturma yeri sayısı

$d = 2$ ardışık iki sıra arasındaki oturma yeri sayısı farkı.

$n = ?$ sıra sayısı

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ..., a_n$ Her sıradaki oturma yeri sayısı

Biliyoruz ki bir dizinin genel terimini

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

formülünü kullanarak bulabiliriz. O zaman

$$a_n = 5 + (n-1)2 \text{ olur.}$$

$$\begin{aligned} a_n = 21 \Rightarrow 21 &= 5 + (n-1)2 \\ 21 &= 5 + (n-1)2 \\ 21 - 3 &= 2n \\ 18 &= 2n \Rightarrow n = 9 \end{aligned}$$

Bu tiyatro salonunda 9 sıra bulunmaktadır.

Her sıradaki oturma yeri sayısı sırasıyla

5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21 dir.

ÖRNEK 36 ⇒ $-\frac{1}{2}$ *ile* $\frac{79}{2}$ sayıları arasına aritmetik dizi oluşturacak şekilde 19 terim yerleştirirsek, bu dizinin sekizinci terimi ne olur?

ÇÖZÜM ⇒ $a_1 = -\frac{1}{2}$, $a_n = \frac{79}{2}$ ve a_1 *ve* a_n arasında 19 terim bulunmaktadır.

$a_8 = ?$

a_1 *ve* a_n arasında 19 terim olduğundan toplam terim sayısı 19+2=21 dir. Yani, $n-2$ tane terim 19 a eşittir. O zaman,

$$n - 2 = 19 \Rightarrow n = 21 \text{ olur.}$$

Buna göre dizinin genel terimi,

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = -\frac{1}{2} + (n-1)d \text{ olur.}$$

$$a_n = \frac{79}{2} \text{ ve } n = 21 \Rightarrow \frac{79}{2} = -\frac{1}{2} + (21-1)d$$

$$\frac{79}{2} + \frac{1}{2} = 20d$$

$$\frac{80}{2} = 20d$$

$$\frac{40}{20} = d \Rightarrow d = 2$$

Bu dizinin 8. terimi,

$$a_8 = -\frac{1}{2} + (8-1)2 \Rightarrow a_8 = -\frac{1}{2} + 14$$

$$a_8 = \frac{-1+28}{2} = \frac{27}{2} \text{ dir.}$$

ALIŞTIRMA 21⇒ -5 ile $\frac{13}{3}$ sayıları arasına aritmetik dizi oluşturacak şekilde 6 terim yerleştiriniz ve bu dizinin terimlerini bulunuz.

Aritmetik Dizilerin İlk "n" Teriminin Toplamı

Başlangıç maaşı yıllık 1 000 000 000 TL olan bir kişi her yıl için 300000000 TL artış alıyorsa bu kişinin beş yıl boyunca kazandığı toplam para ne kadardır? Aritmetik diziler konusunda gördüğümüz üzere bu kişinin $\boldsymbol{n}$ yıl sonraki maaşı şöyle gösterilir.

$$f(\boldsymbol{n}) = 300\,000\,000\boldsymbol{n} + 1\,000\,000\,000$$

Bu kişinin 5 yıl boyunca kazandığı toplam parayı bulmak için 5 yıl boyunca her yıl kazandığı parayı toplamamız gerekiyor.

1. yıl aldığı para:

=1 000 000 000

1. yıl sonunda (2. yıl) alacağı para:

$$f(1) = 300\,000\,000 \cdot 1 + 1\,000\,000\,000 = 1\,300\,000\,000$$

2. yıl sonunda (3.yıl) alacağı para:

$$f(2) = 300\,000\,000 \cdot 2 + 1\,000\,000\,000 = 1\,600\,000\,000$$

3. yıl sonunda (4 yıl) alacağı para:

$$f(3) = 300\,000\,000 \cdot 3 + 1\,000\,000\,000 = 1\,900\,000\,000$$

4. yıl sonunda (5 yıl) alacağı para:

$$f(4) = 300\,000\,000 \cdot 4 + 1\,000\,000\,000 = 2\,200\,000\,000$$

O zaman 5 yıl boyunca kazanılan para:

$$S_5 = 1\,000\,000\,000 + 1\,300\,000\,000 + 1\,600\,000\,000 + 1\,900\,000\,000 + 2\,200\,000\,000 = 8\,000\,000\,000 \text{ TL dir.}$$

Sembol S_5 ilk beş terimin toplamını göstermektedir. Eğer "$\boldsymbol{n}$" tane teriminiz varsa bunların toplamını S_n olarak gösteriyoruz. Bu kişinin 5 yıl değil de 30 yıl boyunca kazanacağı toplam para sorulursa o zaman ne yapacağız? Yukarıdaki gibi bulunan terimleri tek tek toplamak oldukça zahmetli ve zaman isteyen bir iş. Toplamı bulmanın bir yolu dizinin terimlerini artan ve azalan sırada yazmak ve alt alta gelen terim çiftlerini toplamaktır. Yani,

$$S_5 = \overbrace{1\,000 + 1\,300 + 1\,600 + 1\,900 + 2\,200}^{5\ terim} \qquad \text{Son altı sıfır yazılmamıştır.}$$

$$S_5 = 2\,200 + 1\,900 + 1\,600 + 1\,300 + 1\,000$$

$$+ \overline{\qquad 2S_5 = 5 \cdot (3\,200\,000\,000) \qquad}$$

$$S_5 = \frac{5}{2}(3\,200\,000\,000) = 5(1\,600\,000\,000) = 8\,000\,000\,000$$

Görüldüğü üzere azalan sırada yazılan dizi toplamını

$$S_5 = a_5 + (a_5 - d) + (a_5 - 2d) + (a_1 + d) + a_1$$

şeklinde yazabiliriz.

S_5 i bulmak için gösterilen yol S_n toplam formülünü bulmak için genellenebilir.

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + ... + (a_n - d) + a_n$$

$$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + ... + (a_1 + d) + a_1$$

$$+ \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$2S_n = n(a_1 + a_n) \quad \text{ve} \quad S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

Bir Aritmetik Dizinin İlk “ n ” Teriminin Toplam Formülü

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \; S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_1 + (n-1)d)$$

$$= \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right] \qquad\qquad a_n = a_1 + (n-1)d$$

ÖRNEK 37 ⇨ 2, 7, 12, 17,… olarak verilen aritmetik dizinin ilk 20 teriminin toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ $a_n = a_1 + (n-1)d$

$d = 7 - 2 = 5, \quad a_1 = 2, \quad n = 20$

$a_n = 2 + (n-1)5 = 2 + 5n - 5 = -3 + 5n$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow S_{20} = \frac{20}{2}(2 + a_{20})$$

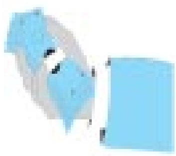
$a_{20} = -3 + 5 \cdot 20 = 97$ olduğundan

$S_{20} = 10(2 + 97) = 990$ olur.

ALIŞTIRMA 22⇒ $a_1 = 18$ ve $d = -3$ olarak verilen aritmetik dizinin ilk 4 teriminin toplamını bulunuz.

ÖRNEK 38⇒ Bir kişi belli bir miktar borç para alıyor ve bu borcu her ay olmak üzere 3 yıl boyunca ödemeyi kabul ediyor. Bu borcun faizi olan 666 000 000 TL yi borç aldığı parayı kullanarak ödemeye karar veriyor. Bu kişi faiz borcunu aritmetik dizi oluşturacak şekilde ödüyor ve ilk ödediği faiz borç miktarı ile en son ödediği faiz borç miktarı arasındaki fark 35 000 000 TL dir. Bu kişinin her ay ödeyeceği TL. miktarı ne kadardır?

ÇÖZÜM ⇒ Toplam ödeyeceği faiz borç miktarı = 666 000 000 TL
Bu borç 3 yıl boyunca, yani 36 ay boyunca ödenecektir.



Toplam ödeyeceği faiz borç miktarı = S_n = 666 000 000

İlk ay ödediği faiz borç miktarı – en son ay ödediği faiz borç miktarı = 35 000 000 TL

$$a_1 \quad - \quad a_{36} \quad = 35\,000\,000 \text{ TL}$$

Bir aritmetik dizinin toplam formülü $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ olduğundan

$$666\,000\,000 = \frac{36}{2}(a_1 + a_{36}) \text{ dır.}$$

Buradan $a_1 + a_{36} = \dfrac{666\,000\,000 \cdot 2}{36} = 37\,000\,000$ bulunur.

$$\left.\begin{aligned} a_1 + a_{36} &= 37\,000\,000 \\ a_1 - a_{36} &= 35\,000\,000 \end{aligned}\right\} \text{ denklem sistemi çözülürse}$$

$a_1 = 36\,000\,000$ *ve* $a_{36} = 1\,000\,000$ bulunur.

Öyleyse dizinin genel terimi,

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 36\,000\,000 + (n-1)d$$

olur.

$n = 36$ *ve* $a_{36} = 1\ 000\ 000$ olduğundan dolayı,

$1\ 000\ 000 = 36\ 000\ 000 + (36-1)d \Rightarrow -35\ 000\ 000 = 35d \Rightarrow d = -1\ 000\ 000$ bulunur.

$d = -1\ 000\ 000 \Rightarrow a_n = 36\ 000\ 000 + (n-1)(-1\ 000\ 000)$ olur.

Buna göre dizinin terimleri,

36 000 000, 35 000 000, 34 000 000, 33 000 000,…,1 000 000
olur.

ALIŞTIRMA 23⇔ İlk 15 teriminin toplamı 330 olan bir aritmetik dizinin onbeşinci ile birinci teriminin farkı 28 ise bu dizinin genel terimini bulunuz.

ÖRNEK 39⇔ 2, 6, 10, 14, 18, 22 olarak verilen aritmetik dizinin baştan ve sondan eşit uzaklıktaki terimler toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM ⇔ $a_1 = 2,\ a_2 = 6,\ a_3 = 10,\ a_4 = 14,\ a_5 = 18,\ a_6 = 22$

Baştan ve sondan eşit uzaklıkta bulunan terimler a_1 ve a_6, a_2 *ve* a_5, a_3 *ve* a_4 tür.

O zaman

$$a_1 + a_6 = 2 + 22 = 24$$
$$a_2 + a_5 = 6 + 18 = 24$$
$$a_3 + a_4 = 10 + 14 = 24$$

olur.

Aritmetik Dizide Baştan ve Sondan Eşit Uzaklıktaki Terimler Toplamı

Sonlu bir aritmetik dizide baştan ve sondan eşit uzaklıktaki terimlerin toplamı birbirine eşittir.

Birinci terimi a_1, ortak farkı d olan bir aritmetik dizinin ilk n terimini yazalım.

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_{n-1} & a_n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ a_1 & a_1+d & a_1+2d & \ldots & a_1+(n-2)d & a_1+(n-1)d \end{array}$$

Baştan ve sondan eşit uzaklıktaki terimlerin toplamlarını bulalım.

$$a_1 + a_n = 2a_1 + (n-1)d$$
$$a_2 + a_{n-1} = 2a_1 + (n-1)d$$

Buradan,

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \ldots = 2a_1 + (n-1)d$$

olur.

ALIŞTIRMA 24⇨ 17, 10, 3, -4, -11, -18, -25 olarak verilen aritmetik dizinin baştan ve sondan eşit uzaklıkta bulunan terimler toplamını bulunuz.

◆ *GEOMETRİK DİZİLER*

Varsayalım ki başlangıç maaşı yıllık 3 000 000 000 TL olan bir kişi her yıl %5 artış alıyor. Eğer $a_n = f(n)$ olarak tanımlanan fonksiyon n yıldaki maaşı gösteriyorsa, o zaman bu kişinin her yılki maaşı

$f(1) = 3\ 000\ 000\ 000$
$f(2) = 3\ 000\ 000\ 000(1{,}05) = 3\ 150\ 000\ 000$
$f(3) = 3\ 150\ 000\ 000(1{,}05) = 3\ 000\ 000\ 000(1{,}05)(1{,}05) = 3307\ 500\ 000$
$f(4) = 3\ 307\ 500\ 000(1{,}05) = 3\ 000\ 000\ 000(1{,}05)(1{,}05)(1{,}05) = 3\,472\ 875\,000$
$f(n) = 3\ 000\ 000\ 000(1{,}05)^{n-1}$ olur.

Her yılki maaş bir önceki maaşın (1,05) ile çarpımıyla bulunmaktadır. Bu dizinin genel terimi

$$f(n) = 3\ \ 000\ 000\ 000(1{,}05)^{n-1} \text{ dir.}$$

Bu çeşit bir dizi geometrik diziye örnektir. Yani, c ve r sabit olmak üzere $f(n) = cr^{n-1}$ şeklinde gösterilen diziler geometrik dizidir. Görüldüğü üzere c dizinin ilk terimini, r de ardışık iki terim arasındaki oranı göstermektedir.

Sonsuz Geometrik Dizi

Sonsuz geometrik dizi, c ve r sıfır olmayan sabit bir sayı olmak üzere $f(n) = cr^{n-1}$ ile tanımlanan bir fonksiyondur. f nin tanım kümesi doğal sayılar kümesidir. Kısaca,

$$a_n = f(n) = a_1 r^{n-1} \text{ dir.}$$

ÖRNEK 40 ⇨ Satış fiyatı 8 100 000 000 TL olan araba her yıl değerinin $\frac{1}{3}$ ünü değer olarak kaybetmektedir. Arabanın 4 yıl sonraki değeri nedir? (5 inci yıl başındaki fiyatı)

ÇÖZÜM ⇨ Araba her yıl fiyatının $\frac{1}{3}$ ünü kaybettiğine göre, değerinin $\frac{2}{3}$ ünü korumaktadır. Arabanın her bir yıl başındaki değeri, ilk terimi

$a_1 = 8\,100\,000\,000$ ve ortak oranı $r = \frac{2}{3}$ olan geometrik dizinin terimleridir.

Şimdi bu dizinin 5. terimini bulalım.

$a_n = a_1 r^{n-1}$ olduğundan

$$a_5 = 8\,100\,000\,000\left(\frac{2}{3}\right)^{5-1} = (8\,100\,000\,000)\left(\frac{16}{81}\right) = 1\,600\,000\,000$$

ALIŞTIRMA 25 ⇨ Üçüncü terimi $a_3 = 45{,}72$ ve ortak oranı $r = 0{,}6$ olan geometrik dizinin ilk terimini bulunuz.

ÖRNEK 41 ⇨ Pozitif terimli (a_n) geometrik dizisinde $a_4 = 9$ *ve* $a_6 = 16$ ise a_5 bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ Bir geometrik dizinin genel terimi $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ olduğundan

$$a_4 = a_1 \cdot r^3$$
$$a_5 = a_1 \cdot r^4$$
$$a_6 = a_1 \cdot r^5$$

olur.

Buradan görüyoruz ki $a_5 = a_1 \cdot r^4$ eşitliğinin her iki tarafının karesini alırsak

$$a_5^2 = a_1^2 \cdot r^8 = a_1 \cdot r^3 \cdot a_1 \cdot r^5 = a_4 \cdot a_6$$

olur. Bu eşitlikten

$$a_5^2 = a_4 \cdot a_6 \Rightarrow 9 \cdot 16 \Rightarrow a_5 = 12$$

olarak bulunur.

İlk Terimi a_1, Ortak Çarpanı r Olan Bir Geometrik Dizinin Ardışık Üç Terimi Arasındaki İlişki

Bir geometrik dizide herhangi bir terimin karesi kendisinden eşit uzaklıkta bulunan terimlerin çarpımına eşittir. Kısaca, (a_n) bir geometrik dizi ise

$$a_n^2 = a_{n-p} \cdot a_{n+p}$$

olur.

Dizinin ardışık üç terimi

$$a_{p-1}, a_p, a_{p+1}$$

olsun. Geometrik dizi tanımından

$$a_{p-1} = a_1 r^{p-2}$$

$$a_p = a_1 r^{p-1}$$

$$a_{p+1} = a_1 r^p$$

yazılabilir. Şimdi

$$a_p^2 = a_1^2 \cdot r^{2p-2}$$

$$a_{p-1} \cdot a_{p+1} = a_1 \cdot r^{p-2} \cdot a_1 \cdot r^p = a_1^2 \cdot r^{2p-2}$$

bulunur. Buradan,

$$a_p^2 = a_{p-1} \cdot a_{p+1}$$

ALIŞTIRMA 26 ⇨Pozitif terimli (a_n) geometrik dizisinde $a_3 = 2$ *ve* $a_9 = 32$ ise a_6 yı bulunuz.

ÖRNEK 42 ⇨Terimleri 1, 2, 4, 8, 16, …, $2^{n-1}, 2^n$ olan geometrik dizinin baştan ve sondan eşit uzaklıktaki terimler çarpımını bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨Terimleri 1, 2, 4, 8, 16, …, $2^{n-1}, 2^n$ olan geometrik dizisinin baştan ve sondan eşit uzaklıktaki terimleri

$$a_1 = 1 \text{ ve } 2^n = a_n$$

$$a_2 = 2 \text{ ve } 2^{n-1} = a_{n-1}$$

$$a_3 = 4 \text{ ve } 2^{n-2} = a_{n-2}$$

olur.

Görüldüğü üzere

$$a_1 \cdot a_n = a_2 \cdot a_{n-1} = a_3 \cdot a_{n-2} = ... = 2^n \text{ dir.}$$

İlk Terimi a_1, Ortak Çarpanı r Olan Sonlu Bir Geometrik Dizinin Baştan ve Sondan Eşit Uzaklıktaki Terimlerinin Çarpımı

Sonlu bir geometrik dizide baştan ve sondan eşit uzaklıktaki terimlerin çarpımı birbirine eşittir. Kısaca,

$$a_1 \cdot a_n = a_2 \cdot a_{n-1} = a_3 \cdot a_{n-2} = ... = a_1^2 \cdot r^{n-1} \text{ dir.}$$

İlk terimi a_1 ve ortak çarpanı r olan sonlu bir geometrik dizinin terimleri

$$a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n$$

dir.

$$a_1 \cdot a_n = a_1 \cdot (a_1 r^{n-1}) = a_1^2 \cdot r^{n-1}$$

$$a_2 \cdot a_{n-1} = (a_1 \cdot r)(a_1 \cdot r^{n-2}) = a_1^2 \cdot r^{n-1}$$

$$a_3 \cdot a_{n-2} = (a_1 \cdot r^2)(a_1 \cdot r^{n-3}) = a_1^2 \cdot r^{n-1}$$

....

dir.

ALIŞTIRMA 27⇨ Terimleri $\frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \frac{2}{81}, \frac{2}{243}$ olan geometrik dizinin baştan ve sondan eşit uzaklıktaki terimler çarpımını bulunuz.

ÖRNEK 43⇨ $(a_n) = (3 \cdot 2^n)$ geometrik dizisinin ilk n teriminin çarpımını bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ olduğundan $r = \frac{3 \cdot 2^{n+1}}{3 \cdot 2^n} = 2$ dir.

$a_1 = 3 \cdot 2^1 = 6$ olduğundan

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n = a_1 \cdot (a_1 \cdot r) \cdot (a_1 r^2) \cdot \ldots \cdot (a_1 r^{n-1})$$

$$= a_1^n \cdot r^{1+2+\ldots+n-1} = a_1^n \cdot r^{\frac{(n-1)n}{2}} \qquad \leftarrow \left(\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}\right)$$

$$= 6^n \cdot 2^{\frac{(n-1)n}{2}}$$

bulunur.

ALIŞTIRMA 28⇨ $(a_n) = (5(-2)^{n-1})$ olan geometrik dizinin ilk 20 teriminin çarpımını bulunuz.

ÖRNEK 44 ⇨ Monoton artan bir geometrik dizinin ardışık üç teriminin çarpımı 27 ve bu terimlerin aritmetik ortalaması $\frac{13}{3}$ tür. Bu üç terimi bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ Dizinin ardışık üç terimi a_n, a_{n+1}, a_{n+2} olsun.

$a_n \cdot a_{n+1} \cdot a_{n+2} = 27$ ve

$\frac{a_n + a_{n+1} + a_{n+2}}{3} = \frac{13}{3} \Rightarrow a_n + a_{n+1} + a_{n+2} = 13$ tür.

Dizi geometrik olduğundan $a_{n+1}^2 = a_n \cdot a_{n+2}$ dir.

$a_n \cdot a_{n+1} \cdot a_{n+2} = 27 \Rightarrow a_{n+1}^3 = 27 \Rightarrow a_{n+1} = 3 \qquad \leftarrow (a_n \cdot a_{n+2} = a_{n+1}^2)$

bulunur. Bu değer yukarıdaki bağıntılarda yerine konursa,

$$a_n \cdot a_{n+2} = 9 \quad ve \quad a_n + a_{n+2} = 10$$

bulunur. Toplamları 10, çarpımları 9 eden sayılar 1 ile 9 ve dizi artan olduğundan $a_n = 1, \quad a_{n+2} = 9$ dur.

O halde, aranılan ardışık 3 terim

1, 3, 9

olur.

ALIŞTIRMA 29⇨ Monoton artan bir geometrik dizinin ardışık üç teriminin çarpımı 8000 ve bu terimlerin aritmetik ortalaması $\frac{124}{3}$ tür. Bu üç terimi bulunuz.

Geometrik Dizilerin ilk "n" Teriminin Toplamı

Başlangıç maaşı yıllık 3 000 000 000 TL olan bir kişi her yıl %5 artış alıyorsa bu kişinin beş yıl boyunca kazandığı toplam para ne kadardır? Geometrik diziler konusunda gördüğümüz üzere bu kişinin n yıl sonraki maaşı şöyle gösterilir:

$$f(n) = 3\ 000\ 000\ 000(1{,}05)^{n-1}$$

Bu kişinin 5 yıl boyunca kazandığı toplam parayı bulmak için 5 yıl boyunca her yıl kazandığı parayı toplamamız gerekiyor.

1. yıl aldığı para:
$$f(1) = 3\ 000\ 000\ 000(1{,}05)^{1-1} = 3\ 000\ 000\ 000 = a_1$$
2. yıl aldığı para:
$$f(2) = 3\ 000\ 000\ 000(1{,}05)^{2-1} = 3\ 150\ 000\ 000 = a_2$$
3. yıl aldığı para:
$$f(3) = 3\ 000\ 000\ 000(1{,}05)^{3-1} = 3\ 307\ 500\ 000 = a_3$$
4. yıl aldığı para:
$$f(4) = 3\ 000\ 000\ 000(1{,}05)^{4-1} = 3\ 472\ 875\ 000 = a_4$$
5. yıl aldığı para:
$$f(5) = 3\ 000\ 000\ 000(1{,}05)^{5-1} = 3\ 646\ 518\ 750 = a_5$$

O zaman 5 yıl boyunca kazanılan para

$$S_5 = 3000\ 000\ 000 + 3\ 150\ 000\ 000 + 3\ 307\ 500\ 000 + \ldots$$

olur.

Daha önce belirttiğimiz gibi bulunan terimleri tek tek toplamak zahmetli ve zaman alan bir iştir. O zaman, yukarıdaki toplamı bize "n" tane elemanın toplamını bulmaya yardımcı olacak biçimde nasıl bulabiliriz? Bu örnekte, ortak oran $r = \frac{105}{100} = 1{,}05$ tir. Şimdi S_5 *ten* $(1{,}05)S_5$ i çıkardığımız zaman ne olduğuna bakalım.

$$
\begin{array}{rl}
S_5 = & a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + a_1 r^4 \\
rS_5 = & \qquad a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + a_1 r^4 + a_1 r^5 \\
- & \\
\hline
\end{array}
$$

$$S_5 - rS_5 = a_1 - a_1 r^5$$

$$S_5(1-r) = a_1(1-r^5)$$

$$S_5 = \frac{a_1(1-r^5)}{1-r}, r \neq 1$$

Bir Geometrik Dizinin ilk "n" Teriminin Toplam Formülü

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}, \quad r \neq 1$$

ÖRNEK 45 ⇨ 2, 4, 8, 16, … olarak verilen geometrik dizinin ilk 10 teriminin toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}, \quad r \neq 1$

$a_1 = 2,\ n = 10,\ r = \frac{4}{2} = 2$

$S_{10} = \frac{2(1-2^{10})}{1-2} = -2(1-2^{10})$

ALIŞTIRMA 30 ⇨ $a_1 = 1$ ve $r = -3$ olarak verilen geometrik dizinin ilk 15 teriminin toplamını bulunuz.

ÖRNEK 46 ⇨ Bir geometrik dizide 7. terim 27, 3. terim 3^7 ise 10. terimi ve ilk 10 terimin toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a_7 = a_1 \cdot r^6 = 3^3 \\ a_3 = a_1 \cdot r^2 = 3^7 \end{array}\right\} \Rightarrow r^4 = \frac{1}{3^4} \Rightarrow r = \frac{1}{3}$

bulunur. Buradan,

$$a_1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 3^7 \Rightarrow a_1 = 3^9$$

$$a_{10} = a_1 \cdot r^9 = 3^9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^9 = 1$$

olur. İlk 10 terimin toplamı ise,

$$S_{10} = a_1 \cdot \frac{1-r^{10}}{1-r} = 3^9 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\cdot\left(3^9 - \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{3^{10}}{2} - \frac{1}{2}$$

olarak bulunur.

ALIŞTIRMA 31 ⇨ Bir geometrik dizide 1. terim 15, 3. terim $\frac{3}{5}$ ise, 7. terimi ve ilk 7 terimin toplamını bulunuz.

ÖRNEK 47 ⇨ 2 ve 64 sayıları arasına, bu sayılarla birlikte geometrik dizi oluşturacak biçimde 4 sayı daha yerleştirilirse bu geometrik dizinin toplamı kaç olur bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ $\underset{a_1}{\underset{\uparrow}{2}},\ a_2, a_3, a_4, a_5, \underset{a_6}{\underset{\uparrow}{64}}$

$$a_6 = a_1 \cdot r^5 \Rightarrow 64 = 2 \cdot r^5 \Rightarrow r^5 = 32 = 2^5 \Rightarrow r = 2 \text{ dir.}$$

$(a^c = b^c \Rightarrow a = b)$

Bu 6 terimin toplamı ise,

$$S_6 = a_1 \cdot \frac{1-r^6}{1-r} = 2 \cdot \frac{1-2^6}{1-2} = -2(1-2^6)$$

$$= -2 + 2^7$$

olarak bulunur.

ALIŞTIRMA 32 ⇨ 243 ve 1 sayıları arasına geometrik dizi meydana getirecek şekilde 4 tane sayı yerleştirilirse bu dizinin toplamı kaç olur bulunuz.

ARAŞTIRMALAR

Aşağıda verilen ifadeleri dikkatlice okuyunuz. Eğer ifade doğru ise (D) yanlış ise (Y) harfini işaretleyiniz.

D Y 1. Bir aritmetik dizinin ortak farkı negatif ise bu dizi artandır.

D Y 2. Sabit diziler hem geometrik hem de aritmetik dizidir.

D Y 3. Bir yıllık güneş doğuş verisi aritmetik dizi oluşturur.

D Y 4. Genel terimi $a_n = \dfrac{1}{n^2}$ olarak verilen dizi geometrik bir dizidir.

D Y 5. Bir dizinin iki alt dizisinin toplamı bir alt dizi olmayabilir.

D Y 6. İki dizinin toplamı ıraksak ise bu dizilerin her ikisi de ıraksaktır.

D Y 7. Bir dizinin iki alt dizisinin çarpımı bir alt dizi olmayabilir.

Sol tarafta sütun A da verilen dizilere dizi türlerini tanımlayan sütun B den bir harf yazın. Sütun B deki dizi türleri bir kere veya birden fazla kullanılabilir veya hiç kullanılmayabilir.

	Sütun A	**Sütun B**
…….	8. 10, 6, 2, -2,…..	A) Aritmetik
…….	9. 3, 6, 11, 18, 27,…	B) Geometrik
…….	10. 5, 5, 5, 5,….	C) Her ikisi de
…….	11. –2, 6, -18, 54, ….	D) Hiçbiri
…….	12. –2, 6, 14, 22, …..	
…….	13. 100, 20, 4, 0,8, 0,16, 0,032,…..	

BÖLÜMÜN ÖZETİ

Sonsuz dizi tanım kümesi pozitif doğal sayılar olan bir fonksiyondur. Sonlu dizi sabit bir n pozitif doğal sayısı için n sonlu bir tanım kümesine sahiptir($D = \{1, 2, 3, ..., n\}$). Diziler ayrı noktalardan oluşmaktadır.

Dizilerin iki önemli çeşiti aritmetik ve geometrik dizilerdir. Bir dizinin ardışık iki terimi arasındaki fark sabit ise böyle dizilere aritmetik diziler denir. Eğer dizinin ardışık iki teriminin oranı sabit ise böyle dizilere geometrik diziler denir. Aşağıdaki tablo geometrik ve aritmetik dizilerle ilgili olan önemli kavramları özetlemektedir.

Aritmetik Dizi
Genel Terim: $a_n = a_{n-1} + d$, d ortak fark FonksiyonTanımı: $f(n) = dn + c$ veya $f(n) = a_1 + d(n-1)$, $a_n = f(n)$ ve d ortak fark
Geometrik Dizi
Genel Terim : $a_n = ra_{n-1}$, r ortak oran Fonksiyon Tanımı: $f(n) = cr^{n-1}$, $c = a_1$ ve r ortak oran

Eğer bir dizinin n. terimi n büyüdükçe L gibi bir sayıya yaklaşırsa, $\lim_{n \to \infty} a_n = L$ veya $n \to \infty$ giderken $a_n \to L$ olur. Eğer dizinin bütün terimleri için tek bir limit değeri yoksa, dizinin limiti yoktur denir.

Bir dizinin terimleri sınırsız şekilde artıyor veya azalıyorsa bu dizinin limiti $+\infty$ veya $-\infty$ olur.

DEĞERLENDİRME SORULARI

Aşağıda verilen soruları dikkatlice okuyunuz. Her soru için verilen 5 seçenekten doğru olanı bulunuz.

1. Aşağıdakilerden hangisi bir dizi değildir?

A) $(\frac{n}{n+1})$ B) $(\frac{n}{n-1})$ C) $(\frac{n}{2n+5})$ D) $(\frac{n}{2n-5})$ E) $(\frac{2n+5}{2n-5})$

2. Genel terimi $a_n = \frac{n}{n+1}$ olan (a_n) dizisinin limiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0 B) $\frac{1}{2}$ C)1 D) 2 E) limiti yoktur

3. Aşağıda genel terimleri verilen dizilerden hangisi yakınsaktır?

A) $\frac{n^2+1}{n}$ B) $\frac{2n+3}{5n-1}$ C) $(-1)^n\frac{n}{n+1}$ D) $(n+1)^2$ E) $\left(\frac{3n^2-5}{n+1}\right)$

4. $(a_n)=\left(\frac{2n+3}{4n+1}\right)$ dizisinin EBAS ı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0 B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) 3

5. Aşağıdaki dizilerden hangisi monoton artandır?

A) (3) B) $(4^{1/n})$ C) $\left(4+\frac{1}{n}\right)$ D) $(2-\frac{1}{n})$ E) $(2+\frac{1}{n})$

6. Aşağıdakilerden hangisi üçüncü terimi $a_3 = xyz^4$ ve ortak oranı $r = z^2$ olan geometrik bir dizinin ilk terimini göstermektedir?

A) xyz^5 B) xyz^3 C) xyz^2 D) xyz E) xy

7. Aşağıdakilerden hangisi ilk terimi $a_1 = 4+\sqrt{3}$ ve ortak farkı $d=\sqrt{3}$ olan bir aritmetik dizinin 5. terimini göstermektedir?

A) $4+7\sqrt{3}$ B) $4+6\sqrt{3}$ C) $4+5\sqrt{3}$ D) $4+4\sqrt{3}$ E)Hiçbiri

8. $a_1 = 15$, $a_n = 17\frac{2}{3}$ ve $d=\frac{1}{3}$ olan aritmetik dizinin kaç tane terimi vardır?

A) 9 B) 15 C) 17 D)19 E) 24

9. Aşağıdakilerden hangisi ilk terimi $a_1=\frac{2}{3}$ ve ortak oranı $r=3$ olan bir geometrik dizinin genel terimini göstermektedir?

A) $\frac{2}{3}(3)^{n-1}$ B) $3(\frac{2}{3})^{n-1}$ C) $\frac{2}{3}(3)^n$ D) $3(\frac{2}{3})^n$ E) $(\frac{2}{3})^n$

10. Aşağıdakilerden hangisi ilk terimi $a_1 = 4$ ve ortak farkı $d=\frac{1}{2}$ olan bir aritmetik dizinin genel terimini göstermektedir?

A) $4+\frac{1}{2}n$ B) $\frac{1}{2}n+\frac{7}{2}$ C) $\frac{7}{2}n+\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{2}+4n$ E) Hiçbiri

11. $(a_n)=\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)$ dizisinin bir alt dizisi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\left(\dfrac{2n+2}{2n+3}\right)$ B) $\left(\dfrac{2n+1}{2n+3}\right)$ C) $\left(\dfrac{n}{n+2}\right)$ D) $\left(\dfrac{3n-1}{n+1}\right)$ E) Hiçbiri

12. Aşağıdakilerden hangisi $\left(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4},...\right)$ dizisinin bir alt dizisi değildir?

A) $\left(1, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{7},...\right)$ B) $\left(\dfrac{1}{2},1, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4},\dfrac{1}{5}...\right)$ C) $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8},...\right)$

D) $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4},...\right)$ E) Hiçbiri

13. Aşağıdaki dizilerden hangisi monoton değildir?

A) $\left(\dfrac{2-n}{2n+1}\right)$ B) $\left(\dfrac{(n+2)!}{4^n}\right)$ C) $(n-2)^2$ D) $\left(4-\dfrac{1}{n}\right)$ E) $\left(4+\dfrac{1}{n}\right)$

14. Aşağıdaki dizilerden hangisi sınırlı değildir?

A) $\left(\dfrac{n^2+1}{n}\right)$ B) $\left(\dfrac{2n+1}{n+1}\right)$ C) $\left(\dfrac{(-1)^n}{3n+2}\right)$ D) $\left(\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$ E) $\left(\dfrac{1}{n}\right)$

15. $(a_n)=\left(\dfrac{2n-1}{n+2}\right)$ dizisinde 2 sayısının $\dfrac{1}{30}$ komşuluğu dışında kaç terimi vardır?

A) 152 B) 150 C) 148 D) 146 E) 140

BÖLÜM 3-2

SERİLER

- ***TEMEL KAVRAMLAR***
- ***YAKINSAK VE IRAKSAK SERİLER***
- ***ARİTMETİK SERİLER***
- ***GEOMETRİK SERİLER***

GİRİŞ

Dizi, tanım kümesi pozitif doğal sayılar olan bir fonksiyondur. Seri ise dizideki terimlerin toplamıdır. Seriler modern matematiğin gelişiminde önemli bir rol oynamaktadır. Seriler daha çok basit sembolik şekilde gösterilemeyen fonksiyonlara yaklaşmak için kullanılır. Örneğin, seriler p ve e gibi sayıların yaklaşık değerlerinin bulunmasında bir araçtır.

◆ *TEMEL KAVRAMLAR*

Varsayalım ki bir kişinin başlangıçtaki yıllık kazancı 3 000 000 000 ve her yıl 200 000 000 yıllık artış almaktadır. O zaman,

3 000 000 000, 3 200 000 000, 3 400 000 000, 3 600 000 000

bu kişinin 4 yıl boyunca yıllık kazancını gösteren bir dizinin terimleridir. Toplam kazanç sonlu seriler tarafından gösterilir

3 000 000 000+ 3 200 000 000+ 3 400 000 000+ 3 600 000 000

ve toplam 13 200 000 000 TL olur.

Herhangi bir dizi bir seri tanımlamak için kullanılabilir. Örneğin,

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, ...$$

olarak verilen sonsuz dizi bir serinin terimlerini tanımlamaktadır.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + ...$$

Şimdi, $a_1, a_2, a_3, ... a_n, ...$ bir dizinin terimleri olmak üzere seri kavramını tanımlayabiliriz.

Seriler

Sonlu serinin gösterimi şu şekildedir:

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Sonsuz seri ise şu şekildedir:

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Sonsuz seriler sonsuz sayıda terim içermektedir.

Sonsuz çokluktaki sayılar nasıl toplanmaktadır? Bildiğiniz gibi toplama işleminde birinci terim, ikinci terim, üçüncü terim, … olmak üzere eklenerek toplama işlemi sonuçlandırılır. Varsayalım ki terimlerimiz şunlardır.

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ..., a_n, ..., \quad n \geq 1$$

Şimdi bu terimleri birbiri ile toplamaya çalışalım.

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$
....
$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_n$$

$S_1, S_2, S_3, S_4, ..., S_n$ gibi terimlerden oluşan dizi serinin kısmî toplamlar dizisidir.

Eğer n ç ∞ giderken S_n kısmî toplamlar dizisi S gibi bir reel sayıya yaklaşırsa, sonsuz serinin toplamı S olur. Yani, kısmî toplamlar dizisinin limiti serinin toplamı olur.

Daha önce verdiğimiz sonsuz dizi $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, ...$örneğine geri dönelim. Burada

$$S_1 = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 0{,}75$$

$$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 0{,}875$$

$$S_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 0{,}9375 \text{ tir.}$$

$n \to \infty$ giderken $S_n \to 1$ dir. O zaman, sonsuz serinin

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots$$

toplamı 1 dir. Fakat, şunu burda belirtmeliyiz ki her sonsuz seri bir toplama sahip değildir.

◆ *YAKINSAK VE IRAKSAK SERİLER*

$\sum a_n$ serisini ve bu serinin kısmî toplamlar dizisini düşünelim. Eğer kısmî toplam dizisi olan (S_n) yakınsak ise $\sum a_n$ serisi yakınsaktır.

> **Yakınsak ve Iraksak Seriler**
>
> Bir serinin ilk n teriminin toplamı olan
>
> $$S_n = \sum_{n=1}^{n} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$
>
> $n \to \infty$ giderken bir S sayısına yaklaşırsa seri yakınsak ve serinin toplamı S dir. Yani,
>
> $$\lim_{n \to \infty} S_n = S \quad \text{dir.}$$
>
> $\lim_{n \to \infty} S_n$ yoksa seri ıraksaktır.

Gördüğünüz gibi bir serinin yakınsaklığı bu serinin kısmî toplamlar dizisi olan (S_n) nin yakınsaklığı ile ilgili (a_n) dizisinin yakınsaklığı ile ilgili değil.

Teorem: Eğer seri $\sum a_n$ yakınsak ise

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \text{ dır.}$$

İspat: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$

serisi yakınsak olsun. O zaman, genel terimleri

$$S_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1}$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

olan diziler yakınsak olup aynı S sayısına yakınsarlar.

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0 \text{ elde edilir.}$$

Bu teoremin karşıtı doğru değildir. Yani, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ olduğunda $\sum a_n$ yakınsak olmayabilir.

ÖRNEK 1 ⇨ $\lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = 0$ olduğu halde $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ serisinin ıraksak olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM ⇨ Her $n \geq 1$ i→in

$$\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln(n) \text{ dir.}$$

Kısmî toplamlar

$$S_n = (\ln(2) - \ln(1)) + (\ln(3) - \ln(2)) + \ldots + (\ln(n+1) - \ln(n)) = \ln(n+1)$$

$\lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = \infty$ olduğu i→in

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty \text{ dur.}$$

Bu da serinin ıraksak olduğunu göstermektedir.

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = 0 \text{ olur } \to\text{ünkü}$$

$$\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln(1+\frac{1}{n}) \text{ dir.}$$

Öyleyse,

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln(1) = 0$$

olur.

◆ *ARİTMETİK SERİLER*

Bir aritmetik dizinin terimlerinin toplamı aritmetik seriyi meydana getirir. Örneğin, $n = 1, 2, 3, 4, 5$ için tanımlanan $a_n = 2n-1$ dizisi aritmetik dizidir.

$$1, 3, 5, 7, 9$$

Bu aritmetik diziye karşılık gelen aritmetik seri

$$1+3+5+7+9 \text{ dur.}$$

Aritmetik Seri

Bir aritmetik dizinin terimleri toplamına aritmetik seri denir.

Daha önce "Aritmetik Dizilerin İlk "n" Terimlerinin toplamı" bölümünde belirttiğimiz üzere bir aritmetik dizinin ilk "n" teriminin toplam formülü

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = n\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right) \text{ dir.}$$

Genel terim formülü

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

olduğundan

$$S_n = n\left(\frac{a_1 + a_1 + (n-1)d}{2}\right)$$

$$S_n = a_1 n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d$$

olur.

ÖRNEK 2 ⇨ İlk terimi –2 ve ortak farkı 3 olan aritmetik serinin ilk 15 teriminin toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ $a_1 = -2, \qquad n = 15$

Aritmetik serinin kısmî toplamı= ?

$$S_n = a_1 n + \frac{n(n-1)}{2} d \text{ olduğundan}$$

$$S_{15} = (-2)\cdot 15 + \frac{15(15-1)}{2}\cdot 3$$

$$= -30 + \frac{15\cdot 14}{2}\cdot 3 = -30 + 315$$

$$= 285$$

bulunur.

ALIŞTIRMA 1 ⇨ İlk terimi $-\frac{1}{2}$ olan aritmetik serinin ilk sekiz teriminin toplamı 10 dur. Bu aritmetik serinin ortak farkını bulunuz.

◆ *GEOMETRİK SERİLER*

Varsayalım ki bir kişi size şu anlaşmayı sunuyor: birinci gün \$ 1, ikinci gün 0,50 \$, üçüncü gün 0,25 \$, …olmak üzere para alacaksınız. Bu anlaşmayı duyunca belki bir saniye sonsuz çokluktaki sayıları ekleyerek zengin olabileceğinizi düşünebilirsiniz. Fakat, sayıları eklemeye başlayınca göreceksiniz ki, bu geniş bir zamana dağılmış yaklaşık 2 \$ dolar için bir anlaşmadır.

Şimdi bu anlaşmanın niçin yaklaşık \$ 2 olduğunu görelim. Varsayalım ki S serisinin toplamı:

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots$$

Şimdi her iki tarafı $\frac{1}{2}$ ile çarpalım:

$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots$$

ve ikinci eşitliği birinciden çıkaralım. O zaman

$$S-\frac{1}{2}S=1 \Rightarrow \frac{1}{2}S=1$$

$S=2$ dir.

Böylece gösterdik ki

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+...=2 \text{ dir.}$$

Yani, bu seri 2 ye yakınsamaktadır.

Şimdi $\frac{1}{2}$ yerine daha genel bir ifade ele alalım:

$$S=1+q+q^2+q^3+... \qquad (1)$$

Her tarafı q ile çarpalım:

$$qS=q+q^2+q^3+..., \qquad (2)$$

Şimdi de ikinci eşitliği birinciden çıkaralım:

$$S-qS=1$$

Sonuç olarak,

$$S=\frac{1}{1-q}$$

olur.

Geometrik Seriler

Geometrik seri bir geometrik dizinin terimleri toplamıdır. Yani,

$$(a_n)=(a_1\cdot r^{n-1})=(a_1, a_1r, a_1r^2, ..., a_1r^{n-1}, ...)$$

gibi bir geometrik dizinin terimleri toplamı geometrik seridir. Kısaca,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1r^{n-1}$$

olarak gösterilir.

Daha önce "Geometrik Dizilerin İlk "n" Teriminin Toplamı" bölümünde belirttiğimiz üzere ilk terimi a_1 ve ortak oranı r olan bir geometrik dizinin ilk "n" teriminin toplam formülü

$$S_n = a_1\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right) \text{ , } |\ r\ | < 1 \text{ dir.}$$

Eğer $|\ r\ | > 1$ ise o zaman r^n değeri n arttıkça artmaktadır.

Sonsuz Geometrik Dizinin Toplamı

İlk terimi a_1 ve ortak oranı r olan sonsuz geometrik dizinin terimleri toplamı

$$S = \frac{a_1}{1-r}$$

ile verilir, $|\ r\ | < 1$ olmak şartı ile. Eğer $|\ r\ | \geq 1$ ise toplam bulunamaz.

ÖRNEK 3 ⇒ Aşağıdaki serinin yakınsaklığını kontrol ediniz ve toplamını bulunuz.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n + 4^n}{6^n}$$

ÇÖZÜM ⇒ $\dfrac{5^n + 4^n}{6^n} = \dfrac{5^n}{6^n} + \dfrac{4^n}{6^n} = \left(\dfrac{5}{6}\right)^n + \left(\dfrac{4}{6}\right)^n$ dir.

Görüyoruz ki yakınsak olan iki tane geometrik seri ile uğraşıyoruz; çünkü $r = \dfrac{5}{6} < 1$ ve $r = \dfrac{4}{6} < 1$ dir.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n + 4^n}{6^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{6}\right)^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n = 1 + \frac{5}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^3 + \dots \text{ geometrik serisinde}$$

$a_1 = 1$, ve $r = \dfrac{5}{6}$ olduğundan toplam $\dfrac{1}{1-\dfrac{5}{6}}$ dır.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{6}\right)^n = 1+\frac{4}{6}+\left(\frac{4}{6}\right)^2+\left(\frac{4}{6}\right)^3+\ldots$$ geometrik serisinde

$a_1 = 1$, ve $r = \frac{4}{6}$ olduğundan toplam $\dfrac{1}{1-\frac{4}{6}}$ dır.

O halde,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^n+4^n}{6^n} = \frac{1}{1-\frac{5}{6}}+\frac{1}{1-\frac{4}{6}} = 6+3 = 9$$ olarak bulunur.

ALIŞTIRMA 2 ⇨ Aşağıdaki serinin yakınsaklığını kontrol ediniz ve toplamı bulunuz.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^{2n-1}}{3^{3n+1}}$$

ÖRNEK 4 ⇨ $\frac{5}{6}+\frac{5}{18}+\frac{5}{54}+\frac{5}{162}+\ldots$ olarak verilen serinin toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ Verilen toplamı $\frac{5}{2}$ çarpanına alalım:

$$\frac{5}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\ldots\right)$$

Parantez içindeki seri ortak oranı $r = \frac{1}{3}$ ve ilk terimi $a_1 = \frac{1}{3}$ olan geometrik seridir.

Sonuç olarak, serinin toplamı

$$\frac{5}{2}\left(\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}\right) = \frac{5}{2}\left(\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}\right) = \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{4}$$ tür.

ALIŞTIRMA 3 ⇨ $\frac{3}{4}+\frac{3}{8}+\frac{3}{16}+\frac{3}{32}+\ldots$ olarak verilen serinin toplamını bulunuz.

ÖRNEK 5 ⇨ Sonsuz bir geometrik serinin toplamı $\frac{5}{9}$ ve terimlerinin kareleri toplamı $\frac{25}{99}$ ise bu serinin ikinci terimini bulunuz.

ÇÖZÜM ⇨ $$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot r^{n-1} = \frac{a_1}{1-r} = \frac{5}{9}$$

Terimlerin kareleri toplamı

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots = a_1^2 + (a_1 r)^2 + (a_1 r^2)^2 + \dots$$

$$= a_1^2 (1 + r^2 + r^4 + \dots)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_1)^2 \left(r^{n-1}\right)^2 = \frac{a_1^2}{1-r^2} = \frac{25}{99}$$ yazılır.

$$\frac{a_1}{1-r} = \frac{5}{9} \Rightarrow a_1 = \frac{5}{9}(1-r)$$ dir.

$a_1 = \frac{5}{9}(1-r)$ değerini $\frac{a_1^2}{1-r^2} = \frac{25}{99}$ denkleminde yerine koyalım.

$$\left(\frac{5}{9}\right)^2 \cdot (1-r)^2 \cdot \frac{1}{1-r^2} = \frac{25}{99}$$

$$\frac{25}{81} \cdot \frac{(1-r)^2}{(1-r)(1+r)} = \frac{25}{99} \Rightarrow \frac{25}{81} \cdot \frac{1-r}{1+r} = \frac{25}{99}$$

$$\frac{1-r}{1+r} = \frac{81}{99} \Rightarrow 99 - 99r = 81 + 81r$$

$$99\text{-}81 = 99r + 81r$$

$$18 = 180r \Rightarrow r = \frac{1}{10}$$

$$r = \frac{1}{10} \Rightarrow a_1 = \frac{5}{9}\left(1 - \frac{1}{10}\right) = \frac{5}{9} \cdot \frac{9}{10} = \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{2-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{20}$$

ALIŞTIRMA 4 ⇨ Sonsuz bir geometrik serinin toplamı 9 ve terimlerin kareleri toplamı 27 ise bu serinin üçüncü terimini bulunuz.

ÖRNEK 6 ⇨ Aşağıda verilen devirli ondalık açılımları seri olarak yazınız ve kısmî toplamla limitini hesaplayınız.

(A) $0,3\overline{12}$ (B) $0,0\overline{7}$

ÇÖZÜM ⇨ (A) $0,3\overline{12} = 0,3121212\ldots$

$0,3\overline{12}$ ondalık açılımının seri biçiminde yazılımı

$$0,3\overline{12} = \frac{3}{10} + \left(\frac{12}{1000} + \frac{12}{100000} + \frac{12}{10000000} + \ldots\right)$$

$$= \frac{3}{10} + \frac{12}{1000}\left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{10000} + \ldots\right)$$

$$= \frac{3}{10} + \frac{12}{1000}\left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \ldots\right)$$

Görüldüğü üzere, parantez içi ilk terimi 1 ve ortak oranı $\frac{1}{100}$ olan bir geometrik seri göstermektedir.

$|r| = \left|\frac{1}{100}\right| < 1$ olduğundan, sonsuz geometrik dizilerin toplam formülünden

$$S = \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{100}{99} \text{ olur.}$$

Şimdi de bu bulduğumuz toplamı yukarıdaki toplamda yerine koyalım. $0,3\overline{12}$ devirli ondalık açılımı rasyonel sayı olarak

$$0,3\overline{12} = \frac{3}{10} + \frac{12}{1000} \cdot \frac{100}{99}$$

$$= \frac{3}{10} + \frac{12}{990} = \frac{309}{990} = \frac{103}{330} \text{ bulunur.}$$

(B) $0,0\overline{7} = 0,07777...$

$$0,0\overline{7} = \frac{7}{10^2} + \frac{7}{10^3} + \frac{7}{10^4} + ... + \frac{7}{10^{n+1}} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{10^{n+1}}$$

Görüldüğü üzere bu geometrik dizinin ilk terimi $a_1 = \frac{7}{100}$ ve ortak

oranı $r = \dfrac{\frac{7}{10^3}}{\frac{7}{10^2}} = \frac{1}{10}$ dur.

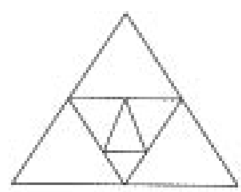
$$(S_n) \rightarrow \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{7}{100}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{7}{100} \cdot \left(\frac{10}{9}\right) = \frac{7}{90}$$

ŞTIRMA 5⇨ Aşağıda verilen devirli ondalık açılımları seri olarak yazınız ve kısmi toplamlar limitini hesaplayınız.

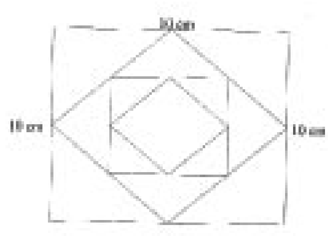
(A) $0,\overline{3}$ (B) $2,1\overline{84}$

ARAŞTIRMALAR

1. Bir eşkenar üçgenin kenarlarının orta noktalarını köşe kabul eden ikinci bir eşkenar üçgen çiziliyor. Bu şekilde içiçe çizilen sonsuz sayıdaki eşkenar üçgenin çevreleri toplamını bulunuz.



2. Kenarları 10 ar cm olan karenin kenarlarının orta noktalarını köşe kabul eden ikinci bir kare çiziliyor. Bu şekilde içiçe çizilen sonsuz sayıda karenin alanları toplamını bulunuz.



BÖLÜMÜN ÖZETİ

Seri, bir dizinin terimlerinin toplamıdır. Yani, $a_n = f(n)$ gibi bir dizinin terimleri

$$a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n, ...$$

olsun. Seri bu dizinin terimleri toplamıdır ve şöyle gösterilir.

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Diziler ve seriler sonlu ve sonsuz olabilirler. Sonlu serinin her zaman bir toplamı vardır. Fakat, sonsuz serilerin toplamı bulunamayabilir.

Aşağıdaki tablo aritmetik ve geometrik serilerle ilgili olan kavramları özetlemektedir.

Aritmetik Seriler
Sonlu Aritmetik Seri $a_k = dk + c$, d ve c sabit olmak üzere, $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ dir. **İlk "n" Teriminin Toplamı** $S_n = n\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)$ veya $S_n = a_1 n + \frac{n(n-1)}{2} d$
Geometrik Seriler
Sonsuz Geometrik Seriler $a_k = a_1 r^{k-1}$ olmak üzere $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$ dır **İlk "n" Terimin Toplamı** $S_n = a_1\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$, a_1 ilk terim ve r ortak oran olmak üzere **Sonsuz Geometrik Serilerin Toplamı** $S = \frac{a_1}{1-r}$, $\lvert r \rvert < 1$. Toplam bulunamaz eğer $\lvert r \rvert \geq 1$ ise.

DEĞERLENDİRME SORULARI

Aşağıda verilen soruları dikkatlice okuyunuz. Her soru için verilen 5 seçenekten doğru olanı bulunuz.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{3^n}$ serisi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

   A) $\frac{5}{3}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{5}{2}$ D) $\frac{1}{2}$ E) Bulunamaz

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{n+1}$ serisi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

   A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) Bulunamaz

3. İlk terimi 1 ve ortak farkı 3 olan aritmetik serinin ilk onbir teriminin toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

   A) 176 B)175 C) 170 D) 166 E) 165

4. $0{,}3\overline{64}$ devirli ondalık açılımının kesir olarak gösterimi aşağıdakilerden hangisidir?

   A) $\frac{364}{100}$ B) $\frac{364}{999}$ C) $\frac{361}{990}$ D) $\frac{361}{900}$ E) Hiçbiri

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ serisinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

   A) 0 B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) $\frac{1}{3}$ E) Bulunamaz

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n+1}$ serisinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

   A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) 2 D) 3 E) Bulunamaz

7. Aşağıdaki serilerden hangisi yakınsaktır?

   A) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}$ B) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ C) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{3}\right)^{1-n}$ D) $\sum_{n=5}^{\infty} (-\pi)^{n+7}$ E) Hiçbiri

8. Aşağıdaki serilerden hangisi ıraksaktır?

   A) $\sum_{n=-20}^{\infty} (2^{-n})$ B) $\sum_{n=-8}^{\infty} \left(\frac{e}{2}\right)^{n+2}$ C) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^{-n}$ D) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{2n}$ E)Hiçbiri

9. $0{,}0\overline{5}$ devirli ondalık açılımının rasyonel sayı olarak eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

   A) $\frac{5}{100}$ B) $\frac{5}{99}$ C) $\frac{5}{90}$ D) $\frac{5}{10}$ E) $\frac{5}{9}$

10. $a, b \in R^+$ olmak üzere "$a+b,\ 2ab,\ ab^2$" sayıları hem aritmetik dizi, hem de geometrik dizi meydana getirdiklerine göre a ve b değerleri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $a=\dfrac{3}{2},\ b=2$ B) $a=2,\ b=\dfrac{3}{2}$ C) $a=2,\ b=4$

D) $a=\dfrac{2}{3},\ b=2$ E) $a=4,\ b=2$